

РОЗВИТОК МЕТОДОЛОГІЇ СИЛОВИХ РОЗРАХУНКІВ ПЛОСКИХ РАМ В УМОВАХ ВИМУШЕНИХ КОЛИВАНЬ

Холодняк Ю. С., Подлесний С. В., Капорович С. В.

Выполнен анализ существующих методик силового расчёта балок и плоских рам, пребывающих под действием вынужденных колебаний. Показано, что расчёты балок не являются проблематичными. Для них разработаны как упрощённые методики, использующие математические модели невесомых балок с закреплёнными на них точечными массами, так и более сложные, учитывающие массы балок. Существующие методики силового расчёта плоских рам имеют в своей основе сложные двухмерные математические модели. Их реализация требует углублённой математической подготовки и сложных вычислительных средств. Поэтому их трудно применить в обычной инженерной практике. Упрощённых методик силового расчёта колеблющихся рам не существует. Целью настоящей работы является разработка упрощённой двухмерной математической модели вынужденных колебаний плоских рам с последующим использованием этой модели в их силовых расчётах. Предложенная в работе математическая модель описывает колебания невесомой рамы с точечной массой при одновременном действии на них вертикальной и горизонтальной гармонических возмущающих сил. В основу модели положен метод сил, устанавливающий связь перемещений рамы с действующими на неё силами. Вместе с моделью получены зависимости для вычисления резонансных частот колеблющейся системы. Выполненные разработки позволяют определять динамические характеристики колебательного процесса и рассчитывать раму на прочность и жёсткость. Методика такого расчёта реализована в среде Mathcad 15 и успешно апробирована на ряде учебных задач. Результаты работы могут быть полезны студентам и преподавателям технических ВУЗов, а также специалистам-практикам, выполняющим силовые расчёты.

Ключевые слова: плоские рамы, вынужденные колебания, математическая модель, резонансные частоты, силовые расчёты.

Виконано аналіз існуючих методик силового розрахунку балок і плоских рам, які перебувають під дією вимушених коливань. Показано, що розрахунки балок не є проблематичними. Для них розроблені як спрощені методики, які використовують математичні моделі невагомих балок з прикріпленими до них точковими масами, так і більш складні, що враховують маси балок. Існуючі методики силового розрахунку плоских рам мають у своїй основі складні двомірні математичні моделі. Їхня реалізація потребує поглибленої математичної підготовки і складних обчислювальних засобів. Тому їх важко застосувати у звичайній інженерній практиці. Спрощених методик силового розрахунку рам, що коливаються, не існує. Метою даної роботи є розробка спрощеної двомірної математичної моделі вимушених коливань плоских рам з наступним використанням цієї моделі в їхніх силових розрахунках. Математична модель, що запропонована в роботі, описує коливання невагомої рами з точковою масою при одночасній дії на них вертикальної й горизонтальної гармонічних збуджуючих сил. У основу моделі покладений метод сил, що встановлює зв'язок переміщень рами з силами, які на неї діють. Разом з моделлю отримані залежності для обчислення резонансних частот коливальної системи. Виконані розробки дозволяють визначати динамічні характеристики коливального процесу і розраховувати рами на міцність і жорсткість. Методика такого

розрахунку реалізована у середовищі Mathcad 15 і успішно пройшла апробацію на ряді навчальних задач. Результати роботи можуть бути корисними студентам і викладачам технічних ВНЗ, також фахівцям-практикам, що виконують силові розрахунки.

Ключові слова: плоскі рами, вимушені коливання, математична модель, резонансні частоти, силові розрахунки.

Analysis of existing methods of power calculation of beams and plane frames under the influence of forced oscillations is performed. It is shown that calculations of beams are not problematic. For such calculations there have been developed both simplified methods, which use mathematical models of weightless beams with point masses fixed to them, as well as more complex ones, which take into account the masses of the beams. The existing techniques for power calculations of plane frames are based on complex two-dimensional mathematical models. Their implementation requires in-depth mathematical training and complex computing facilities. Therefore, they are difficult to apply in ordinary engineering practice. There are no simplified methods of power calculation of oscillating frames. The purpose of this paper is to develop a simplified two-dimensional mathematical model of forced oscillations of plane frames with subsequent application of this model to power calculations. The mathematical model proposed in this paper describes oscillations of a weightless frame with a point mass and simultaneous action of vertical and horizontal harmonic disturbing forces. The model is based on the method of forces, which establishes the relationship between the movement of the frame and the forces acting on it. Together with the model, dependences were obtained for calculating resonant frequencies of the oscillating system. The completed developments allow to determine dynamic characteristics of the oscillation process and to calculate frames for strength and rigidity. The methodology for this calculation is implemented in the Mathcad 15 environment and has been successfully tested on a number of learning tasks. The results of the work may be useful to students and teachers of technical universities, as well as practitioners who perform power calculations.

Keywords: plane frame, forced oscillation, mathematical model, resonant frequency, power calculation.

Холодняк Ю. С.

канд. техн. наук, доц. каф. Техмех ДГМА
holodnjak.juri@gmail.com

Подлесный С. В.

канд. техн. наук, доц. Техмех ДГМА

Капорович С. В.

канд. техн. наук, ст. преп. Техмех ДГМА
kaporovych@gmail.com

УДК 539.3/6

Холодняк Ю. С., Подлесний С. В., Капорович С. В.**РОЗВИТОК МЕТОДОЛОГІЇ СИЛОВИХ РОЗРАХУНКІВ ПЛОСКИХ РАМ В УМОВАХ ВИМУШЕНИХ КОЛИВАНЬ**

Науково-технічний прогрес вимагає від проєктантів застосування все більш досконалих розрахункових методів, що стосуються міцності та енергосилових параметрів створюваних виробів. Найбільш актуальні такі вимоги для конструкцій, які перебувають під дією змінних у часі зовнішніх навантажень.

У машинобудуванні та будівництві значно поширені стрижневі конструкції – балки і плоскі рами, які експлуатуються в умовах вимушених коливань, тобто таких, що виникають внаслідок дії так званих збурюючих сил. Найбільш часто джерелом таких сил є робота різного обладнання, встановленого на цих конструкціях, - насосів, пресів, копрів, тощо. Збурюючі сили виникають внаслідок руху центра мас такого обладнання і мають періодичний, часто гармонійний характер. У конструкціях, що перебувають в умовах вимушених коливань, виникають додаткові (динамічні) зусилля і напруження, котрі в ряді випадків досягають небезпечних величин. Звідси – важливість адекватного їх врахування в силових розрахунках названих конструкцій.

У навчально-методичній літературі з опору матеріалів висвітлюються, як правило, вимушені коливання невагомої балки з закріпленою на ній точковою масою [1–3]. Така модель коливної системи, незважаючи на свою простоту, дає зазвичай прийнятну для практики точність силових розрахунків. Поряд з цим в університетських курсах опору матеріалів і будівельної механіки аналізуються також випадки вимушених коливань балок з розподіленими або кількома дискретними масами [4–6]. Однак пропоновані при цьому методики розрахунку для широкого практичного застосування досить складні, оскільки вимагають поглибленої математичної підготовки, що виходить за рамки навчальних планів звичайних інженерних ВНЗ.

Подібні (уточнені) методики розрахунку, які стосуються вимушених коливань плоских рам, зазвичай розглядаються в університетських курсах будівельної механіки [7–9]. Вони також досить складні і тому мало прийнятні для широкого застосування в машинобудуванні та інших галузях промисловості. Для цього потрібні більш прості методики розрахунку, що не потребують спеціальної математичної підготовки, але забезпечують при цьому прийнятну для практики точність.

Метою даної роботи є розробка спрощеної двомірної математичної моделі вимушених коливань плоских рам з наступним використанням цієї моделі в їх силових розрахунках.

Для реалізації зазначеної мети візьмемо найпростішу Г-подібну раму (рис. 1) і проаналізуємо її деформацію.

Нехай в довільний момент часу на коливну масу m діють сили P_1 і P_2 , які викликають переміщення Δ_1 і Δ_2 (див. рис. 1):

$$\Delta_1 = P_1 \cdot \delta_{11} + P_2 \cdot \delta_{12}, \quad (1)$$

$$\Delta_2 = P_2 \cdot \delta_{22} + P_1 \cdot \delta_{21}, \quad (2)$$

де δ_{11} , δ_{12} , δ_{22} , δ_{21} – переміщення коливної маси під дією одиничних сил $P_1 = 1$ і $P_2 = 1$, які визначаються з допомогою епюр згинальних моментів від цих сил – \overline{M}_1 і \overline{M}_2 [4].

Колівання маси відбуваються відносно положення статичної рівноваги (точка 0 на рис. 1). У цьому положенні:

$$P_1^{\text{ст}} = mg, \quad (3)$$

$$P_2^{ct} = 0, \quad (3)$$

Згідно з (1) і (2) маємо:

$$\Delta_1^{ct} = P_1^{ct} \cdot \delta_{11} = mg \cdot \delta_{11}, \quad (5)$$

$$\Delta_2^{ct} = P_1^{ct} \cdot \delta_{21} = mg \cdot \delta_{21}. \quad (6)$$

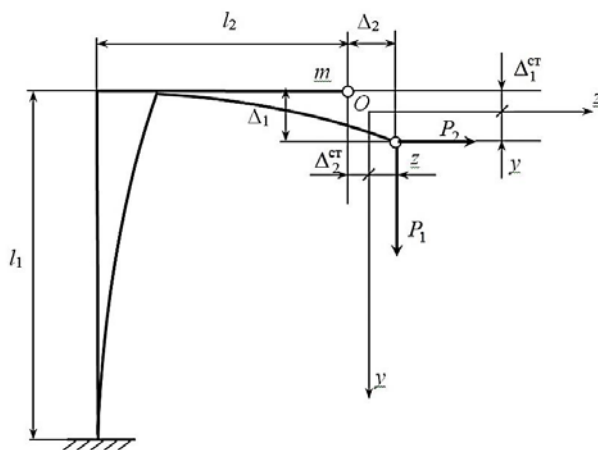


Рис. 1. Схема рами

У процесі коливань (див. рис. 1):

$$\Delta_1 = \Delta_1^{ct} + y = mg \cdot \delta_{11} + y, \quad (7)$$

$$\Delta_2 = \Delta_2^{ct} + z = mg \cdot \delta_{21} + z. \quad (8)$$

Підставимо вирази (7) і (8) у формули (1) і (2), отримаємо:

$$\begin{cases} mg \cdot \delta_{11} + y = P_1 \cdot \delta_{11} + P_2 \cdot \delta_{12}, \\ mg \cdot \delta_{21} + z = P_2 \cdot \delta_{22} + P_1 \cdot \delta_{21}. \end{cases} \quad (9)$$

Вирішуючи систему рівнянь (9), отримаємо залежності P_1 і P_2 від поточних координат коливної маси:

$$P_1 = f_1(y, z) = mg + \frac{z}{\delta_{21}} - \frac{y \cdot \delta_{21} - z \cdot \delta_{11}}{\delta_{21}^2 - \delta_{22} \cdot \delta_{11}} \cdot \frac{\delta_{22}}{\delta_{21}}, \quad (10)$$

$$P_2 = f_2(y, z) = \frac{y \cdot \delta_{21} - z \cdot \delta_{11}}{\delta_{21}^2 - \delta_{22} \cdot \delta_{11}}. \quad (11)$$

Врахуємо, що P_1 і P_2 – сили, що деформують раму. Тоді відповідні реакції рами будуть дорівнювати цим силам:

$$R_1 = P_1 = f_1(y, z), \quad (12)$$

$$R_2 = P_2 = f_2(y, z). \quad (13)$$

Конкретизуємо задачу. В якості коливної маси прийемо, як це роблять автори ряду робіт [1, 10, 11], електродвигун зі статично невідбалансованим ротором. Його кутова швидкість – ω , модуль збурюючої сили – H .

Докладемо до зазначеної маси силу тяжіння – $m\bar{g}$, реакції рами – \bar{R}_1 і \bar{R}_2 , збурюючу силу \bar{H} , сили інерції $\bar{\Phi}_1$ і $\bar{\Phi}_2$ і сили опору середовища – \bar{F}_1 і \bar{F}_2 (рис. 2).

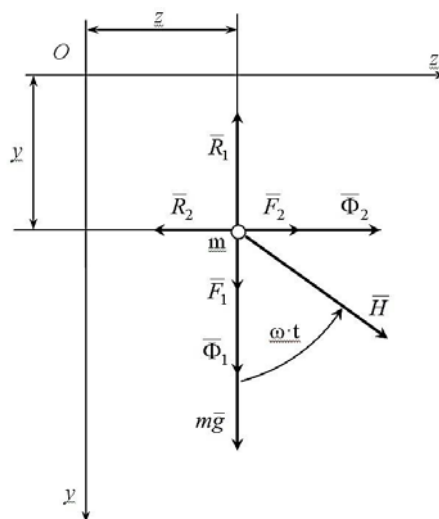


Рис. 2. Схема навантаження коливної маси

Під дією цих сил маса m буде перебувати в положенні кінетостатичної рівноваги:

$$m\bar{g} + \bar{R}_1 + \bar{R}_2 + \bar{H} + \bar{\Phi}_1 + \bar{\Phi}_2 + \bar{F}_1 + \bar{F}_2 = 0. \quad (14)$$

Спроєктуємо векторне рівняння (14) на осі y і z , отримуємо:

$$(y) : mg + R_1^y + H \cdot \cos \omega t + \Phi_1^y + F_1^y = mg - f_1(y, z) + H \cdot \cos \omega t - m \cdot \ddot{y} - \mu \cdot \dot{y} = 0; \quad (15)$$

$$(z) : R_2^z + H \cdot \sin \omega t + \Phi_2^z + F_2^z = -f_2(y, z) + H \cdot \sin \omega t - m \cdot \ddot{z} - \mu \cdot \dot{z} = 0. \quad (16)$$

Після перетворень (15) і (16) маємо остаточну форму диференціальних рівнянь руху маси m :

$$m \cdot \ddot{y} + \mu \cdot \dot{y} + f_1(y, z) = mg + H \cdot \cos \omega t, \quad (17)$$

$$m \cdot \ddot{z} + \mu \cdot \dot{z} + f_2(y, z) = H \cdot \sin \omega t, \quad (18)$$

де \ddot{y} , \ddot{z} – проєкції на осі координат прискорення коливної маси;

\dot{y} , \dot{z} – проєкції на осі координат швидкості цієї маси;

μ – коефіцієнт опору середовища;

t – час від початку руху (виходу маси m з положення статичної рівноваги).

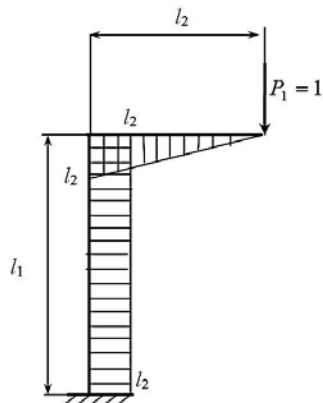
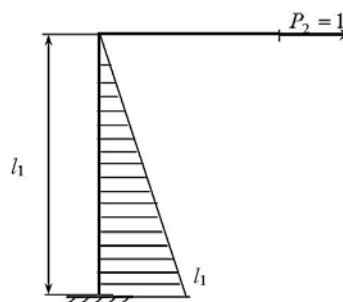
Слід зазначити, що рівняння (17) і (18) є універсальними, що не залежать безпосередньо від геометричних параметрів рами: ці параметри пов'язані лише з величинами δ_{11} , δ_{22} , $\delta_{12} = \delta_{21}$. Для рами, зображеної на рисунку 1, їх значення легко обчислити з допомогою правила Верещагіна шляхом «перемноження» епюр \bar{M}_1 і \bar{M}_2 (рис. 3, 4):

$$\delta_{11} = \bar{M}_1 \times \bar{M}_1 = \frac{1}{E \cdot J_x} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot l_2 \cdot l_2 \cdot \frac{2}{3} \cdot l_2 + l_1 \cdot l_2 \cdot l_2 \right) = \frac{1}{E \cdot J_x} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot l_2^3 + l_1 \cdot l_2^2 \right), \quad (19)$$

$$\delta_{22} = \bar{M}_2 \times \bar{M}_2 = \frac{1}{E \cdot J_x} \cdot \frac{1}{2} \cdot l_1 \cdot l_1 \cdot \frac{2}{3} \cdot l_1 = \frac{l_1^3}{3E \cdot J_x}, \quad (20)$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \bar{M}_1 \times \bar{M}_2 = \frac{1}{E \cdot J_x} \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \frac{1}{2} \cdot l_1 = \frac{l_1^2 \cdot l_2}{2E \cdot J_x}, \quad (21)$$

де EJ_x – жорсткість перерізу стрижнів рами.

Рис. 3. Епюра \bar{M}_1 Рис. 4. Епюра \bar{M}_2

При іншій формі рами формули для обчислення зазначених величин будуть іншими, однак процедура їх визначення залишиться незмінною.

Знайдені значення переміщень δ_{11} , δ_{22} і δ_{12} дозволяють визначити також резонансні частоти коливань системи.

В основу цього визначення покладемо формулу для обчислення резонансних частот коливань рами з двома закріпленими на ній точковими масами m_1 і m_2 , кожна з яких може переміщатися в одному напрямку [12]. Ця формула має вигляд:

$$\omega_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(m_1 \cdot \delta_{11} + m_2 \cdot \delta_{22}) \pm \sqrt{(m_1 \cdot \delta_{11} + m_2 \cdot \delta_{22})^2 - 4 \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot (\delta_{11} \cdot \delta_{22} - \delta_{12}^2)}}}. \quad (22)$$

У нашому випадку на рамі закріплена одна маса m , але вона переміщується у двох напрямках – вертикальному і горизонтальному. Щоб врахувати цю обставину, покладемо у формулі (22) $m_1 = m_2 = m$.

Тоді, після нескладних перетворень формула (22) прийме вигляд:

$$\omega_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{m \cdot (\delta_{11} + \delta_{22}) \pm m \cdot \sqrt{(\delta_{11} + \delta_{22})^2 - 4 \cdot (\delta_{11} \cdot \delta_{22} - \delta_{12}^2)}}}. \quad (23)$$

Для оцінки адекватності запропонованої моделі проводилося порівняння одержуваних з її допомогою результатів з опублікованими в роботі [13], де на основі використання класичної моделі вимушених коливань системи з одним ступенем свободи визначені параметри вертикальних коливань невагомою консольною балкою (двотавр 20, $l = 3$ м) з встановленим на ній електродвигуном ($m = 1000$ кг, $n = 1000$ об/хв) зі статично невідбалансованим ротором, який створює збурюючу силу $H = 0,3mg$. У цій роботі колова частота власних коливань системи дорівнювала $\kappa = 20,220$ с⁻¹, а максимальні нормальні напруження в балці склали $\sigma_{\max} = 171$ МПа. Альтернативний розрахунок за запропонованою методикою виконувався в середовищі Mathcad 15 [14, 15] стосовно до схеми рами, зображеної на рис. 1, але з максимальним її наближенням за формою і розмірами до вищезгаданої балки: $l_1 = 0,1$ м, $l_2 = 3$ м. Інші параметри системи – такі ж, як і в роботі [13]. Результати розрахунку представлені на рис. 5.

Розбіг результатів по σ_{\max} (в місцях защемлень рами і балки):

$$\Delta(\sigma_{\max}) = \frac{167,416 - 171}{171} \cdot 100 = -2,096\% ;$$

по резонансній частоті (ω_1 і κ):

$$\Delta(\omega_1) = \frac{19,28 - 20,22}{20,22} \cdot 100 = -4,649\% .$$

$$\underline{g} := 9.81 \quad J_x := 1840 \cdot 10^{(-8)} \quad eE := 2 \cdot 10^{11} \quad l_2 := 3 \quad \underline{m} := 1000 \quad \underline{H} := 2943 \quad \omega := 104.7$$

$$l_1 := 0.1 \quad W_x := 184 \quad \mu := 0.0000001$$

$$\delta_{11} := \frac{2 \cdot l_2^3 + 6 \cdot l_1 \cdot l_2^2}{6 \cdot eE \cdot J_x} \quad \delta_{22} := \frac{2 \cdot l_1^3}{6 \cdot eE \cdot J_x} \quad \delta_{12} := \frac{3 \cdot l_2 \cdot l_1^2}{6 \cdot eE \cdot J_x} \quad \delta_{21} := \delta_{12}$$

$$\delta_{11} = 2.69 \times 10^{-6} \quad \delta_{22} = 9.058 \times 10^{-11} \quad \delta_{12} = 4.076 \times 10^{-9} \quad \delta_{21} = 4.076 \times 10^{-9}$$

Given

$$m \cdot y''(t) + \mu \cdot y'(t) + \left[\frac{-z(t) \cdot \delta_{12} - m \cdot g \cdot \delta_{12} \cdot \delta_{21} + y(t) \cdot \delta_{22} + m \cdot g \cdot \delta_{11} \cdot \delta_{22}}{(\delta_{12} \cdot \delta_{21} - \delta_{11} \cdot \delta_{22})} \right] = H \cdot \cos(\omega \cdot t) + m \cdot g$$

$$m \cdot z''(t) + \mu \cdot z'(t) - \frac{-z(t) \cdot \delta_{11} + y(t) \cdot \delta_{21}}{-\delta_{12} \cdot \delta_{21} + \delta_{11} \cdot \delta_{22}} = H \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$y(0) = 0 \quad y'(0) = 0 \quad z(0) = 0 \quad z'(0) = 0$$

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} := \text{Odesolve} \left[\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, t, 4 \right] \quad t := 0, 0.002 \dots 4$$

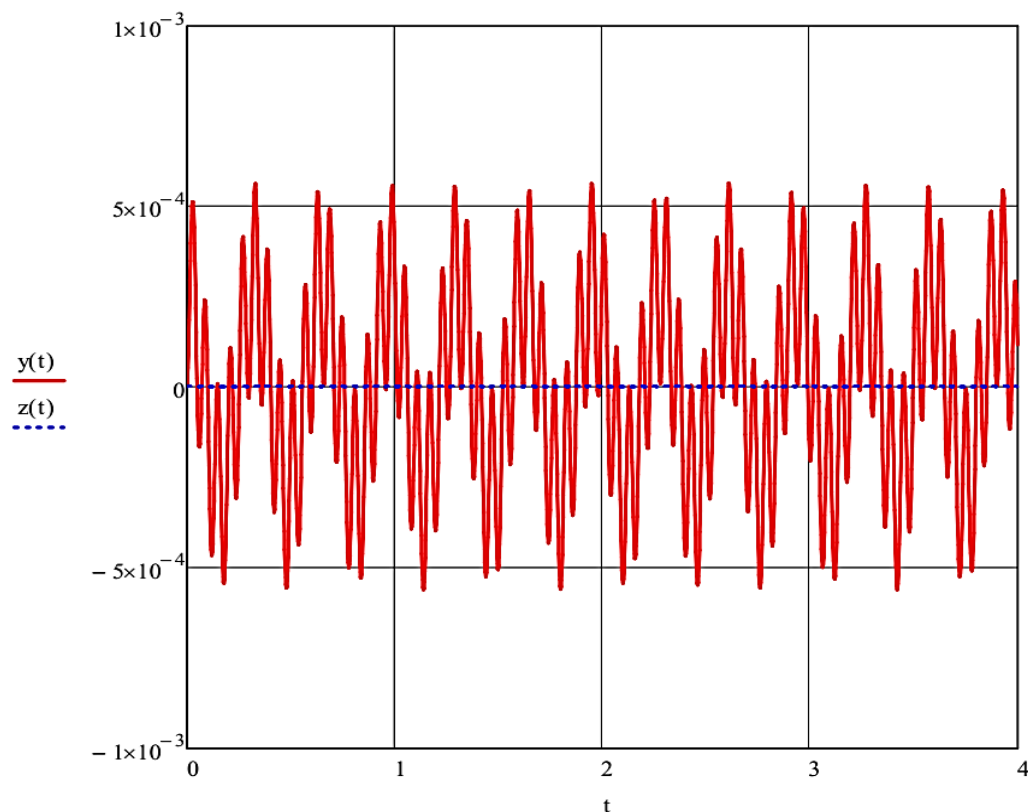
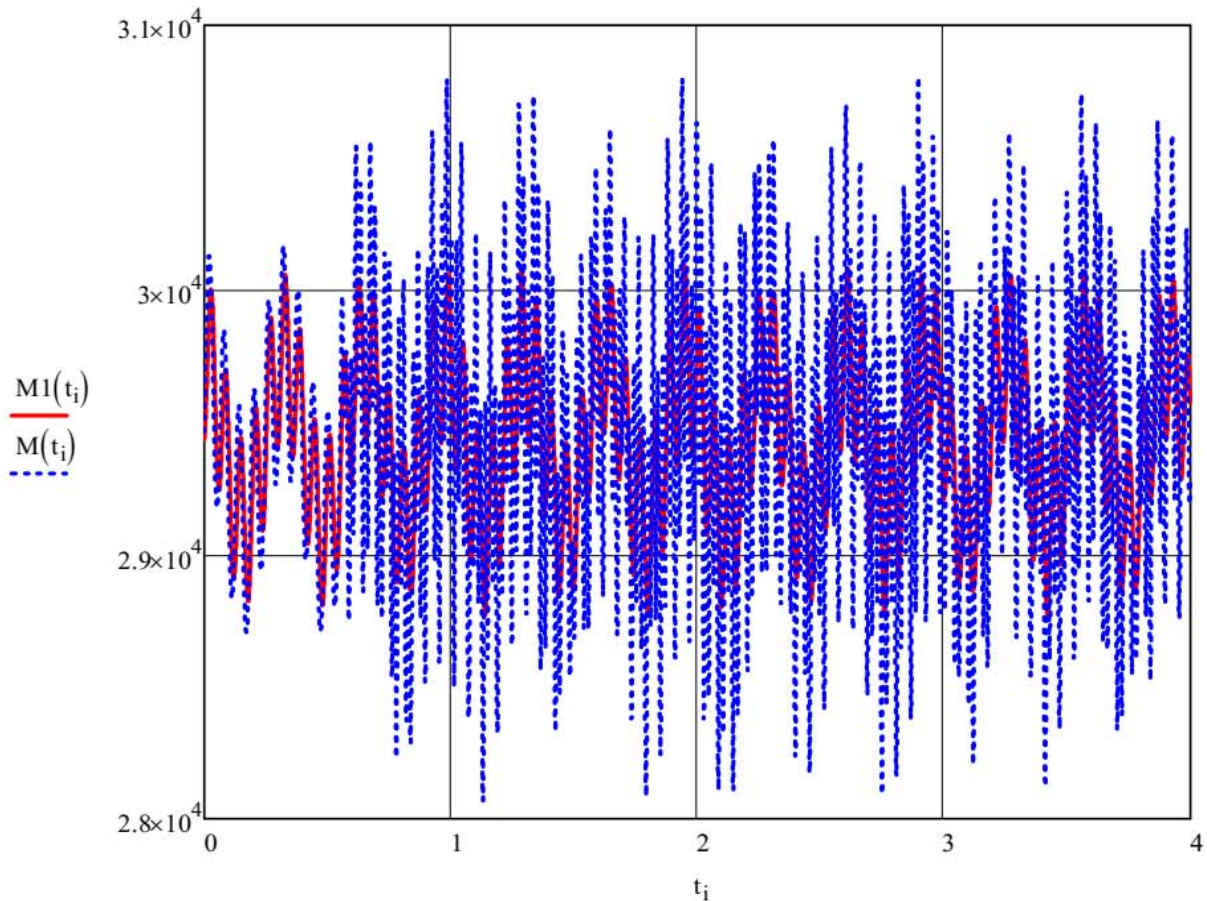


Рис. 5. Розрахунок за пропонованою методикою

$$M1(t) := \left(m \cdot g + \frac{z(t)}{\delta 21} - \frac{y(t) \cdot \delta 21 - z(t) \cdot \delta 11}{\delta 21^2 - \delta 22 \cdot \delta 11} \cdot \frac{\delta 22}{\delta 21} \right) \cdot l2 \quad M2(t) := \left(\frac{y(t) \cdot \delta 21 - z(t) \cdot \delta 11}{\delta 21^2 - \delta 22 \cdot \delta 11} \right) \cdot l1$$

$$M(t) := M1(t) + M2(t)$$

ORIGIN := 1 i := 1..4000 t_i := 0 + $\frac{i}{1000}$ MM_i := M(t_i) MM1_i := M1(t_i)



Mmax := max(MM) Mmax = 3.08 × 10⁴ σmax := $\frac{Mmax}{Wx}$ σmax = 167.416

M1max := max(MM1) M1max = 3.009 × 10⁴ σ1max := $\frac{M1max}{Wx}$ σ1max = 163.53

$$\omega R1 := \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{m \cdot (\delta 11 + \delta 22) + m \cdot \sqrt{(\delta 11 + \delta 22)^2 - 4 \cdot (\delta 11 \cdot \delta 22 - \delta 12^2)}}} \quad \omega R1 = 19.28$$

$$\omega R2 := \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{m \cdot (\delta 11 + \delta 22) - m \cdot \sqrt{(\delta 11 + \delta 22)^2 - 4 \cdot (\delta 11 \cdot \delta 22 - \delta 12^2)}}} \quad \omega R2 = 3.442 \times 10^3$$

Рис. 5. Лист 2

Як бачимо, результати обох розрахунків достатньо близькі один до одного.

Для подальшої перевірки запропонованої методики проведена серія аналогічних розрахунків для Г- подібної рами (див. рис. 1) з $l_1 = 3$ м, $l_2 = 2$ м і варіюванням значень ω в діапазоні від 3 с^{-1} до 300 с^{-1} . За результатами цих розрахунків побудовані графіки залежностей M_{\max} і σ_{\max} від ω , які експериментально підтверджують наявність у кожного з них двох резонансних піків (рис.6).

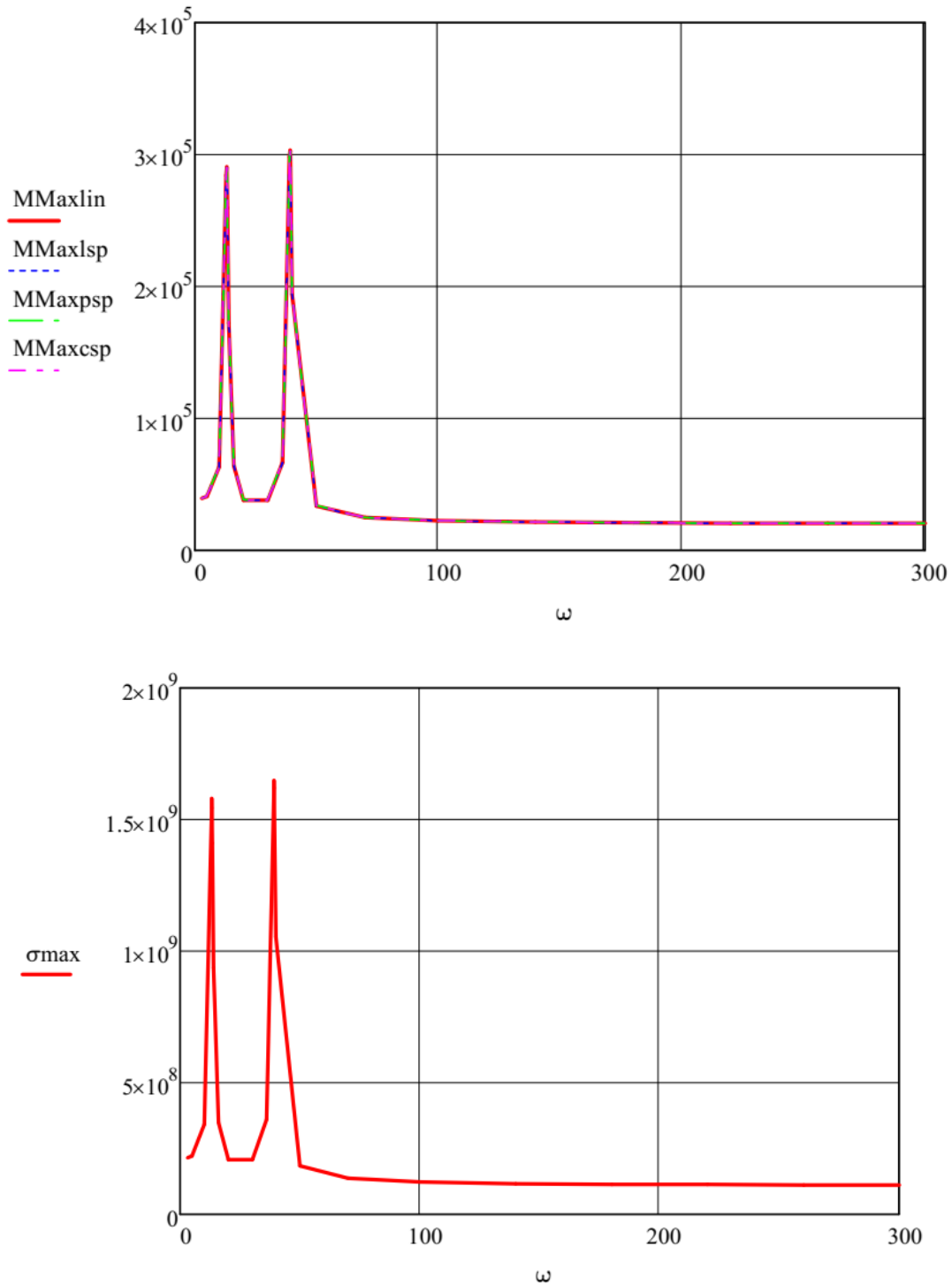


Рис. 6. Графіки залежностей $M_{\max}(\omega)$ і $\sigma_{\max}(\omega)$

Для уточнення координат їх найвищих точок додатково побудовані детальні графіки зазначених залежностей поблизу резонансних частот ω_1 і ω_2 (рис. 7, 8).

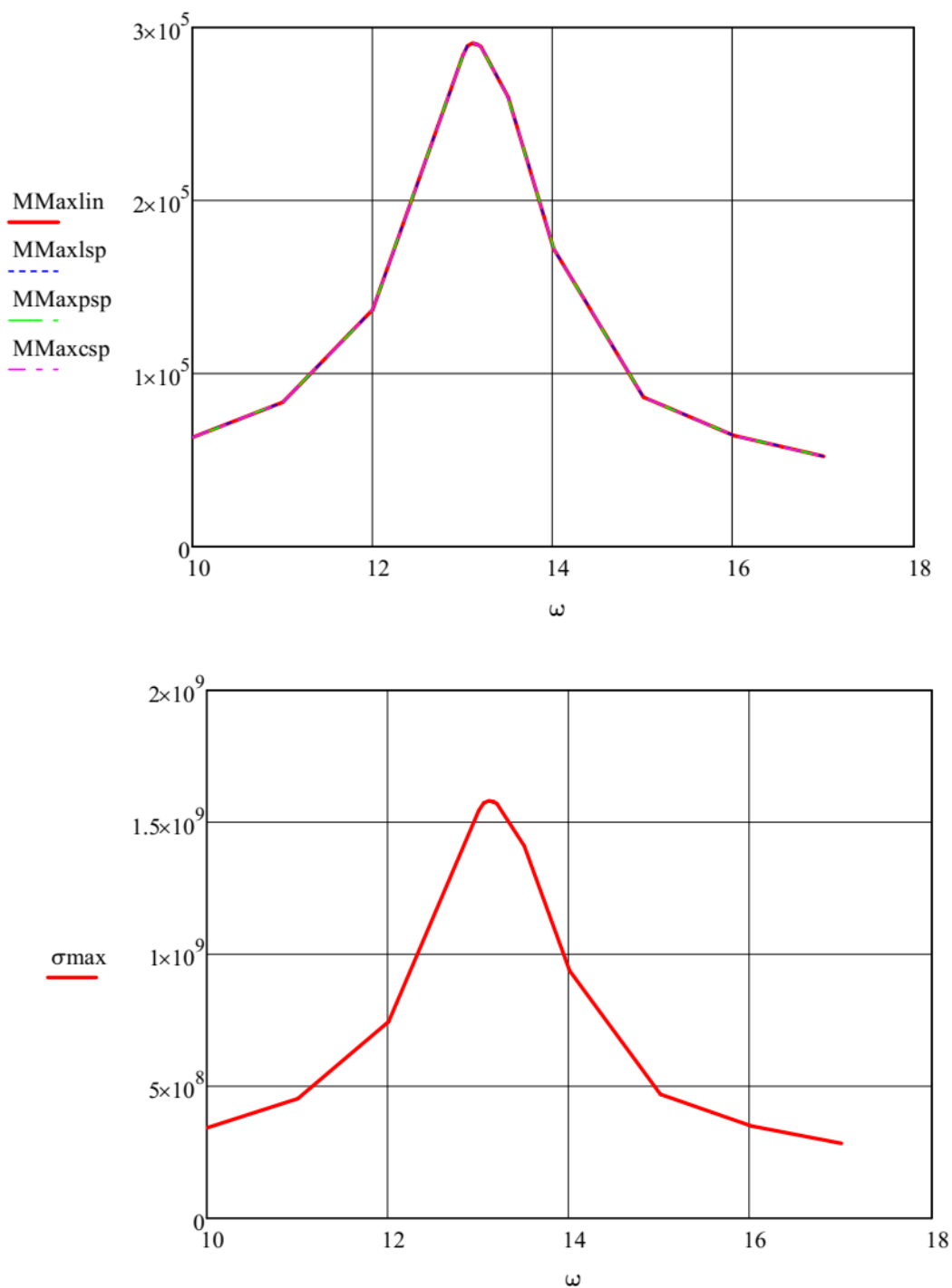


Рис. 7. Графіки $M_{\max}(\omega)$ і $\sigma_{\max}(\omega)$ поблизу першої резонансної частоти

Трасуванням цих графіків визначені експериментальні значення резонансних частот:

$$\omega'_1 = 13,115 \text{ c}^{-1}, \quad \omega'_2 = 39,168 \text{ c}^{-1}.$$

Розрахункові значення резонансних частот: $\omega_1 = 13,154 \text{ c}^{-1}$, $\omega_2 = 39,175 \text{ c}^{-1}$.

Порівняння експериментальних і розрахункових значень резонансних частот показує їх практично повну ідентичність:

$$\Delta(\omega_1) = \frac{\omega_1 - \omega'_1}{\omega_1} \cdot 100 = \frac{13,154 - 13,115}{13,154} \cdot 100 = 0,296\% ,$$

$$\Delta(\omega_2) = \frac{\omega_2 - \omega'_2}{\omega_2} \cdot 100 = \frac{39,175 - 39,168}{39,175} \cdot 100 = 0,018\% .$$

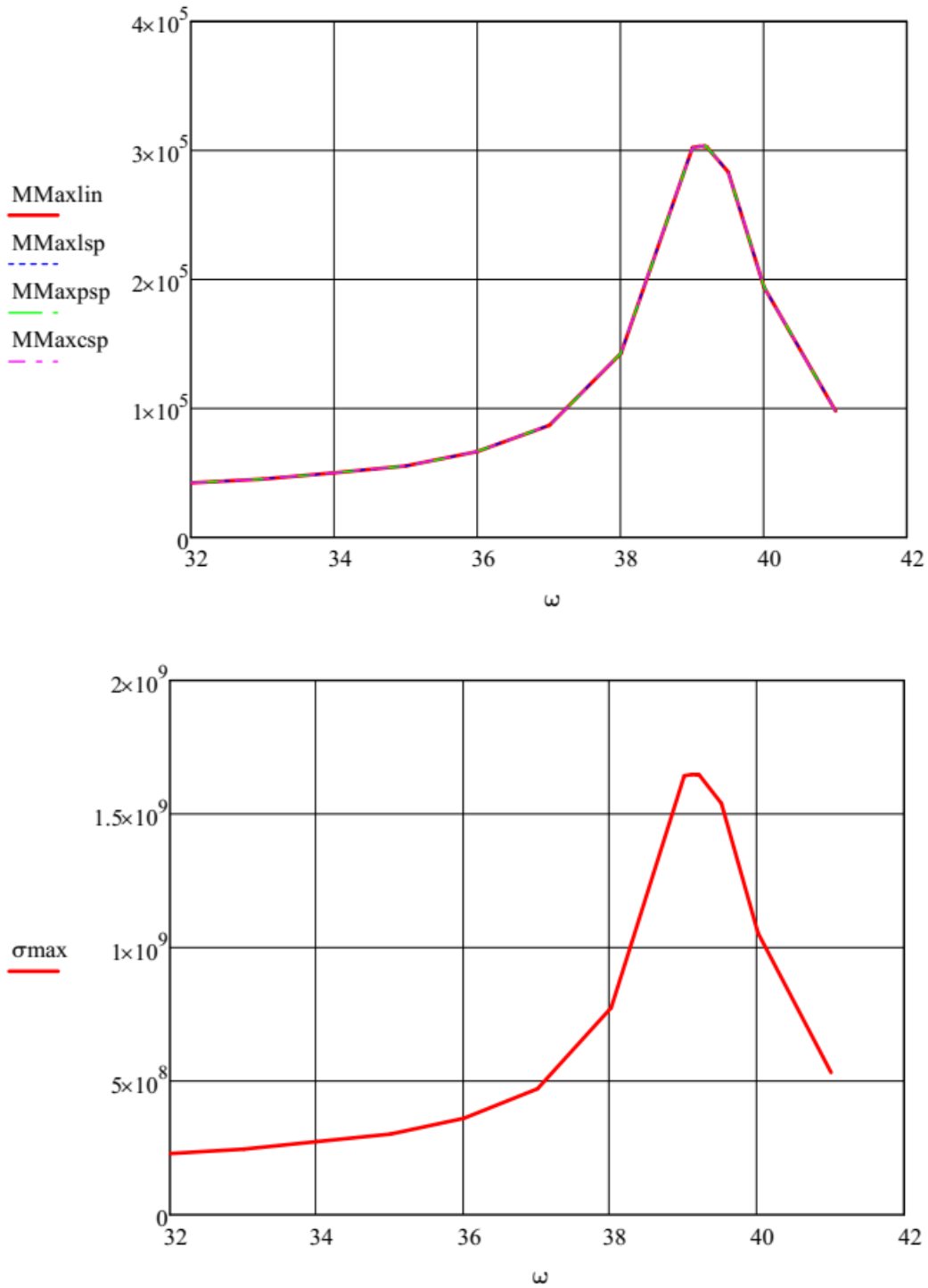


Рис. 8. Графіки $M_{\max}(\omega)$ і $\sigma_{\max}(\omega)$ поблизу другої резонансної частоти

Такий результат свідчить про прийнятність запропонованої методики розрахунку для практичних цілей, оскільки вона не тільки досить точно визначає значення ω_1 і ω_2 , але й дає надійні силові результати, що підтверджують цю точність.

На закінчення відзначимо, що можливості розробленої методики не обмежуються зазначеними типами розрахункових завдань. Для її розвитку необхідні подальші дослідження.

ВИСНОВКИ

Запропонована нова, спрощена методика силового розрахунку плоских рам в умовах вимушених коливань, яка дозволяє обчислювати величини максимальних нормальних напружень, що виникають в рамах, і визначати їх резонансні частоти.

Методика реалізована в середовищі Mathcad 15 і успішно пройшла масштабну апробацію.

Виконана розробка може бути корисна студентам і викладачам технічних ВНЗ, а також фахівцям-практикам, які виконують силові розрахунки.

Подальші дослідження в напрямку розвитку виконаної розробки будуть сприяти поглибленню існуючих теоретичних уявлень і створенню більш досконалих методів силових розрахунків і розрахункових засобів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Ковтун В. В. Опір матеріалів. Розрахункові роботи : навч. посіб. / В. В. Ковтун. – Львів : Афіша, 2002. – 280 с.
2. Ицкович Г. М. Сопротивление материалов : учеб. для сред. спец. учеб. зав. / Г. М. Ицкович. – М. : Высш. шк., 2001. – 368 с.
3. Дарков А. В. Сопротивление материалов : учеб. для техн. ВУЗов / А. В. Дарков, Г. С. Шпиро. – М. : Высш. шк., 1989. – 624 с.
4. Писаренко Г. С. Опір матеріалів: підр. для техн. ВНЗ / Г. С. Писаренко, О. Л. Квітка, Е. С. Уманський. – К. : Вища шк., 2004. – 655 с.
5. Шевченко Ф. Л. Курс опору матеріалів. Порада до вивчення теорії та розв'язання задач : навч. посіб. / Ф. Л. Шевченко. – Донецьк : ДонНТУ, 2013. – 260 с.
6. Ламси Б. Б. Сборник задач и упражнений по динамике стержневых систем : учеб. пособ. / Б. Б. Ламси и др. – Н. Новгород : ННГАСУ, 2016. – 96 с.
7. Довнар Е. П. Расчет рам на статические и динамические нагрузки: учеб. пособ. / Е. П. Довнар, Л. Б. Климова. – Минск : БНТУ, 2004. – 186 с.
8. Поляков А. А. Строительная механика : учеб. пособ. / А. А. Поляков, Ф. Г. Лялина, Р. Г. Игнатов. – Екатеринбург : УрФУ, 2014. – 424 с.
9. Гайджуrow П. П. Расчет стержневых систем на устойчивость и колебания : учеб. пособ. / П. П. Гайджуrow. – Новочеркасск : ЮРГТУ, 2009. – 195 с.
10. Кочетов В. Т. Сопротивление материалов : учеб. пособ. / В. Т. Кочетов. – Ростов-на-Дону, Феникс, 2001. – 368 с.
11. Кутовий Л. В. Збірник розрахунково-графічних завдань з курсу "Опір матеріалів" (для студентів всіх механічних спеціальностей денної форми навчання) / Л. В. Кутовий та ін. – Краматорськ : ДДМА, 2007. – 220 с.
12. Старцева Л. В. Строительная механика в примерах и задачах : учеб. пособ. / Л. В. Старцева, В. Г. Архипов, А. А. Семенов. – М. : Изд-во АСВ, 2013. – 224 с.
13. Холодняк Ю. С. Особенности прочностных расчетов стержневых конструкций, подверженных вынужденным колебаниям / Ю. С. Холодняк, А. В. Периг, И. А. Матвеев // Вісник Донбаської державної машинобудівної академії : зб. наук. праць. – Краматорськ : ДДМА, 2015. – № 1(34). – С. 96–102.
14. Макаров Е. Г. Инженерные расчеты в Mathcad 15 : учебный курс / Е. Г. Макаров. – СПб. : Питер, 2011. – 400 с.
15. Макаров Е. Г. Сопротивление материалов на базе Mathcad / Е. Г. Макаров. – СПб. : БХВ – Петербург, 2004. – 512 с.