

УДК 539.3

СПРОЩЕННЯ РОЗРАХУНКОВОЇ СХЕМИ ПРИ ВИЗНАЧЕННІ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ НЕТОНККИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК ЗІ СКЛАДНОЮ ФОРМОЮ ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕРІЗУ

Л.С. Рожок,

д-р фіз.-мат. наук, професор

А.М. Онищенко,

д-р техн. наук, професор

М.В. Гаркуша,

канд. техн. наук, доцент

І.В. Башкевич,

канд. техн. наук, доцент

Національний транспортний університет, м. Київ

DOI: 10.32347/2410-2547.2022.109.287-300

В роботі, із використанням просторової моделі лінійної теорії пружності на основі методу апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є, розв'язано задачу про напружений стан нетонких циліндричних оболонок з поперечним перерізом у вигляді гофрованих еліпсів при дії внутрішнього тиску за певних граничних умов на торцях. Для класу розглядуваних оболонок встановлено межі можливості спрощення розрахункової схеми внаслідок вилучення з розгляду параметру, що характеризує еліптичність.

Ключові слова: гофровані еліпси, дискретні ряди Фур'є, лінійна теорія пружності, напружений стан, нетонкі циліндричні оболонки, ортотропний матеріал, просторова модель, спрощення розрахункової схеми.

Вступ. З бурхливим розвитком науково-технічної бази та широкомасштабною комп'ютеризацією суспільства, важливого значення набуває комп'ютерне моделювання станів, явищ та процесів, що мають місце в навколишньому середовищі. Обчислювальний експеримент застосовується в багатьох галузях господарювання, серед яких ракетобудування, будівництво доріг, машинобудування, будівництво споруд, медицина, створення наноматеріалів та ін. [9, 13]. Так, наприклад, за допомогою математичного моделювання, в роботі [15] встановлено наслідки прориву греблі з метою надання рекомендацій щодо захисних конструктивних заходів автошляху та мосту; в роботі [3] на базі методів дослідження нелінійних коливальних систем на основі використання функції малого параметра, розв'язується задача моделювання режимів биття під час оберально-коливального руху складної аеродинамічної конструкції із визначенням умов їх виникнення; в роботі [8] в рамках схеми неоднорідної нанорідини досліджується задача нестационарної магнітогідродинамічної (МГД) комбінованої конвекції в прямокутній порожнині з двома внутрішніми циліндрами, що нагрівається хвилеподібно. Широкого використання в умовах зростаючого рівня інтенсивності зовнішнього впливу

набувають конструкції у вигляді циліндричних оболонок різної товщини. Для забезпечення міцності та надійності експлуатації конструкцій та їх елементів подібного класу, необхідно визначати їх напружений стан, при цьому особливого значення набуває вибір моделі дослідження та відповідного чисельно-аналітичного методу, який дозволяє отримати розв'язок задачі з заданим ступенем точності. Проблему динамічної деформації тришарової циліндричної оболонки при нестационарних навантаженнях у разі жорсткого затискання кінців оболонки за використанням методу скінчених елементів розглянуто в роботі [2]. У випадку, коли розглядаються оболонки зі складною формою поперечного перерізу, доцільно використовувати просторову модель, так в роботі [10] на основі просторової моделі лінійної теорії пружності з використанням чисельно-аналітичних методів, досліджується напружений стан ортотропних порожнистих циліндрів, що мають еліптичну гофровану форму поперечного перерізу.

В процесі виготовлення, або внаслідок експлуатації, форма поперечного перерізу циліндричних оболонок може певною мірою відхилятися від вихідної.

Постановка задачі. В просторовій постановці лінійної теорії пружності для ортотропного тіла [5], розглядаються нетонкі циліндричні оболонки з поперечним перерізом, що має двопараметричне відхилення від кругової форми – гофровані еліпси за умови, що радіус кривизни у западині гофрів не змінює знак на від'ємний. Оболонки знаходять під дією рівномірного нормального внутрішнього тиску $q = q_0 \sin(\pi s / l)$ ($q_0 = \text{const}$).

Розглянемо криволінійну систему координат s, t, γ , до якої віднесемо нетонкі циліндричні оболонки, близькі до кругових, побудовану таким чином. В ортогональній криволінійній системі координат s, t обирається криволінійна циліндрична поверхня за поверхню відліку, а координата γ відкладається вздовж нормалі до цієї поверхні [6]. Квадрат довжини лінійного елемента, в обраній таким чином системі координат, визначається рівністю

$$dS^2 = H_1^2 ds^2 + H_2^2 dt^2 + H_3^2 d\gamma^2, \quad (1)$$

де $H_1 = H_3 = 1$; $H_2(t, \gamma) = 1 + \gamma / R_t$ – параметри Ламе, R_t – радіус кривизни поверхні відліку поперечного перерізу. За поверхню відліку обрано серединну поверхню циліндричної оболонки, що рівновіддалена від бічних поверхонь, тоді (l – довжина оболонки, h – її товщина) $0 \leq s \leq l$; $t_1 \leq t \leq t_2$; $-h/2 \leq \gamma \leq h/2$.

На обмежуючих поверхнях розглядаються такі граничні умови:

а) на торцях оболонки – умови простого обпирання

$$\sigma_s = u_t = u_\gamma = 0 \quad \text{при } s = 0; \quad s = l; \quad (2)$$

б) на бічних поверхнях

$$\sigma_\gamma = 0, \tau_{s\gamma} = 0, \tau_{t\gamma} = 0 \text{ при } \gamma = h/2; \quad (3)$$

$$\sigma_\gamma = q_0 \sin(\pi s/l), \tau_{s\gamma} = 0, \tau_{t\gamma} = 0 \text{ при } \gamma = -h/2;$$

в) оболонки замкнені вздовж напрямної, тому відповідні граничні умови мають вигляд умов періодичності факторів напружено-деформованого стану (T – період)

$$\sigma_\gamma(s, t, \gamma) = \sigma_\gamma(s, t + T, \gamma); \tau_{s\gamma}(s, t, \gamma) = \tau_{s\gamma}(s, t + T, \gamma);$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots, u_t(s, t, \gamma) = u_t(s, t + T, \gamma).$$

При побудові розв'язувальної системи диференціальних рівнянь приймаються такі припущення: напрямна серединної поверхні є довільною неперервною кривою без особливостей і розривів; механічні характеристики можуть бути змінними вздовж товщини, залишаючись сталими вздовж твірної; закон розподілу прикладеного навантаження може бути заданий довільним чином.

За розв'язувальні оберемо ті функції, в яких формулюються граничні умови на бічних поверхнях, а саме: три компоненти напружень $\sigma_\gamma, \tau_{t\gamma}, \tau_{s\gamma}$ і додамо до них три компоненти переміщень u_s, u_t, u_γ . Після певних перетворень відносно розв'язувальних функцій, з основних рівнянь можна отримати розв'язувальну систему диференціальних рівнянь шостого порядку в частинних похідних зі змінними коефіцієнтами [10, 11].

Мета роботи полягає у визначенні, на основі методу апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є [11], меж зміни геометричних параметрів поперечного перерізу поверхні відліку оболонок даного класу, для можливості застосування спрощеної схеми при розрахунках напруженого стану розглядуваних оболонок без врахування еліптичності (рис. 1).

Виклад основного матеріалу. Поверхня відліку в поперечному перерізі даного класу оболонок задається в параметричній формі (перший доданок характеризує еліптичну складову, другий – наявність гофрів) у вигляді [4]

$$\rho(\psi) = \frac{a}{(1 - e^2 \cos^2 \psi)^{1/2}} + \alpha \cos m\psi, \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi,$$

$$e = \sqrt{1 - (a/b)^2} = 2\sqrt{\Delta} / (1 + \Delta),$$

де α – амплітуда, m – частота гофрування, a, b, e – півосі та ексцентриситет еліпса ($b > a$), точка O ($\rho = 0$) знаходиться на перетині осей еліпса ($\alpha = 0$). При цьому менша піввісь обирається таким чином

$$a = r_0(1 - \Delta) / f; f = 1 + \Delta^2 / 4 + \Delta^4 / 64 + \dots,$$

тут r_0 – радіус кола, $\Delta = (b - a) / (b + a)$ – параметр, що характеризує ступінь еліптичності. Варіюючи геометричними параметрами поперечного перерізу поверхні відліку (амплітудою гофрування та ступенем еліптичності) можна розглядати різні форми з метою визначення параметрів, за яких

відбувається суттєвий вплив еліптичності на величини характеристик напруженого стану оболонок даного класу.

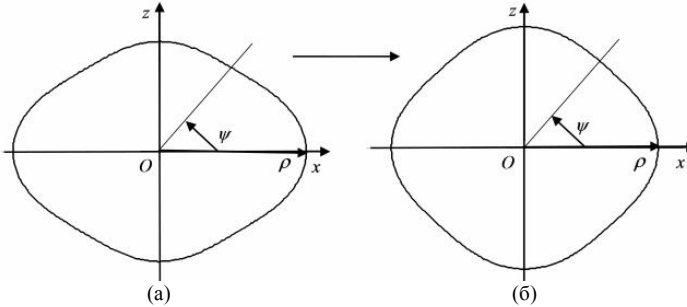


Рис. 1. Спрощена розрахункова форма поперечного перерізу поверхні відліку:
(а) гофрований еліпс; (б) гофроване коло

Внаслідок того, що серединну поверхню оболонок в поперечному перерізі задано в полярних координатах (ρ, ψ) , при переході від координати напрямної t до координати ψ (кутова координата в поперечному перерізі) необхідно враховувати відповідний коефіцієнт переходу $\omega(\psi)$. Так, для довільної функції $V = V(t(\psi), \gamma)$ маємо

$$\frac{dt}{d\psi} = \sqrt{\rho^2 + (d\rho/d\psi)^2} = \omega(\psi); \quad \frac{\partial V}{\partial \psi} = \frac{\partial V}{\partial t} \frac{dt}{d\psi}; \quad \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{\omega(\psi)} \frac{\partial V}{\partial \psi}.$$

Радіус кривизни серединної поверхні обчислюється за формулою

$$R(\psi) = \omega^3(\psi) / (\rho^2 + 2\rho'^2 + \rho\rho'').$$

Рівність (1) при переході від координати t до координати ψ набуває вигляду

$$dS^2 = ds^2 + H_2^2(\psi, \gamma)\omega(\psi)d\psi^2 + d\gamma^2.$$

Наявність граничних умов (2), дозволяє знизити розмірність задачі за рахунок подання розв'язувальних функцій та компонент навантаження у вигляді розвинень в ряди Фур'є за координатою твірної s . Після підстановки цих рядів до розв'язувальної системи диференціальних рівнянь, граничних умов та відокремлення змінних, вихідна тривимірна крайова задача зводиться до системи диференціальних рівнянь в частинних похідних зі змінними коефіцієнтами відносно амплітудних значень зазначених рядів порядку $(6n + 2)$, що описує двовимірну крайову задачу. Для подальшого зниження розмірності задачі, у розв'язувальній системі диференціальних рівнянь, доповняльними функціями позначаються члени, що містять в собі добутки розв'язувальних функцій на коефіцієнти, які залежать від двох координат і перешкоджають відокремленню змінних в напрямку координати напрямної. Така процедура дозволяє формально подати розв'язувальну систему зі змінними коефіцієнтами як систему зі сталими коефіцієнтами, яка дозволяє відокремити змінні в зазначеному напрямку. Для цього,

розв'язувальні функції, введені доповняльні функції та компоненти навантаження подаються у вигляді розвинень в ряди Фур'є формулами

$$\tilde{X}(\psi, \gamma) = \sum_{k=0}^K \tilde{X}_k(\gamma) \cos \lambda_k \psi; \quad \tilde{Y}(\psi, \gamma) = \sum_{k=1}^K \tilde{Y}_k(\gamma) \sin \lambda_k \psi; \quad (4)$$

$$\lambda_k = \frac{2k\pi}{T}, \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi;$$

$$\tilde{X} = \{\sigma_\gamma, \tau_{s\gamma}, u_\gamma, u_s, \Phi_1^j, \Phi_4^j, \Phi_6, q_\gamma\}; \quad \tilde{Y} = \{\tau_{\psi\gamma}, u_\psi, \Phi_2^j, \Phi_3^j, \Phi_5, \Phi_7\}.$$

Після підстановки рядів (4) до розв'язувальної системи диференціальних рівнянь, граничних умов і відокремлення змінних приходимо до системи звичайних диференціальних рівнянь відносно амплітудних значень рядів (4) для кожного $n = \overline{0, N}$, де N – кількість членів, утримуваних в розвиненнях в ряди Фур'є розв'язувальних функцій та компонент навантаження за напрямком твірної (індекс n у відповідних позначеннях для розв'язувальних функцій та компонент навантаження опущено) у вигляді ($k = \overline{0, K}$)

$$\frac{d\sigma_{\gamma,k}}{d\gamma} = \lambda_n \tau_{s\gamma,k} + (c_2 - 1) \Phi_{1,k}^1 - \Phi_{4,k}^1 + b_{22} \Phi_{1,k}^5 + b_{12} \lambda_n \Phi_{1,k}^4 + b_{22} \Phi_{4,k}^3;$$

$$\frac{d\tau_{s\gamma,k}}{d\gamma} = -c_1 \lambda_n \sigma_{\gamma,k} + b_{11} \lambda_n^2 u_{s,k} - \Phi_{1,k}^2 - b_{12} \lambda_n \Phi_{1,k}^3 - b_{66} \Phi_{6,k} - (b_{12} + b_{66}) \lambda_n \Phi_{4,k}^2;$$

$$\frac{d\tau_{\psi\gamma,k}}{d\gamma} = b_{66} \lambda_n^2 u_{\psi,k} - c_2 \Phi_{3,k}^1 - 2\Phi_{2,k}^1 - b_{22} \Phi_{5,k} - (b_{12} + b_{66}) \lambda_n \Phi_{3,k}^3 - b_{22} \Phi_{7,k};$$

$$\frac{du_{\gamma,k}}{d\gamma} = c_4 \sigma_{\gamma,k} + c_1 \lambda_n u_{s,k} - c_2 \Phi_{4,k}^2 - c_2 \Phi_{1,k}^3; \quad (5)$$

$$\frac{du_{s,k}}{d\gamma} = a_{55} \tau_{s\gamma,k} - \lambda_n u_{\gamma,k}; \quad \frac{du_{\psi,k}}{d\gamma} = a_{44} \tau_{\psi\gamma,k} - \Phi_{3,k}^2 + \Phi_{2,k}^2; \quad \lambda_n = \frac{\pi n s}{l}$$

з граничними умовами

$$\sigma_{\gamma,k} = q_{\gamma,k}; \quad \tau_{s\gamma,k} = 0; \quad \tau_{\psi\gamma,k} = 0 \quad \text{при} \quad \gamma = -h/2; \quad (6)$$

$$\sigma_{\gamma,k} = 0; \quad \tau_{s\gamma,k} = 0; \quad \tau_{\psi\gamma,k} = 0 \quad \text{при} \quad \gamma = h/2.$$

Введені доповняльні функції визначаються таким чином:

$$\Phi_1^j = \frac{1}{H_2 R_\psi} \left\{ \sigma_\gamma; \tau_{s\gamma}; u_\gamma; u_s; \frac{1}{H_2 R_\psi} u_\gamma \right\} \quad (j = \overline{1, 5});$$

$$\Phi_2^j = \frac{1}{H_2 R_\psi} \{ \tau_{\psi\gamma}; u_\psi \} \quad (j = \overline{1, 2}); \quad \Phi_3^j = \frac{1}{H_2} \left\{ \frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial \psi}; \frac{\partial u_\gamma}{\partial \psi}; \frac{\partial u_s}{\partial \psi} \right\} \quad (j = \overline{1, 3});$$

$$\Phi_4^j = \frac{1}{H_2} \left\{ \frac{\partial \tau_{\psi\gamma}}{\partial \psi}; \frac{\partial u_\psi}{\partial \psi}; \frac{1}{R_\psi} \frac{\partial u_\psi}{\partial \psi} \right\} \quad (j = \overline{1, 3}); \quad (7)$$

$$\varphi_5 = \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \psi} \varphi_1^3; \quad \varphi_6 = -\frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \psi} \varphi_3^3; \quad \varphi_7 = \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \psi} \varphi_4^2.$$

Для інтегрування отриманої системи звичайних диференціальних рівнянь використовується стійкий чисельний метод дискретної ортогоналізації [12] одночасно для всіх гармонік розвинень (7). Через те, що кількість невідомих у розв'язувальній системі (5) перевищує кількість рівнянь (за рахунок введення доповняльних функцій), для замикання отриманої розв'язувальної системи рівнянь, на кожному кроці застосування чисельного методу, амплітудні значення доповняльних функцій обчислюються за поточними значеннями амплітуд розв'язувальних функцій за допомогою апроксимації їх дискретними рядами Фур'є [14]. Для цього в ряді точок напрямної ψ_i ($i = \overline{1, R}$), при фіксованому значенні координати товщини, згідно співвідношень

$$\begin{aligned} h_1^i &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} = \frac{1}{R_\psi(\psi_i) + \gamma_k}; \quad h_2^i = \frac{1}{H_2} = \frac{R_\psi(\psi_i)}{R_\psi(\psi_i) + \gamma_k}; \\ \varphi_{1,i}^j &= h_1^i \sum_{m=0}^M \{ \sigma_{\gamma,m}; \tau_{s\gamma,m}; u_{\gamma,m}; u_{s,m} \} \cos \lambda_m \psi_i \quad (j = \overline{1, 4}); \\ \varphi_{1,i}^5 &= (h_1^i)^2 \sum_{m=0}^M u_{\gamma,m} \cos \lambda_m \psi_i; \quad \varphi_{2,i}^j = h_1^i \sum_{m=0}^M \{ \tau_{\psi\gamma,m}; u_{\psi,m} \} \sin \lambda_m \psi_i \quad (j = 1, 2); \\ \varphi_{3,i}^j &= -h_2^i \sum_{m=0}^M \lambda_m \{ \sigma_{\gamma,m}; u_{\gamma,m}; u_{s,m} \} \sin \lambda_m \psi_i \quad (j = \overline{1, 3}); \quad (8) \\ \varphi_{4,i}^j &= h_2^i \sum_{m=0}^M \lambda_m \{ \tau_{\psi\gamma,m}; u_{\psi,m} \} \cos \lambda_m \psi_i \quad (j = 1, 2); \\ \varphi_{4,i}^3 &= h_1^i h_2^i \sum_{m=0}^M \lambda_m u_{\psi,m} \cos \lambda_m \psi_i; \quad \varphi_{5,i} = -h_2^i \sum_{m=0}^M \lambda_m \varphi_{1,m}^3 \sin \lambda_m \psi_i; \\ \varphi_{6,i} &= h_2^i \sum_{m=0}^M \lambda_m \varphi_{3,m}^3 \cos \lambda_m \psi_i; \quad \varphi_{7,i} = -h_2^i \sum_{m=0}^M \lambda_m \varphi_{4,m}^2 \sin \lambda_m \psi_i \end{aligned}$$

будують таблиці значень доповняльних функцій. Використовуючи далі стандартну процедуру визначення коефіцієнтів Фур'є для функцій, заданих таблицею, знаходять ці коефіцієнти і, підставляючи їх до розв'язувальної системи рівнянь (5), роблять наступний крок інтегрування. На початку інтегрування амплітудні значення доповняльних функцій знаходять за амплітудними значеннями розв'язувальних функцій згідно граничних умов (6).

Оцінку точності отримуваних результатів при застосуванні методики, що базується на використанні методу апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є, перевірено за такими критеріями. Оскільки даний метод базується на застосуванні апроксимації доповняльних функцій дискретними рядами Фур'є та чисельному інтегруванні системи звичайних диференціальних рівнянь, то похибка обчислень може мати місце саме на

цих етапах. Контроль точності результатів здійснюється за рахунок варіації точок обчислення табличних значень доповняльних функцій, згідно формул (8) та кількості членів дискретного ряду Фур'є (4), а також, за рахунок варіації кількості точок інтегрування і точок ортогоналізації. Так, було з'ясовано, що точність до 4 – 5 значущих цифр досягається при 80 точках для табличних значень доповняльних функцій та 12 членах рядів Фур'є (4) і при 32 точках інтегрування та 16 точках ортогоналізації.

Деякі оцінки достовірності розв'язків, отриманих на основі розглянутої методики оболонки даного класу, можна отримати досліджуючи напружений стан оболонки, що мають певні відхилення форми поперечного перерізу від канонічної кругової форми, коли величини параметрів, що характеризують таке відхилення, наближаються до нуля. При цьому розв'язок задачі має збігатися до розв'язку задачі для кругової оболонки, що має точний розв'язок.

Розглянемо задачу про напружений стан ортотропних тонких циліндричних оболонок з гофрованим еліптичним поперечним перерізом при дії внутрішнього тиску $q_\gamma = q_0 \sin(\pi s / l)$ ($q_0 = \text{const}$).

Задачу розв'язано за таких вихідних даних: довжина оболонки $l = 60$, радіус вихідного кола $r_0 = 40$, товщина $h = 2$, амплітуда гофрування $\alpha = 0; 0,001$, частота гофрування $m = 4$, степінь еліптичності $\Delta = 0; 0,001$; механічні характеристики матеріалу [1] $E_s = 4,6E_0$; $E_\psi = 1,6E_0$; $E_\gamma = 1,12E_0$; $\nu_{s\psi} = 0,27$; $\nu_{s\gamma} = 0,07$; $\nu_{\psi\gamma} = 0,3$; $G_{s\psi} = 0,56E_0$; $G_{s\gamma} = 0,33E_0$; $G_{\psi\gamma} = 0,43E_0$.

Результати розв'язування задачі наведено у табл. 1 в середньому перерізі довжини для значень нормальних переміщень u_γ та напружень σ_ψ на внутрішній та зовнішній поверхнях для двох значень напрямної $\psi = 0$; $\psi = \pi/2$.

Тут і надалі усі лінійні розміри віднесені до одиниці довжини, напруження – до одиниці навантаження.

При $\alpha = 0$ та $\Delta = 0$ маємо кругову оболонку, для якої існує точний розв'язок. При обраних значеннях амплітуди гофрування $\alpha = 0,001$ та степеня еліптичності $\Delta = 0,001$ відхилення форми поперечного перерізу поверхні відліку від кругової ($r_0 = 40$) в різних перерізах вздовж напрямної оболонки не перевищує 2%.

Як видно з наведених в табл. 1 даних, значення переміщень u_γ та напружень σ_ψ при незначному відхиленні форми поперечного перерізу від кругової, за умови $\Delta \rightarrow 0$ та $\alpha \rightarrow 0$, не перевищує 3% порівняно з відповідними значеннями для кругової оболонки.

Крім того, достовірність отримуваних результатів перевірено порівнянням результатів, які отримані при розв'язанні крайових задач за різними розрахунковими схемами, а саме, інтегрування відбувається

спочатку з внутрішньої навантаженої поверхні, а потім навпаки – з зовнішньої, вільної від навантаження. При цьому спостерігається збіг результатів для полів переміщень і напружень до 5 – 6 значущих цифр.

Таблиця 1

Розподіл переміщень та напружень в еліптичних гофрованих в поперечному перерізі оболонках при $\Delta \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow 0$

γ	$u_\gamma E / q_0$		σ_ψ / q_0		$ \sigma_s / q_0$		Похибка %
	$\psi = 0$	$\psi = \pi / 2$	$\psi = 0$	$\psi = \pi / 2$	$\psi = 0$	$\psi = \pi / 2$	
$m = 0, \alpha = 0, \Delta = 0$							
$-h/2$	505,40		18,669		7,6500		–
$h/2$	495,46		21,786		7,4905		–
$m = 4, \alpha = 0,001, \Delta = 0,001$							
$-h/2$	498,36	488,46	18,691	18,692	7,5605	7,6938	<1,4
$h/2$	510,36	500,38	21,657	21,863	7,2897	7,6112	<2,7

За критерій можливості використання спрощеної схеми (без врахування еліптичності) при застосуванні, наприклад, четвертої теорії міцності (теорії найбільшої питомої потенціальної енергії) [7], обрано значення радіуса кривизни поперечного перерізу поверхні відліку в перерізі $\psi = 0$. При цьому еквівалентні напруження обчислюються за формулою

$$\sigma_{IV} = \sqrt{0,5((\sigma_s - \sigma_\gamma)^2 + (\sigma_s - \sigma_\psi)^2 + (\sigma_\psi - \sigma_\gamma)^2)},$$

де $\sigma_\gamma, \sigma_s, \sigma_\psi$ - відповідні нормальні напруження.

Задачу розв'язано за таких умов: механічні характеристики матеріалу аналогічні механічним характеристикам попередньої задачі; довжина оболонки $l = 60$, її товщина $h = 2$, частота гофрування $m = 4$, амплітуда гофрування $\alpha = 0,5; 0,825; 1,475; 2,125$, степінь еліптичності $\Delta = 0; 0,05; 0,06; 0,07; 0,08; 0,09; 0,1$.

За такого вибору геометричних параметрів, відхилення периметру поверхні відліку поперечного перерізу від кругової, радіуса $r_0 = 40$, не перевищує 1,6%. Таким чином можна вважати розглядувані оболонки однопериметричними. При $\Delta = 0$ маємо кругову гофровану оболонку.

Результати порівняльного аналізу максимальних величин еквівалентних напружень σ_{IV} в середньому перерізі довжини на зовнішній, вільній від навантаження поверхні оболонки в западині гофрів ($\psi = \pi/4$) наведено в табл. 2.

В табл. 3 наведено похибку отриманих результатів, порівняно з круговою гофрованою оболонкою ($\Delta = 0$).

Відповідно, в табл. 4, 5 наведено значення радіусів кривизни R_ψ поверхонь відліку еліптичних гофрованих поперечних перерізів відносно кругових

гофрованих та їх відхилення в процентному співвідношенні в перерізі $\psi = 0$.

Таблиця 2

Розподіл значень еквівалентних напружень σ_{IV} в залежності від степеня еліптичності та амплітуди гофрування

$\alpha \backslash \Delta$	0	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1
0,5	31,42	32,90	33,42	34,03	34,74	35,55	36,46
0,825	43,71	45,21	45,88	46,66	47,57	48,59	49,74
1,15	57,41	59,21	60,00	60,93	62,00	63,22	64,57
1,475	72,63	74,68	75,59	76,06	77,87	79,24	80,77
1,8	89,17	91,43	92,41	93,55	94,89	96,38	98,03
2,125	106,62	108,89	109,97	111,1	112,52	114,0	115,7

Таблиця 3

Похибка величини еквівалентних напружень σ_{IV} в еліптичних гофрованих оболонках, порівняно з круговими гофрованими оболонками (%)

$\alpha \backslash \Delta$	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1
0,5	5	6	8	11	13	16
0,825	3	5	7	9	11	14
1,15	3	5	6	8	10	12
1,475	3	4	5	7	9	11
1,8	3	4	5	6	8	10
2,125	2	3	4	6	7	9

Таблиця 4

Радіуси кривизни R_{ψ} еліптичного та кругового гофрованогопоперечного перерізу поверхні відліку

$\alpha \backslash \Delta$	0	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1
0,5	33,82	28,47	27,46	26,47	25,51	24,56	23,64
0,825	30,85	26,38	25,52	24,67	23,84	23,01	22,20
1,15	28,44	24,64	23,89	23,15	22,41	21,69	20,97
1,475	26,43	23,15	22,50	21,84	21,19	20,55	19,91
1,8	24,75	21,88	21,30	20,72	20,13	19,51	18,98
2,125	23,31	20,78	20,25	19,73	19,21	18,68	18,16

В табл. 6 представлена зведена таблиця результатів розрахунків, де наведено в процентному відношенні значення еквівалентних напружень σ_{IV} для гофрованих еліптичних і кругових оболонок та відповідне відхилення радіуса кривизни поверхні відліку еліптичної від кругової гофрованої оболонки.

Таблиця 5

Похибка радіусів кривизни еліптичного, порівняно з круговим гофрованим поперечним перерізом (%)

$\alpha \backslash \Delta$	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1
0,5	16	19	22	25	27	30
0,825	14	17	20	23	25	28
1,15	13	16	19	21	24	26
1,475	12	15	17	20	22	25
1,8	12	14	16	19	21	23
2,125	11	13	15	18	20	22

Таблиця 6

Зведена таблиця відношення значень еквівалентних напружень та радіусів кривизни для еліптичних гофрованих оболонок до кругових гофрованих

σ_{IV} / R_w (%)						
$\alpha \backslash \Delta$	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10
0,5	5 / 16	6 / 19	8 / 22	11 / 25	13 / 27	16 / 30
0,825	3 / 14	5 / 17	7 / 20	9 / 23	11 / 25	14 / 28
1,15	3 / 13	5 / 16	6 / 19	8 / 21	10 / 24	12 / 26
1,475	3 / 12	4 / 15	5 / 17	7 / 20	9 / 22	11 / 25
1,8	3 / 12	4 / 14	5 / 16	6 / 19	8 / 21	10 / 23
2,125	2 / 11	3 / 13	4 / 15	6 / 18	7 / 20	9 / 22

Висновки. В результаті комп'ютерного моделювання стану рівноваги, проведено аналіз напруженого стану ортотропних циліндричних нетонких оболонок з двопараметричним відхиленням форми поперечного перерізу від кругової та встановлено, що для оболонок розглядуваного класу можна застосовувати спрощену розрахункову схему (без врахування еліптичності) у випадку, коли відхилення радіуса кривизни у вершині гофрів в перерізі $\psi = 0$ знаходиться в межах 17 % порівняно з круговою гофрованою оболонкою, при цьому максимальні значення еквівалентних напружень в еліптичних гофрованих оболонках не перевищує 5 % порівняно з аналогічними значеннями для кругової гофрованої оболонки.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Ашкенази Е.К., Гольфман И.Б., Рожков Л.П., Сидоров Н.П. Детали из стеклопластиков в судовом машиностроении. – Л: Судостроение, 1974. – 199 с.
2. Gaidachuk V.V., Kotenko K.E. Stress - strain state of a three-layer cylindrical shell under internal axisymmetric pulse load // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific and-technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2020. – Вип. 105. – С. 145-151.
3. Котляров В.П., Волощенко О.І., Кузнецов О.А., Кушніренко М.Г. Моделювання режимів биття під час обертально-коливального руху складної аеродинамічної конструкції із визначенням умов їх виникнення // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2021. – Вип. 107. – С. 288-300.

4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука. Гл.ред. физ.-матлит., 1968. – 720 с.
5. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – Изд. 2-е, Москва: Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1977. – 416 с.
6. Механика композитов. Т. 8. Статика элементов конструкций / Григоренко и др. Киев: «А.С.К.», 1999. – 379 с.
7. Сопrotivление материалов / Под ред. акад. АН УССР Писаренко Г.С. – 5-е изд. перераб. и доп. – К: Вища шк. Головное изд-во, 1986. – 775 с.
8. Ammar I. Alsabery, Muneer A. Ismael, Engin Gedik, Ali J. Chamkha, Ishak Hashim. Transient nanofluid flow and energy dissipation from wavy surface using magnetic field and two rotating cylinders –Computers & Mathematics with Applications. –2021.–97 No 1.– P. 329-343.
9. Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V., Matveenko V.P. Aeroelastic Stability of Cylindrical Shells with Elliptical Cross-Section. –Mech. Solids.– 2020.–No 55.–P. 728-736.
10. Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Stress analysis of longitudinally corrugated hollow orthotropic elliptic cylinders –Int. App. Mech.– 2010.– 46, No 3.–P. 255-263.
11. Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Applying Discrete Fourier Series to Solve Problems of the Stress State of Hollow Noncircular Cylinders.–Int. App. Mech.– 2014.–50, No2.–P. 105-127.
12. Godunov S. K. On a numerical solution of boundary-value problems for systems of linear ordinary differential equations–Usp. Mat. Nauk.– 1961.– 16, No 3.–P. 171-174.
13. Hart E.L., Hudramovich V.S. Projection-Iterative Schemes for the Implementation of Variational-Grid Methods in the Problems of Elastoplastic Deformation of Inhomogeneous Thin-Walled Structures–J. Math. Sci.– 2021.–No 254.–P. 21-38.
14. Fikhtengol'ts G.M. Course of Differential and Integral Calculus [in Russian]. – Gostekhteorizdat, Moscow–Leningrad, 1949. –Vol. 3.– 728 p.
15. Onishchenko A.M., Koretskiy A.S., Bashkevych I.V., Ostroverkh B.M., Bieliatynskiy A.O. Dam failure model and its influence on the bridge construction –Advances in Intelligent Systems and Computing.– 2021.–1258 AISC.–P. 229-237.

REFERENCES

1. Ashkenazi Ye.K., Gol'fman I.B., Rozhkov L.P., Sidorov N.P. Detali iz stekloplastikov v sudo- i mashinostroyenii (Parts made of fiberglass in ship engineering). - L: Sudostroyeniye, 1974. - 199 p. (in Russian).
2. Gaidaichuk V.V., Kotenko K.E. Stress-strain state of a three-layer cylindrical shell under internal axisymmetric pulse load. Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific and technical collected articles. - Kyiv: KNUBA, 2020. Issue 105. - P. 145-151.
3. Kothlyarov V.P., Voloshchenko O.I., Kuznetsov O.A., Kushnirenko M.G. Modelirovaniye rezhimiv bytya pid chas obertal'no-kolival'nogo rukhu skladnoyi aerodinamichnoyi konstrukttsii iz vyznachennyam umov ikh viniknennya (Simulation of beating modes during the rotary-oscillating movement of complex aerodynamic engineering with determination of the conditions of their occurrence). Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific and technical collected articles. Kyiv: KNUBA, 2021. Issue 107. - P. 288-300.
4. Korn G., Korn T. Spravochnik po matematike dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov (Handbook of mathematics for scientists and engineers). - M.: Nauka. Gl.red. fiz.-mat lit., 1968. - 720 pp. (in Russian).
5. Lekhnitskiy S.G. Teoriya uprugosti anizotropnogo tela (Theory of elasticity of an anisotropic body). - Izd. 2-ye, Moskva: Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury izdatel'stva «Nauka», 1977. - 416 pp. (in Russian).
6. Mekhanika kompozitov. Vol 8. Statika elementov konstrukttsiy (Mechanics of composites. Vol. 8. Statics of structural elements) / Grigorenko i dr. - Kiyev: «A.S.K.», 1999. - 379 pp. (in Russian).
7. Soprotivleniye materialov (Strength of materials). Pod red. akad. AN SSSR Pisarenko G.S. 5-ye izd. pererab. idop. - K: Vishchashk. Golovnoye izd-vo, 1986. - 775 pp. (in Russian).
8. Ammar I. Alsabery, Muneer A. Ismael, Engin Gedik, Ali J. Chamkha, Ishak Hashim. Transient nanofluid flow and energy dissipation from wavy surface using magnetic field and two rotating cylinders –Computers & Mathematics with Applications. 2021.97, No1. P. 329-343.
9. Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V., Matveenko V.P. Aeroelastic Stability of Cylindrical Shells with Elliptical Cross-Section. Mech. Solids. 2020.55.P. 728-736.

10. *Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S.* Stress analysis of longitudinally corrugated hollow orthotropic elliptic cylinders. *Int. App. Mech.* 2010. 46, No 3. - P. 255-263.
11. *Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S.* Applying Discrete Fourier Series to Solve Problems of the Stress State of Hollow Noncircular Cylinders. *Int. App. Mech.* 2014. 50, No 2. P. 105-127.
12. *Godunov S. K.* On a numerical solution of boundary-value problems for systems of linear ordinary differential equations. *Usp. Mat. Nauk.* 1961. 16, No 3. P. 171-174.
13. *Hart E.L., Hudramovich V.S.* Projection-Iterative Schemes for the Implementation of Variational-Grid Methods in the Problems of Elastoplastic Deformation of Inhomogeneous Thin-Walled Structures. *J. Math. Sci.* 2021. Issue 254. P. 21-38.
14. *Fikhtengol'ts G.M.* Course of Differential and Integral Calculus. - Gostekhteorizdat, Moscow–Leningrad, 1949. Vol. 3, 728 pp. (in Russian).
15. *Onishchenko A.M., Koretskiy A.S., Bashkevych I.V., Ostroverkh B.M., Bieliatynskiy A.O.* Dam failure model and its influence on the bridge construction – Advances in Intelligent Systems and Computing. 2021. 1258 AISC. P. 229-237.

Стаття надійшла 11.05.2022

Рожок Л.С., Онищенко А.М., Гаркуша М.В., Башкевич І.В.

СПРОЩЕННЯ РОЗРАХУНКОВОЇ СХЕМИ ПРИ ВИЗНАЧЕННІ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ НЕТОНКИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК ЗІ СКЛАДНОЮ ФОРМОЮ ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕРІЗУ

Альтернативою проведення кошторисних натурних експериментів є комп'ютерне моделювання, яке дозволяє досліджувати різноманітні стани, явища, процеси тощо, що мають місце в навколишньому середовищі.

Проведення обчислювального експерименту є невід'ємною складовою на етапі проектування нових конструкцій та їх елементів. Одним із важливих питань залишається питання вибору моделі дослідження, відповідної розрахункової схеми та можливості її спрощення.

Об'єктом дослідження в даній роботі є ортотропні нетонкі циліндричні оболонки з поперечним перерізом у вигляді гофрованих еліпсів, що має двопараметричне відхилення форми поперечного перерізу від кругової. Розглядаються оболонки для яких радіус кривизни поперечного перерізу поверхні відліку має додатний знак. Оболонки знаходяться під дією внутрішнього тиску за умов простого обпирання торців.

Предметом дослідження є напружений стан оболонки і, як наслідок, встановлення залежності між геометричними параметрами поверхні відліку поперечного перерізу оболонки та можливістю спрощення розрахункової схеми (вилучення з розгляду параметру, що характеризує еліптичність).

Задачу розв'язано із використанням просторової моделі лінійної теорії пружності на основі методу апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є.

Для класу розглядуваних оболонок встановлено межі можливості спрощення розрахункової схеми при розрахунках на міцність з використанням четвертої теорії міцності (теорії найбільшої питомої потенціальної енергії), внаслідок вилучення з розгляду параметру, що характеризує еліптичність гофрованих циліндричних оболонок. За критерій можливості застосування спрощеної схеми обрано радіус кривизни поперечного перерізу поверхні відліку в зоні найбільшої жорсткості. Встановлено, що використання спрощеної схеми можливе за умови, що радіус кривизни поперечного перерізу поверхні відліку еліптичних гофрованих циліндричних оболонок в зазначеному перерізі відрізняється від аналогічного для кругових гофрованих оболонок не більше ніж на 17%.

Ключові слова: гофровані еліпси, дискретні ряди Фур'є, напружений стан, нетонкі циліндричні оболонки, ортотропний матеріал, просторова модель, спрощення розрахункової схеми.

Rozhok L.S., Onishchenko A.M., Garkusha M.V., Bashkevych I.V.

SIMPLIFICATION OF THE CALCULATION SCHEME FOR DETERMINING THE STRESS STATE OF NON-THIN CYLINDRICAL SHELLS WITH A COMPLEX CROSS-SECTIONAL SHAPE

An alternative to full-scale experiments is computer simulation, which allows studying a variety of states, phenomena, processes, etc. occurring in the environment.

Conducting a computational experiment is an integral part of the design phase of new structures and their elements. One of the important issues is the choice of research model, feasible calculation scheme and possibility of its simplification.

This research investigates orthotropic non-thin cylindrical shells with corrugated ellipses as cross sections, which has the two-parameter deviation of the cross-section shape from a circular one. Considered are shells, for which the cross-section curvature radius of the reference surface has the positive sign. The shells are subjected to internal pressure under conditions of simple support on the ends.

The subject of the study is the stress state of shells and, as a consequence, the establishment of the relationship between the geometric parameters of the reference surface of the cross sections and the possibility of simplifying the calculation scheme (excluding from consideration the parameter characterizing ellipticity).

The problem is solved using the spatial model of linear elasticity theory based on the method of approximation of functions by discrete Fourier series.

For the class of considered shells, we find the limits of possible simplification of the calculation scheme during calculations on durability with use of the fourth theory of durability (the theory of the greatest specific potential energy), due to exclusion from consideration of the parameter, which characterizes ellipticity of corrugated cylindrical shells.

The cross-sectional radius of curvature of the reference surface in the zone of greatest rigidity is chosen as a criterion for the possibility of using a simplified scheme. It is found that a simplified scheme can be used when the cross-section curvature radius of the reference surface of elliptical corrugated cylindrical shells in this section differs from that for circular corrugated shells by no more than 17%.

Keywords: corrugated ellipses, discrete Fourier series, linear theory of elasticity, stress state, non-thin cylindrical shells, orthotropic material, spatial model, simplification of the calculation scheme.

Рожок Л.С., Онищенко А.Н., Гаркуша Н.В., Башкевич И.В.

УСТОЯНИЕ РАСЧЕТНОЙ СХЕМЫ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ НЕТОНКИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК СО СЛОЖНОЙ ФОРМОЙ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

В работе, с использованием пространственной модели линейной теории упругости на основе метода аппроксимации функций дискретными рядами Фурье, решена задача о напряженном состоянии нетонких цилиндрических оболочек с поперечным сечением в виде гофрированных эллипсов под действием внутреннего давления при определенных граничных условиях на торцах. Для рассматриваемого класса задач установлены границы возможности упрощения расчетной схемы вследствие исключения из рассмотрения параметра, который характеризует эллиптичность.

Ключевые слова: гофрированные эллипсы, дискретные ряды Фурье, линейная теория упругости, напряженное состояние, нетонкие цилиндрические оболочки, ортотропный материал, пространственная модель, упрощенная расчетная схема.

УДК 539.3

Рожок Л.С., Онищенко А.М., Гаркуша М.В., Башкевич И.В. **Спрощення розрахункової схеми при визначенні напруженого стану нетонких циліндричних оболонок зі складною формою поперечного перерізу** // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2022. – Вип. 109. – С. 287-300.

В роботі, із використанням просторової моделі лінійної теорії пружності на основі методу апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є, розв'язано задачу про напружений стан нетонких циліндричних оболонок з поперечним перерізом у вигляді гофрованих еліпсів при дії внутрішнього тиску за певних граничних умов на торцях. Для класу розглядуваних оболонок встановлено межі можливості спрощення розрахункової схеми внаслідок вилучення з розгляду параметру, що характеризує еліптичність.

Табл. 6. Іл. 1. Бібліогр. 15 назв.

UDK539.3

Rozhok L.S., Onishchenko A.M., Garkusha M.V., Bashkevych I.V. **Simplification of the calculation scheme for determining the stress state of non-thin cylindrical shells with a complex cross-sectional shape ellipticity** // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific and technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2022. – Issue 00. – P. 287-300.

In the work, using the spatial model of linear elasticity theory based on the method of approximation of functions by discrete Fourier series, we solve the problem of stress state of non-thin cylindrical

shells having cross section in the form of corrugated ellipses and subjected to internal pressure, under certain boundary conditions at the ends. For the class of considered shells, there were found the limits of possibility of simplification of the calculation scheme as a result of exclusion from consideration of the parameter which characterizes.

Tabl. 6. Fig. 1. Ref. 15

УДК 539.3

Рождок Л.С., Онищенко А.Н., Гаркуша Н.В., Башкевич И.В. Упрощение расчетной схемы при определении напряженного состояния нетонких цилиндрических оболочек со сложной формой поперечного сечения // Сопrotивление материалов и теория сооружений. – 2022. – Вып. 109. – С. 287-300.

В работе, с использованием пространственной модели линейной теории упругости на основе метода аппроксимации функций дискретными рядами Фурье, решена задача о напряженном состоянии нетонких цилиндрических оболочек с поперечным сечением в виде гофрированных эллипсов под действием внутреннего давления при определенных граничных условиях на торцах. Для рассматриваемого класса задач установлены границы возможности упрощения расчетной схемы вследствие исключения из рассмотрения параметра, который характеризует эллиптичность.

Tabl. 6. Илл. 1. Библиогр. 15 назв.

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри теоретичної та прикладної механіки РОЖОК Лілія Степанівна

Адреса робоча: Україна, 01010, м. Київ, вул. М. Омеляновича-Павленка, 1, кафедра теоретичної та прикладної механіки РОЖОК Лілії Степанівни

Роб. тел. +38(044) 286-38-89

Мобільний тел.: +38(050) 708-00-87

E-mail: teor_mex@ukr.net

ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0002-7926-9074>

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри мостів, тунелів та гідротехнічних споруд ОНИЩЕНКО Артур Миколайович

Адреса робоча: Україна, 01010, м. Київ, вул. М. Омеляновича-Павленка, 1, кафедра мостів, тунелів та гідротехнічних споруд ОНИЩЕНКУ Артуру Миколайовичу

Роб. тел. +38(044) 280-79-78

Мобільний тел.: +38(068)7771819

E-mail: onyshchenko.a.m.ntu@gmail.com

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-1040-4530>

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, доцент кафедри мостів, тунелів та гідротехнічних споруд ГАРКУША Микола Васильович

Адреса робоча: Україна, 01010, м. Київ, вул. М. Омеляновича-Павленка, 1, кафедра мостів, тунелів та гідротехнічних споруд ГАРКУШІ Миколі Васильовичу.

Роб. тел. +38(044) 280-79-78

Мобільний тел.: +38(096)628-79-05

E-mail: nicolas89@bigmir.net

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-5388-0561>

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри мостів, тунелів та гідротехнічних споруд БАШКЕВИЧ Ірина Василівна

Адреса робоча: Україна, 01010, м. Київ, вул. М. Омеляновича-Павленка, 1, кафедра мостів, тунелів та гідротехнічних споруд БАШКЕВИЧ Ірині Василівні

Роб. тел. +38(044) 280-79-78

Мобільний тел.: +38(05)9292285

E-mail: iryna.bashkevych@ntu.edu.ua

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-7640-4317>