The inspection of the current heat supply systems and substantiated the proposed closed heat system of the country-house with use of an electric induction heat generator, has been proved.

Closed heat system, heat generator, induction heating.

УДК 519.21

ДОСЛІДЖЕННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА СИСТЕМ, КОЕФІЦІЕНТИ ЯКИХ ЗБУРЕНІ ВИПАДКОВИМИ ПРОЦЕСАМИ

Ю.Б. Гнучій, доктор фізико-математичних наук
І.І. Ковтун, кандидат фізико-математичних наук

Запропоновано метод знаходження перших моментів розв'язку диференціального рівняння другого порядку та системи диференціальних рівнянь першого порядку, коефіцієнти яких збурені випадковими процесами. Досліджено стійкість розв'язку.

Диференціальне рівняння, випадковий процес, збурення, математичне сподівання, коваріаційна функція, стійкість розв'язку.

Однією із найпоширеніших математичних моделей, які описують технологічні процеси, є диференціальні рівняння та їх системи. Вони описують різні процеси, що відбуваються в механіці, електротехніці, сільському господарстві, космонавтиці тощо [2], [3].

Подібні задачі виникають при:

- вивченні параметричного збурення в електричних ланцюгах з флуктуюючими параметрами;
- вивченні впливу випадкових зовнішніх сил на механічну систему;
- збуреннях коефіцієнтів системи випадковими процесами.

Флуктуації або неупорядковані відхилення характеристик від середніх значень для різних систем свої, хоча їх природа різна. Але методи теоретичного дослідження таких систем однакові.

Враховувати випадкові складові важливо тому, що вплив випадкових сил може бути таким, що рух системи стає нестійким. Відбувається резонанс, який важко пояснити величинами параметрів, закладених при конструюванні агрегатів. Зміна параметрів не дає потрібних результатів.

Мета досліджень – визначення умов на параметри системи, при яких рух системи і після збурення параметрів залишається стійким.

Результати досліджень. Одновимірниий броунівський рух осцилятора описується рівнянням

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\mu\frac{dx}{dt}+k^2x=f(t,\omega), \tag{1}$$

де μ та k^2 — відомі параметри, а $f(t,\omega)$ — випадкова сила з відомими середнім значенням $m_f = Ef(t) = f_0(t)$ і коваріаційною функцією $q_f(t,s) = E(f(t)f(s))$.

Найпростіше параметричне збурення в електричному ланцюгу описується рівнянням

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left[k^2 + \xi(t,\omega)\right]x = 0, \tag{2}$$

де $\xi(t,\omega)$ — відомий випадковий процес, тобто відомі його середнє значення $m_\xi = E\xi(t)$ і коваріаційна функція $q_\xi(t,s) = E(\xi(t)\xi(s))$.

Узагальненням рівнянь (1) та (2) є диференціальне рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2(\mu + \xi_1(t,\omega))\frac{dx}{dt} + (k^2 + \xi_2(t,\omega))x = f(t,\omega), \tag{3}$$

яке описує збурення в механічній системі або в електричному ланцюгу. Числа μ, k — відомі сталі, $\xi_1(t,\omega)$, $\xi_2(t,\omega)$ — відомі випадкові процеси, $x_0(\omega)$, $y_0(\omega)$ — відомі випадкові величини.

Розв'язок диференціального рівняння (3) з початковими умовами

$$x(0,\omega) = x_0, \quad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = y_0 \tag{4}$$

для майже всіх $\omega \in \Omega$ (Ω — імовірнісний простір) задовольняє задане диференціальне рівняння і є функціоналом від випадкових процесів $\xi_1(t,\omega), \xi_2(t,\omega), f(t,\omega)$: $x(t,\omega) = x[t,\xi_1,\xi_2,f]$. Розв'язок можна описати моментами розв'язку: середнім значенням, коваріаційною функцією і моментами більш високих порядків.

На практиці, як правило, достатньо знати лише перші два моменти розв\`язків. Тому потрібно знайти такі моментні рівняння (рівняння для знаходження моментів), розв\`язуючи які можна знайти перші моменти розв\`язку — математичне сподівання і кореляційну, або коваріаційну, функцію.

Рівняння другого порядку (3) замінюємо відповідною системою рівнянь першого порядку:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y(t,\omega), \\ \dfrac{dy}{dt} = -2(\mu + \xi_1(t,\omega))y - (k^2 + \xi_2(t,\omega))x + f(t,\omega). \end{cases}$$

Для отримання звичайного диференціального рівняння для знаходження середнього розв'язку $m = Ex(t)$ осереднюємо рівняння системи:

$$\begin{cases} \dfrac{dEx(t)}{dt} = Ey(t), \\ \dfrac{dEy(t)}{dt} = -2\mu Ey(t) - 2E(\xi_1(t)y(t)) - k^2 Ex(t) - E(\xi_2(t)x(t)) + Ef(t). \end{cases}$$

Ці рівняння, крім шуканого середнього розв’язку $m = Ex(t)$, містять середні від добутків двох функціоналів: $E(\xi_1(t)y(t)), \quad E(\xi_2(t)x(t))$. Потрібно «розщепити» ці добутки — виділити із них $m = Ex(t)$. Використовуючи варіаційні похідні, формулу для середнього значення від добутку функціонала і функції від цього функціонала — формулу Новікова-Фурутцу [6], [7]:

$$< x(t,\cdot)\xi(t,\cdot) >= \int_0^t R(t)\delta(t-s)\left\langle \frac{\delta x(t,\cdot)}{\delta\xi(s,\cdot)} \right\rangle ds, \tag{5}$$

умову причинності [2]:

$$\frac{\delta x(z,\omega)}{\delta\xi_2(s,\omega)} = 0, \ \frac{\delta y(z,\omega)}{\delta\xi_1(s,\omega)} = 0 \text{ при } s > z, \tag{6}$$

отримаємо систему рівнянь для знаходження середнього розв’язку $m = Ex(t)$, яка містить і звичайні, і варіаційні похідні [1].

Залежно від умов на випадкові процеси $\xi_1(t,\omega), \quad \xi_2(t,\omega), \quad f(t,\omega)$ отримано замкнені звичайні диференціальні рівняння для знаходження середнього розв’язку $m = Ex(t)$ [1].

I. Нехай процеси $\xi_1(t,\omega), \quad \xi_2(t,\omega), \quad f(t,\omega)$ — дельта–корельовані гаусівські процеси, середні значення яких відповідно дорівнюють:

$$E\xi_1(t) = 0, \quad E\xi_2(t) = 0, \quad Ef(t) = f_0(t),$$

а коваріаційні функції — це

$$q_{\xi_1}(t,s) = R_1(t)\delta(t-s), \quad q_{\xi_2}(t,s) = R_2(t)\delta(t-s), \quad q_f(t,s) = R_f(t)\delta(t-s),$$

де $R_1(t), \quad R_2(t), \quad R_f(t)$ — інтенсивності випадкових процесів. Тоді для знаходження середнього значення розв’язку $m = Ex(t)$ маємо звичайне диференціальне рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами:

$$\frac{d^2m}{dt^2} + 2(\mu - 2R_1(t))\frac{dm}{dt} + k^2 m = f_0(t), \tag{7}$$

з початковими умовами, які отримали осереднюючи умови (4):

$$m(0) = x_0, \quad \frac{dm}{dt} = y_0.$$

Для знаходження коваріаційної функції розв’язку $q(s,t) = E(x(t)x(s))$ маємо рівняння другого порядку, яке аналогічне рівнянню (7). Початкові умови для нього знаходяться із рівняння третього порядку, яке описує дисперсію [1].

II. Нехай процес $\xi_2(t,\omega)$ у рівнянні (3) є:

- неперервним процесом;
- його середнє значення дорівнює нулю;
- похідна $\xi_2'(t,\omega)$ по t процесу $\xi_2(t,\omega)$ є дельта-корельованим процесом, кореляційна функція якого має вигляд $E(\xi_2'(t)\xi_2'(s)) = c(s)\delta(t-s)$;

- для кореляційної функції $K(t,s)$ процесу $\xi_2(t,s)$ виконується умова $\frac{\partial^2 K}{\partial t \partial s} = \frac{\partial^2 K}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 K}{\partial s^2}$.

Зокрема таким процесом є вінеровський процес [5].

У цьому випадку також отримано замкнене звичайне диференціальне рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами.

III. Динамичні процеси досить часто описуються системами диференціальних рівнянь із коефіцієнтами, збуреними випадковими процесами [4]:

$$\frac{dx}{dt} = \big(A(t) + \xi(t,\omega)\big)x(t,\omega) + f(t,\omega), \quad x(0,\omega) = 0. \tag{8}$$

Розв'язок $x(t,\omega) = F[t, \xi(t,\omega), f(t,\omega)]$ системи (8) розуміємо як розв'язок системи інтегральних рівнянь (похідна від процесу $x(t,\omega)$ може не існувати): $x(t,\omega) = x_0 + \int_0^t (A(s) + \xi(s,\omega))x(s,\omega)ds + \int_0^t f(s,\omega)ds$.

Нехай $A(t)$ — матриця, коефіцієнти якої функції a_{ij} $(i, j = 1,2,..,n)$, абсолютно інтегровні з квадратом, $\xi(\omega,t)$ — матриця-стовпець, коефіцієнти якої задані випадкові процеси $\xi_j(t,\omega)$. Процеси $\xi(\omega,t)$ та $f(t,\omega)$ незалежні. Взаємна кореляційна матриця-функція задовольняє умову:

$$K_{\xi f}(t,s) = K_{\xi}(t,s)K_f(t,s).$$

Зокрема, якщо процеси $\xi_j(t,\omega)$ — гаусові із середніми, що дорівнюють нулю, і кореляційною матрицею K, то для визначення середнього значення розв'язку $m(t)$ маємо звичайне матричне рівняння:

$$\frac{dm}{dt} = (A(t) + K \cdot t)m(t) + Ef(t).$$

Для коваріаційної функції $q(s,t) = E(x(t)x(s))$ маємо рівняння в частинних похідних:

$$\frac{\partial q(t,s)}{\partial t} + \frac{\partial q(t,s)}{\partial s} = [A(t) + K(t+s)]q(t,s) + q(t,s)[A(t) + K(t+s)] +$$
$$+ \int_0^t K_f(t,s)ds \cdot K \cdot m(t) + m(s)\int_0^s K_f(t,s)dt \cdot K.$$

IV. Розглянемо питання стійкості розв'язку**.** Збурення випадковим процесом $\xi_1(t,\omega)$ може зробити нестійким середнє значення розв'язку рівняння.

Розв'язок збуреного рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (\mu + \xi_1(t,\omega))\frac{dx}{dt} + (k^2 + \xi_2(t,\omega))x = 0$$

залишається стійким за ймовірністю, якщо виконуються такі умови:

- розв’язок незбуреного рівняння $\frac{d^2x}{dt^2}+\mu\frac{dx}{dt}+k^2x=0$ — стійкий

;

- інтенсивність $R_1(t)=R_1$ випадкового процесу $\xi_1(t,\omega)$ є сталою величиною;
- виконується умова: $\mu+R_1<2k$.

Отже, можна вибрати такий параметр k, що розв’язки диференціальних рівнянь для середнього і коваріаційної функції залишаються стійкими при збуренні відомим випадковим процесом $\xi_1(t,\omega)$. На стійкість середнього значення розв'язку рівняння (3) збурення частоти гаусівським випадковим процесом $\xi_2(t,\omega)$ не впливає.

Якщо в системі диференціальних рівнянь (8) у матриці $\xi(t,\omega)=\left\|\xi_{ij}\right\|_1^n$ випадкові процеси $\xi_{ij}(t,\omega)$ $(i,j=1,...,n)$ дельта-корельовані з кореляційними функціями $K_{ij}(t,s)=B_{ij}(t)\delta(t-s)$, то стійкість розв’язку незбуреної системи $\frac{dx}{dt}=A(t)x(t,\omega)+f(t,\omega)$ зберігається (розв’язок $x(t,\omega)$ стійкий за ймовірністю), якщо виконується умова: $\int B_{ij}(\tau)d\tau<\infty$.

Висновки

Отримано замкнені диференціальні рівняння для знаходження математичного сподівання та кореляційної функції розв’язків у випадках, коли випадкові процеси є дельта–корельованими гаусівськими процесами, або деякими неперервними процесами. Наведено умови, яким мають задовольняти випадкові процеси, що збурюють коефіцієнти диференціального рівняння другого порядку та системи рівнянь першого порядку, при яких диференціальні рівняння для знаходження перших двох моментів розв’язків є замкненими звичайними диференціальними рівняннями. Наведено також умови на випадкові процеси, при виконанні яких розв’язки збуреного диференціального рівняння другого порядку і систем диференціальних рівнянь першого порядку залишаються стійкими.

Список літератури

1. Гнучій Ю.Б. Диференціальні рівняння та їх системи із коефіцієнтами, збуреними випадковими процесами / Ю.Б. Гнучій, І.І. Ковтун – К.: Друк «Центр IT», 2010. – 103 с.
2. Кляцкин В.И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах / В.И.Кляцкин – М.: Наука, 1980. – 336 с.
3. Ковтун И.И. Флуктуации вынужденных колебаний в среде с сопротивлением /И.И.Ковтун //Укр. матем. журнал. – 1993. – Т. 45, № 1. – С. 921–926.
4. Ковтун І.І. Моментні рівняння для систем диференціальних рівнянь, збурених негаусовими випадковими процесами/ І.І.Ковтун // Вісник Київ. ун–ту ім. Т.Г.Шевченка. Серія: Фізико-матем. науки. – 2002. – Вип. № 4. – С. 186–191.

5. Ковтун И.И.. О нахождении моментов решений систем дифференциальных уравнений со случайными возмущениями /И.И..Ковтун // Сб. науч. тр-в «Математика. Компьютер. Образование». Москва-Ижевск: Dynamics, 2007. – Вып. 14, ч.2. – С. 12–15.

6. Новиков Е.А. Функционалы и метод случайных сил в теории турбулентности/ Е.А.Новиков// Журнал экспериментальной и прикладной физики. – 1964. – Т. 47, № 5. – С. 1919–1926.

7. Furutsu K. Stftistical theory of wafe propagation in a Random Medium and Irradianse Distribution Function / K.Furutsu //JOSA, 1972. – 62. – 240 p.

Предложен метод определения первых моментов решения дифференциального уравнения второго порядка и системи дифференциальных уравнений первого порядка, коэффициенты которых возмущены случайными процессами. Исследована устойчивость решения.

Дифференциальное уравнение, первые моменты решения, случайный процесс, устойчивость решения.

We propose the method of finding the first moments of the solution for the second order of the differential equations and a system of a first order of the differential equations with random perturbations. We get the conditions under which the solution is stable.

Differential equation, first moments, random perturbations, stable the solution.

УДК 517.958

ФУНДАМЕНТАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДИНАМІКИ В'ЯЗКОПРУЖНОГО СЕРЕДОВИЩА, ЯКЕ ХАРАКТЕРИЗУЄТЬСЯ МОДЕЛЛЮ РАБОТНОВА

О.М. Нещадим, кандидат фізико-математичних наук
Ю.Б. Гнучій, доктор фізико-математичних наук

Для випадку плоских деформацій знайдено наближений фундаментальний розв'язок інтегро-диференціального рівняння динаміки в'язкопружного середовища, властивості якого узгоджуються з реологічною моделлю Работнова. Компоненти фундаментального розв'язку виражено через дві скалярні функції, розкладено на потенціальну і соленоїдну складові.

В'язкопружність, інтегро-диференціальне рівняння, ядро релаксації, модель Работнова, фундаментальний розв'язок.

При розв'язуванні прикладних задач математичної фізики числовими методами успішно застосовується метод граничних інтегральних рів-