

РУХ ЧАСТИНОК МІНЕРАЛЬНИХ ДОБРИВ ПО ПОВЕРХНІ ТУКОНАПРЯМНИКА У ВИГЛЯДІ ЕЛІПТИЧНОГО ЦИЛІНДРА

*О.П. Деркач, кандидат історичних наук
О.В. Несвідоміна, студентка*

Наведено траєкторно-кінематичні характеристики руху частинок мінеральних добрив по нерухомій шорсткій внутрішній поверхні похилого еліптичного циліндра.

Рух частинки, шорстка поверхня, еліптичний циліндр, система диференціальних рівнянь, траєкторія, швидкість.

Постановка проблеми. Частинки мінеральних добрив з ємності бункера до дискового розсіювача проходять через певний ряд направляючих пристроїв (рис. 1). Одним із них є туконапрямник, основне призначення якого є подача певної кількості мінеральних добрив в задане місце дискового розсіювача.

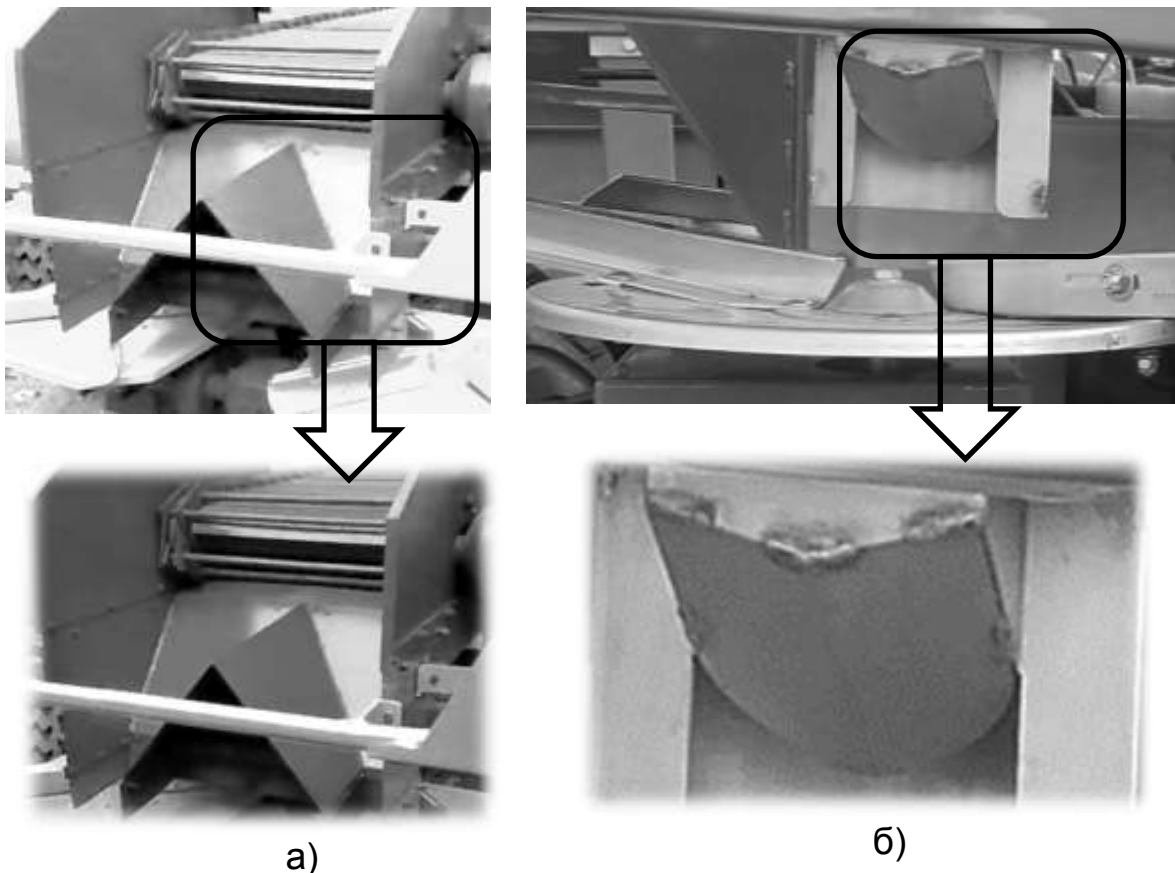


Рис. 1. Види туконапрямників мінеральних добрив.

У вітчизняній машині МРД туконапрямник складається із декількох похилих площини (рис. 1,а). У зарубіжних машинах для внесення мінеральних добрив використовуються туконапрямники циліндричної форми (рис. 1,б). Розуміння закономірностей руху частинки по різних шорстких поверхнях дозволить цілеспрямовано провести розрахунок конструктивних параметрів певних форм туконапрямників мінеральних добрив.

Дослідження траєкторно-кінематичних характеристик руху частинки приводить до необхідності формування системи диференціальних рівнянь 2-го порядку та її наближеного розв'язку, що є дуже трудомісткими процесами і без застосування сучасних пакетів символічної алгебри здійснити практично не можливо.

Аналіз останніх досліджень. Дослідженню руху частинок по шорстких поверхнях присвячена робота акад. Василенко П.М. [3]. Теорія відцентрових робочих органів машин для внесення мінеральних добрив розкрита в праці акад. Адамчука В.В. [1]. Розробку програмних додатків в області імітаційного моделювання взаємодії «шорстка поверхня – рухома частинка» здійснимо в середовищі символічної алгебри Maple [2].

Мета досліджень. Розробити для середовища символічної алгебри Maple [1] комп'ютерну модель руху частинки по шорсткій поверхні еліптичного циліндра та за допомогою обчислювальних експериментів з'ясувати її траєкторно-кінематичні властивості в залежності: 1) кута α_0 напрямку кидання частинки; 2) коефіцієнта зовнішнього тертя f ; 3) початкової швидкості V_0 ; 4) її початкового положення $[u_0, v_0]$ в момент її руху.

Результати досліджень. Запишемо параметричне рівняння похилого еліптичного циліндра в декартовій системі координат $Oxyz$ у наступному вигляді:

$R(u, v) = R[a \cos(u), b \sin(u) \cos(\xi) - v \sin(\xi), b \sin(u) \sin(\xi) + v \cos(\xi)],$ (1)
де a, b – величини півосей напрямного еліпса $[a \cos(u), b \sin(u), 0]$ в площині Oxy системи координат $Oxyz$; ξ – кут повороту вертикального циліндра навколо осі Ox ; u, v – криволінійні координати поверхні.

Якщо частинку кинути на внутрішню поверхню похилого еліптичного циліндра, то під дією сили тяжіння вона буде рухатися по певній траєкторії. В проєкціях на осі супровідного тригранника $OuvN$ закону руху частинки матиме наступний вигляд:

$$\begin{cases} Ou := m W \cos(\widehat{\bar{R}_u, \bar{w}}) = F_g \cos(\widehat{\bar{R}_u, \bar{G}}) - f F_N \cos(\widehat{\bar{R}_u, \bar{\tau}}) \\ Ov := m W \cos(\widehat{\bar{R}_v, \bar{w}}) = F_g \cos(\widehat{\bar{R}_v, \bar{G}}) - f F_N \cos(\widehat{\bar{R}_v, \bar{\tau}}), \\ ON := 0 = F_g \cos(\widehat{\bar{G}, \bar{N}}) \pm F_c \cos(\widehat{\bar{n}, \bar{N}}) \end{cases} \quad (2)$$

де $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ – константа прискорення вільного падіння тіла; $\mathbf{G} = [0, 0, -1]$ – напрямок сили тяжіння $F_g = mg$ в системі $Oxyz$; $F_N = F_g \cos(\widehat{\mathbf{N}, \mathbf{G}}) \pm F_C \cos(\widehat{\mathbf{N}, \mathbf{n}})$ – сила нормальної реакції; $F_g = mg$ і $F_C = m V^2 k$ – сила тяжіння та відцентрова сила; \mathbf{w} – вектор прискорення частинки; k – кривина траєкторії \mathbf{r} частинки, м^{-1} ; V – швидкість частинки, м/с ; \mathbf{N} – нормаль до поверхні $\mathbf{R}(u, v)$ в точках траєкторії \mathbf{r} ; \mathbf{n} – головна нормаль траєкторії \mathbf{r} частинки на поверхні; $\boldsymbol{\tau}$ – вектор дотичної траєкторії \mathbf{r} ; $\mathbf{P} = \mathbf{N} \times \boldsymbol{\tau}$ – вектор Дарбу тригранника $O\boldsymbol{\tau}PN$; f – коефіцієнт зовнішнього тертя.

Якщо до параметричного рівняння uv -координатної сітки еліптичного циліндра (1) підставити вирази $u = u(t)$ і $v = v(t)$ шуканої траєкторії у внутрішніх u, v -координатах, то одержимо траєкторію частинки $\mathbf{r}(t)$ у системі декартових координат $Oxyz$ у наступному вигляді:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}[a \cos(u(t)), b \sin(u(t)) \cos(\xi) - v(t) \sin(\xi), b \sin(u(t)) \sin(\xi) + v(t) \cos(\xi)] \quad (3)$$

За рівняннями (1) і (3) визначаються всі геометро-кінематичні складові виразу (2), наприклад, швидкість $V(t)$ частинки та сила $F_N(t)$ нормальної реакції:

$$V(t) = \sqrt{\left((b^2 - a^2) \cos(u(t))^2 + a^2\right) \left(\frac{d}{dt} u(t)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt} v(t)\right)^2}, \quad (4)$$

$$F_N(t) \equiv ON = \frac{am \left(b \left(\frac{d}{dt} u(t)\right)^2 - g \sin(u(t)) \sin(\xi) \right)}{\sqrt{\left((b^2 - a^2) \cos(u(t))^2 + a^2\right) \left(\frac{d}{dt} u(t)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt} v(t)\right)^2}}. \quad (5)$$

Розроблене програмне забезпечення в системі символічної алгебри Maple дозволяє всю послідовність досить громіздких аналітичних викладок здійснити автоматично. Одержимо наступну систему диференціальних рівнянь закону руху частинки по шорсткій внутрішній поверхні похилого еліптичного циліндра:

$$\left\{ \begin{array}{l} Ou := - \frac{m \left(((a^2 - b^2) \cos(u(t))^2 - a^2) \frac{d^2}{dt^2} u(t) - \cos(u(t)) \sin(u(t)) \left(\frac{d}{dt} u(t)\right)^2 (a^2 - b^2) \right)}{\sqrt{(b^2 - a^2) \cos(u(t))^2 + a^2}} = \\ - \frac{mg \sin(\xi) \cos(u(t)) b}{v(t) \sqrt{(b^2 - a^2) \cos(u(t))^2 + a^2}} + \frac{f m \frac{d}{dt} u(t) \left(-b \left(\frac{d}{dt} u(t)\right)^2 + g \sin(u(t)) \sin(\xi) \right)}{v(t) \sqrt{v(t) \left(\frac{d}{dt} u(t)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt} v(t)\right)^2}} \\ Ov := m \frac{d^2}{dt^2} v(t) = -mg \cos(\xi) - \frac{f am \left(\left(\frac{d}{dt} u(t)\right)^2 b - \sin(u(t)) \sin(\xi) g \right) \frac{d}{dt} v(t)}{v(t) \sqrt{v(t) \left(\frac{d}{dt} u(t)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt} v(t)\right)^2}} \end{array} \right. \quad (6)$$

Початковими умовами для знаходження шуканих залежностей $u(t)$ і $v(t)$ із одержаної системи (6) диференціальних рівнянь є:

$$0i := \frac{d}{dt} u(t_0) = \frac{V_0 \sin(\alpha_0)}{\sqrt{(b^2 - a^2) \cos^2(u(t)) + a^2}}, u(t_0) = u_0, \frac{d}{dt} v(t_0) = V_0 \cos(\alpha_0), v(t_0) = v_0. \quad (7)$$

Розв'язати систему диференціальних рівнянь (6-7) можливо тільки наближено, наприклад, за методом Рунге-Кутта [2]. Підстановка знайдених залежностей $u(t)$ і $v(t)$ у дискретному вигляді до рівнянь (3)-(5) дозволяє унаочнити траєкторію $r(t)$ частинки по поверхні еліптичного циліндра, її швидкість $V(t)$ та силу $F_N(t)$ нормальної реакції.

Спершу проведемо тестовий експеримент – дослідимо рух частинки по шорсткій поверхні горизонтального еліптичного циліндра ($\xi = 90^\circ$). На рис. 2 побудовано траєкторії $r(t)$, графіки швидкості $V(t)$ та сили нормальної реакції $F_N(t)$ частинки по поверхні в залежності кута кидання $\alpha_0 = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ за наступними вихідними умовами: параметрами форми $a = 1.2, b = 0.6$, початкової швидкості $V_0 = 4 \text{ м/с}$ і коефіцієнта зовнішнього тертя $f = 0.3$. За графіком (рис. 2,б) швидкості $V(t)$ можна стверджувати, що всі частинки через різний час t зупиняться. Причому, найшвидше зупиниться та частинка, яка кинута вздовж прямолінійної твірної циліндра. В момент зупинки частинки, її нормальна реакція $F_N(t)$ наближається до величини mg (рис. 2,в).

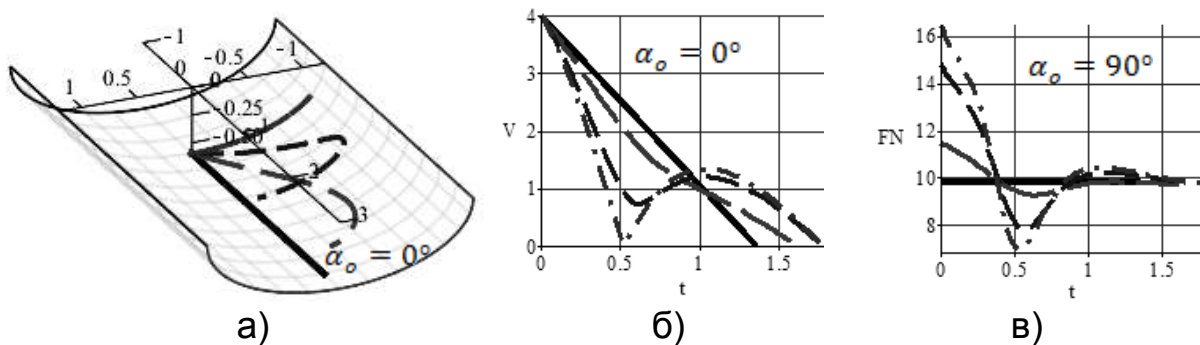


Рис. 2. Траєкторії $r(t)$, графіки швидкостей $V(t)$ та сили реакції $F_N(t)$ в залежності кута кидання α_0 частинки по горизонтальному циліндру.

У відповідності до агротехнологічних вимог внесення мінеральних добрив, рельєф поля повинен мати схил не більше 8° [1]. А тому, кут нахилу ξ прямолінійних твірних еліптичного циліндра до горизонтальної площини повинен бути більший за величину:

$$\xi = 90^\circ + \text{atan}(f) + 8^\circ. \quad (8)$$

Для значення коефіцієнта f зовнішнього тертя частинки мінеральних добрив по шорсткій поверхні, наприклад, $f = 0.3$, матимемо $\text{atan}(f) \approx 17^\circ$. Нехай значення кута ξ нахилу еліптичного

циліндра дорівнює $\xi = 115^\circ$. На рис. 3 побудовано траєкторії $r(t)$, графіки швидкості $V(t)$ та сили нормальної реакції $F_N(t)$ частинки в залежності кута α_o її кидання. За побудованими графіками швидкостей $V(t)$ можна бачити, що всі частинки ніколи не зупиняться на поверхні еліптичного циліндра. Частинка кинута перпендикулярно до напрямку нахилу прямолінійних твірних циліндра, спершу різко зменшує швидкість, але згодом її набуває. При цьому, величина нормальної реакції $F_N(t)$ зменшується, проте потім наближається до певної величини ≈ 8.9 . Бачимо, що частинка при цих вихідних умовах не відірветься від поверхні, оскільки вздовж всієї траєкторії величина нормальної реакції $F_N(t) > 0$. Швидкість $V(t)$ кинutoї частинки вздовж нахилу еліптичного циліндра збільшується прямопропорційно. Побудовані траєкторії $r(t)$ показують, що з часом всі частинки будуть наближатися до прямолінійної траєкторії, яка збігається з найнижчою прямолінійною твірною еліптичного циліндра.

На характер руху частинки суттєво впливає початкове її положення u_o, v_o на поверхні, початкова швидкість V_o та коефіцієнт тертя f . На рис. 3,а побудовано траєкторії $r(t)$ та графіки швидкостей $V(t)$ частинки в залежності початкового положення $u_o = \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \pi$. Бачимо, що всі частинки кинуті з різних місць будуть збиратися в певній області, але їх швидкості будуть різними.

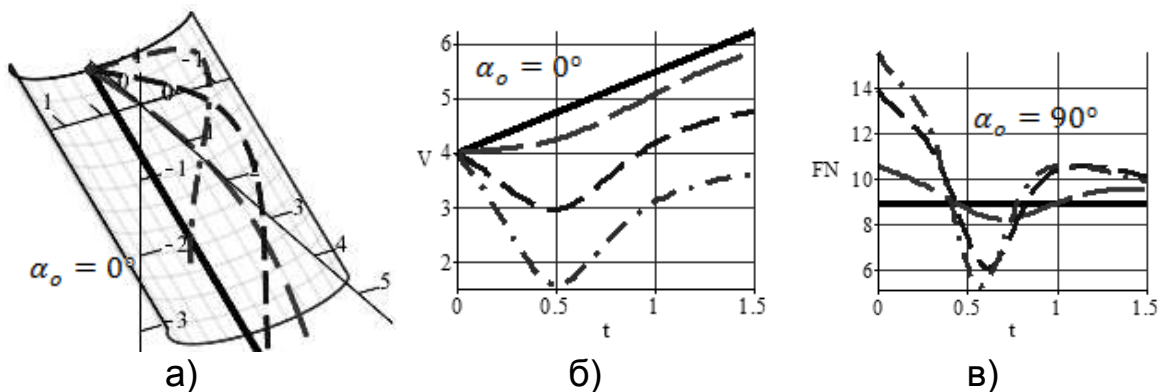


Рис. 3. Траєкторії $r(t)$, графіки швидкостей $V(t)$ та сили нормальної реакції $F_N(t)$ в залежності кута кидання α_o частинки по похилому циліндру.

Якщо зменшити величину початкової швидкості частинки з $V_o = 4 \text{ м/с}$ до значення $V_o = 2 \text{ м/с}$, то характер її руху зміниться пропорційно (рис. 4,б).

Збільшення коефіцієнта тертя f частинки приводить до того, що вона повільніше буде рухатися по поверхні і швидше буде наближатися до найнижчої прямолінійної твірної еліптичного циліндра (рис. 4,в).

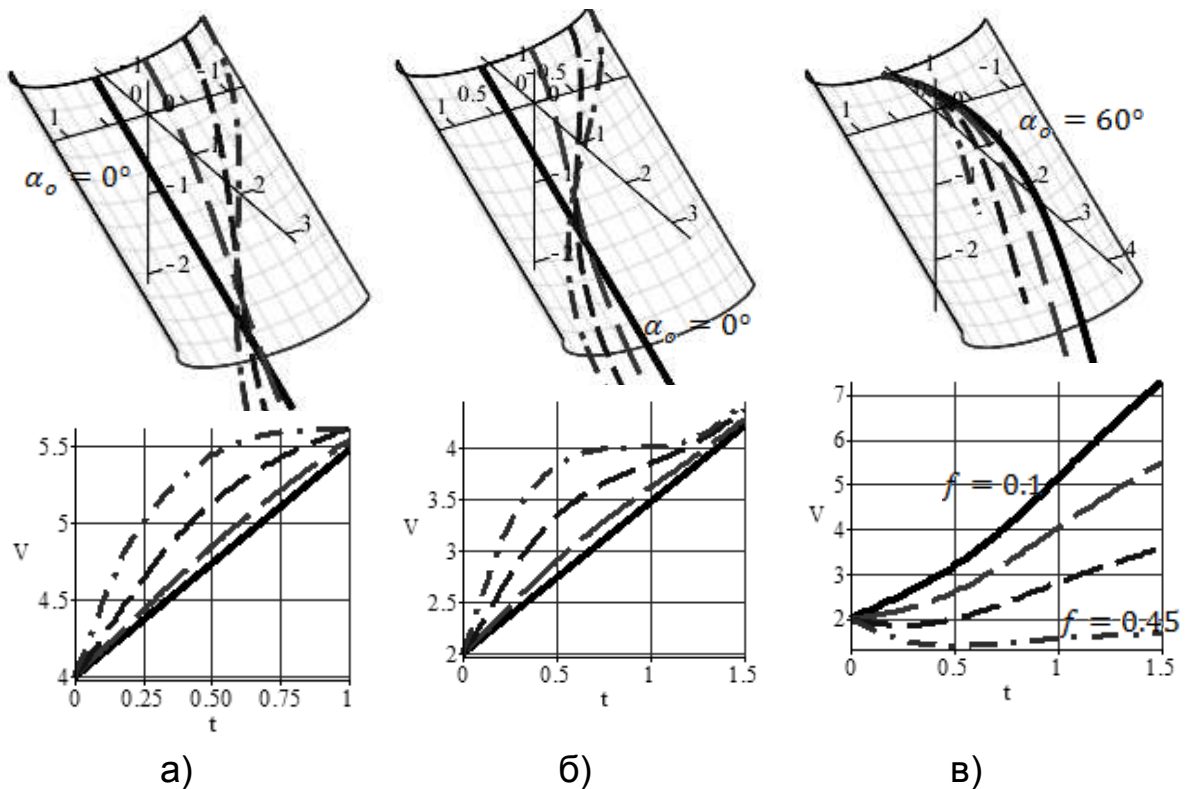


Рис. 4. Траекторії $r(t)$ та графіки швидкостей $V(t)$ частинки за умовами: а) $f = 0.3$, $V_0 = 4\text{м/с}$; б) $f = 0.3$, $V_0 = 2\text{м/с}$; в) $f = 0.01, 0.15, 0.3, 0.45$, $\alpha_0 = 60^\circ$.

Висновок. Проведене дослідження руху частинки по шорсткій внутрішній поверхні еліптичного циліндра дозволяє встановити досить складні взаємозв'язки між вихідними умовами кидання частинки по циліндру та її траекторно-кінематичними характеристиками. Зокрема, кинуті частинки з різних місць на еліптичному циліндрі будуть проходити через певну зону на поверхні з різною швидкістю та напрямом.

Список літератури

1. Адамчук В.В. Теория центробежных рабочих органов машин для внесения минеральных удобрений / В.В. Адамчук. – К.: Аграрна наука, 2010. – 178 с.
2. Аладьев В.З. Программирование и разработка приложений в Maple / В.З. Аладьев, В.К. Бойко, Е.А. Ровба. – Гродно: ГрГУ, 2007. – 458 с.
3. Василенко П.М. Теория движения частицы по шероховатым поверхностям сельскохозяйственных машин / П.М. Василенко. – К.: УАСХН, 1960. – 283 с.

Исследовано траекторно-кинематические характеристики движения частички минеральных удобрений по шероховатой внутренней поверхности наклонного эллиптического цилиндра.

Движение частички, шероховатая поверхность, эллиптический цилиндр, траектория, скорость.

It is investigated trajectory-kinematic characteristics of movement of part of mineral fertilizers on rough internal surface of inclined elliptic cylinder.

Movement of particles, surface roughness, elliptic cylinder, trajectory, speed.

УДК 62-187.3

АНАЛІЗ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ДИНАМІКИ ПІДЙОМУ ВАНТАЖУ ПРОЛЬОТНИМ КРАНОМ

***В.С. Ловейкін, доктор технічних наук
В.А. Голдун, магістр***

В статті побудовано динамічну модель механізму підйому вантажу, яка представлена у вигляді зосереджених мас, що з'єднані пружними зв'язками. На основі динамічної моделі виконано математичне моделювання динаміки підйому вантажу, яке виконується прольотним краном. Математична модель є багатоступенною, в якій кожен етап описується системою диференціальних рівнянь. Крім того, записані початкові та кінцеві умови руху окремих мас. Проведено аналіз математичної моделі, який показав те, що етап натягу канату та підйому вантажу не дозволяє забезпечити задані наперед кінцеві умови руху приведених мас моста та вантажу.

Підйом вантажу, математичне моделювання, диференціальні рівняння, задача Коші.

Постановка проблеми. Під час виконання навантажувально-розвантажувальних робіт на транспортні засоби досить часто використовуються вантажопідйомні крани. Вони дозволяють підвищити ефективність транспортних потоків на підприємстві.

При взаємодії вантажу та транспортного засобу в підвісці останнього виникають значні навантаження. Вони можуть призвести до поломки елементів транспортного засобу. Крім того, елементи крана (вантажний канат, крановий міст, передачі у механізмі підйому вантажу) також зазнають впливу динамічних навантажень. Тому виникає необхідність встановити причини виникнення динамічних навантажень у транспортному засобі та крані для того, щоб зменшити їх дію. Побудова та аналіз математичної моделі системи „механізм підйому вантажу – вантаж – транспортний засіб” дозволяє

© В.С. Ловейкін, В.А. Голдун, 2014