

УДК 004.272.2:519.63

О. А. ДМИТРИЕВА

*Донецкий национальный технический университет, Украина, г. Красноармейск,  
Исследовательский центр моделирующих технологий (SRC SimTech)  
университета Штутгарта, Германия*

## ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ТОЧНОСТЬЮ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ НА ОСНОВЕ ВАРИАЦИИ РАЗМЕРНОСТИ БЛОКА

*В работе предложен новый подход к управлению точностью интегрирования, основанный на параллельной реализации блочных методов с изменяемыми размерностями опорных блоков. Формирование расчетных схем осуществлялось на основе многошаговых коллокационных блочных методов. Разработанная программная система, позволяющая сгенерировать разностные схемы используемых методов с произвольными размерностями расчетных и опорных блоков с соответствующими матрицами коэффициентов. Численное решение для каждого расчетного блока реализовывалось на основе использования итерационного процесса. Блочный подход при поиске численного решения позволил продвигаться на множество точек, количество которых совпадало с размерностью расчетного блока, что обеспечивало преимущество методов даже при последовательной реализации. Получение численных решений с разными порядками аппроксимации в совпадающих точках расчетного блока позволило формировать оценки погрешности численного интегрирования. Показано, что оценки погрешности аппроксимации близки к соответствующим значениям действительных накопленных погрешностей и могут быть сформированы без использования точного решения. На известных тестовых задачах выполнена параллельная реализация предложенных алгоритмов.*

**Ключевые слова:** задача Коши, точки коллокации, расчетный блок, шаг интегрирования, локальная погрешность, порядок аппроксимации.

### Введение

При разработке численных методов моделирования динамических объектов одним из основных является вопрос о возможности их реализации в параллельных вычислительных системах. Широкое распространение параллельных компьютеров породило насущную необходимость в эффективных методах, ориентированных на решение задач со специальными свойствами: жестких, плохо обусловленных, быстро осциллирующих [1]. Если ранее математические модели, описывающие динамику таких систем, учитывали только наиболее существенные факторы, отображая отдельные стороны системы, то с развитием информационных технологий, появлением и распространением параллельных компьютерных систем появилась возможность существенно ускорить процесс получения результатов, а, значит, создавать более сложные модели, позволяющие повысить точность решения за счет учета дополнительных факторов. В то же время, любая динамическая система, которая моделируется обыкновенными дифференциальными уравнениями и имеет физические компоненты с сильно различающимися временными константами, приводит к жесткой задаче [2], возникает необходимость в обеспечении управления шагом интегрирования.

В данной статье продолжены исследования, посвященные вопросам создания эффективных параллельных методов моделирования динамических систем, основанных на решении задачи Коши

$$x' = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0. \quad (1)$$

При этом основное внимание уделено вопросам управления шагом интегрирования, что, в свою очередь, приводит к необходимости контроля локальных и глобальной ошибок. На практике контроль оценки погрешности может обеспечиваться использованием правила Рунге, экстраполяцией Ричардсона, вложенными методами [2–3], что, как правило, сводится к многократным просчетам с изменяющимся шагом. В работе [4] для эффективного управления глобальной ошибкой численных схем предложены равнозначные блочные методы, в которых используется условие асимптотического равенства локальной и глобальной ошибок, но при этом шаг интегрирования должен быть достаточно малым. В работах [5–10] параллельная реализация численного решения (1) обеспечивается использованием одношаговых многоточечных блочных методов с различными размерностями расчетных блоков. При этом используются как коллокационные методы [6–8], так и методы типа Биккарта [9]. Однако внутри блока невозможно обеспечить изменение шага интегрирования, что, с одной стороны,

является недостатком метода, но, с другой стороны, поскольку точки внутри блока расположены регулярно, есть возможность определения и сопоставления локальных погрешностей во всех точках блока [8, 10], в отличие от стадийных методов, в которых сравнение ведется только по одной конечной расчетной точке. Данная работа является продолжением исследований, приведенных в [6–12], и посвящена разработке подходов к управлению шагом интегрирования на основе блочных методов.

## 1. Канонические коллокационные схемы многошаговых блочных методов

Коллокационные методы строятся на интерполяционных многочленах, степени которых совпадают с количеством точек коллокации, а значения многочленов в этих точках совпадают с правыми частями дифференциального уравнения в расчетных точках [2, 13]. Используя в качестве точек коллокации множество точек равномерной сетки (рис.1)

$$t_{n,i} = t_{n,0} + i\tau \in [t_{n,-m+1}, t_{n,s}], \\ i = -(m-1), -(m-2), \dots, 0, 1, \dots, s,$$

запишем канонический вид многошаговых коллокационных блочных методов с числом опорных точек  $m$  и числом расчетных точек  $s$  [6, 13]

$$u_{n,i} = u_{n,0} + \tau \left( \sum_{j=1-m}^0 b_{i,j} F_{n,j} + \sum_{j=1}^s a_{i,j} F_{n,j} \right), \\ i = 1, 2, \dots, s, \quad (2)$$

где  $u_{n,i}$  – приближенные значения решения задачи Коши (1) в точках  $t_{n,i}$ ,  $i = 0, 1, \dots, s$ ,

$\tau$  – шаг интегрирования,

$F_{n,j} = f(t_n + j\tau, u_{n,j})$  – правые части уравнения (1) в соответствующих точках  $j = -(m-1), -(m-2), \dots, 0, 1, \dots, s$ ,  
 $a_{i,j}$  и  $b_{i,j}$  – коэффициенты расчетной схемы.

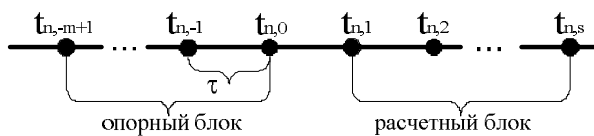


Рис. 1. Схема закрепления опорных и расчетных точек

Для разграничения рассчитанных и искомым точек введем соответствующие обозначения и представим их в виде векторов:

$U_n = (u_{n,j}), n = 1, 2, \dots, j = 1 - m, 2 - m, \dots, 0$  – вектор посчитанных точек;

$U_{n+1} = (u_{n,j}), n = 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots, s$  – вектор искомым точек;

$$F_n = (t_n + j\tau, u_{n,j}), n = 1, 2, \dots, j = 1 - m, 2 - m, \dots, 0,$$

$F_{n+1} = (t_n + j\tau, u_{n,j}), n = 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots, s$  – соответственно, правые части уравнения (1) в известных и искомым точках.

Обозначим дополнительно  $U_{n,0} = (u_{n,0})e$  – решение в точке  $t_{n,0}$ ,  $e$  – единичный вектор размерности  $s$ . Тогда в векторной форме система уравнений (2) будет иметь вид

$$U_{n+1} = U_{n,0} + \tau (B F_n + A F_{n+1}). \quad (3)$$

Для начала расчета необходимо ввести множество опорных значений, которые могут быть определены одношаговым методом, обеспечивающим требуемую точность расчетов

$$U_0 = (u_{0,j}, j = 1 - m, 2 - m, \dots, 0). \quad (4)$$

Тогда поиск численного решения может быть сведен к решению на каждом шаге нелинейной системы уравнений (3), с последовательным определением векторов  $U_1, U_2, \dots$ . Необходимо обратить внимание на то, что каждое уравнение в (2) содержит  $m+s$  неизвестных коэффициентов

$$b_{i,j}, j = 1 - m, 2 - m, \dots, 0, i = 1, 2, \dots, s, \\ a_{i,j}, j = 1, 2, \dots, s, i = 1, 2, \dots, s,$$

которые могут быть определены из условий аппроксимации [5] или с помощью интегроинтерполяционного метода [6, 13].

В работах [6–7, 12] доказана устойчивость этих методов по начальным данным и по правой части, также для них определен максимальный порядок аппроксимации, составляющий величину  $m+s$ .

После определения неизвестных коэффициентов и формирования матриц  $A$  и  $B$  с соответствующими размерностями  $s \times m$  и  $s \times s$  вычисления многошаговым блочным методом, представленным в виде системы нелинейных уравнений (3), можно свести к следующему итерационному процессу

$$U_{n+1}^{(1)} = U_{n,0}e + \tau B F_n, \quad (5)$$

$$U_{n+1}^{(k+1)} = (U_{n,0}e + \tau B F_n) + \tau A F_{n+1}^{(k)}, n = 1, 2, \dots, k = 1, \dots, s.$$

До начала решения системы (5) предварительно определяются значения вектора  $U_0$  (4) в опорных точках начального блока. Вычисление приближенных значений решения задачи Коши в каждом следующем расчетном блоке осуществляется итерационно (5). Определение начальных значений в расчетном блоке осуществляется на основе многошагового предикторного метода Адамса, что позволяет повысить точность начального приближения.

## 2. Оценка вычислительной погрешности на основе изменения размерности опорного блока

В работе [8] предложен подход к управлению шагом для одношаговых многоточечных блочных методов, основанный на введении в расчетный блок дополнительной точки. Параллельный поиск решений для очередного блока проводится независимо двумя процессами, которые осуществляют расчет для блоков размерностью  $s$  и  $s+1$  соответственно. В совпадающих  $s$  точках полученные решения сопоставляются, оцениваются локальные погрешности, на основе полученных величин расхождения принимается решение о продолжении интегрирования или изменении шага. Для многшаговых коллокационных блочных методов такой подход также будет применимым. Но необходимо заметить, что введение дополнительной расчетной точки увеличивает размерность системы уравнений, что очень замедляет процесс решения. Если учесть тот факт, что в многшаговых методах имеется некоторое множество уже рассчитанных точек, то целесообразнее было бы изменить расчетную схему с позиции вовлечения в процесс вычислений дополнительной точки из опорного блока (рис. 2). Это, с одной стороны, позволит получить в совпадающих точках расчетного блока два решения, посчитанных с разными порядками точности для принятия решения о возможной корректировке шага, а, с другой стороны, поскольку дополнительная точка вводится в опорном блоке, это не приводит к росту размерности системы уравнений.

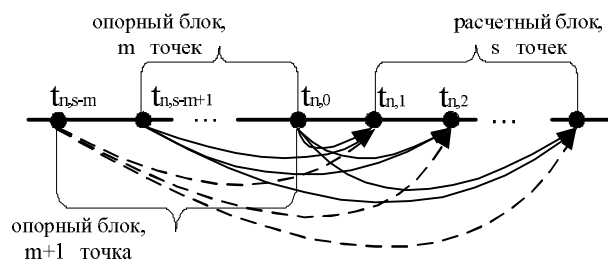


Рис. 2. Шаблон расчетной схемы многшагового многоточечного блочного метода с увеличенным опорным блоком

Рассмотренная ранее процедура управления шагом для таких методов может быть модифицирована следующим образом. Формируются разностные системы уравнений с совпадающими размерностями расчетных блоков  $s$  и  $s$  отличающимися на единицу размерностями опорных блоков  $m$  и  $m+1$  (рис.2). Системы запускаются на счет параллельно с одним и тем же шагом интегрирования  $\tau$ . Две нити вы-

числений проходят независимо, и необходимость в обменах возникает только после получения конечных результатов для обоих блоков расчетных точек. Решение с дополнительной опорной точкой  $((m+1) \times s)$  является вспомогательным и используется для оценки локальной погрешности. Предполагается, что за основу берутся результаты, полученные методом  $(m \times s)$ . Величина нормы расхождений между значениями приближенных решений в совпадающих  $s$  узлах основного блока является определяющей для принятия решения о выборе размера шага. Известно [14], что, если разностное уравнение (3) аппроксимирует исходное дифференциальное уравнение (1) на его решении с порядком  $p$ , то для главного члена локальной погрешности справедлива оценка  $\gamma_n = O(\tau^{p+1})$ . Тогда локальную погрешность приближенного решения  $(m \times s)$  методом в  $i$ -ом узле блока можно определить на основе соотношения

$$\gamma_{n,i}^{(m,s)} = u_{n,i}^{(m,s)} - x(t_{n,i}) \approx \varphi^{(s+m+1)}(t_{n,0}, x_{n,0}) \tau^{s+m+1},$$

$$i = 1, 2, \dots, s, \quad (6)$$

где  $x(t_{n,i})$  – точное решение в  $i$ -той точке  $n$ -того блока,

$u_{n,i}^{(m,s)}$  – численное решение задачи Коши (1)  $(m \times s)$  методом, полученное для  $i$ -той точки  $n$ -ого блока.

Для  $((m+1) \times s)$  метода локальная погрешность в тех же узлах будет определяться как

$$\gamma_{n,i}^{(m+1,s)} = u_{n,i}^{(m+1,s)} - x(t_{n,i}) \approx \varphi^{(s+m+2)}(t_{n,0}, x_{n,0}) \tau^{s+m+2},$$

$$i = 1, 2, \dots, s. \quad (7)$$

где  $u_{n,i}^{(m+1,s)}$  – численное решение задачи Коши (1)  $((m+1) \times s)$  методом, полученное для  $i$ -той точки  $n$ -ого блока.

Тогда из соотношений (6) и (7) можно получить представление главного члена погрешности метода  $(m \times s)$

$$\gamma_{n,i}^{(m,s)} = u_{n,i}^{(m,s)} - u_{n,i}^{(m+1,s)} \approx \varphi^{(s+m+1)}(t_{n,0}, x_{n,0}) \tau^{s+m+1},$$

$$i = 1, 2, \dots, s. \quad (8)$$

Эта оценка обеспечивается параллельной реализацией многшаговых многоточечных методов с отличающимися на единицу размерностями опорных блоков, может быть использована для нахождения приближенной оценки локальной погрешности, и, как следствие, для управления шагом интегрирования.

### 3. Формирование расчетных схем на основе многошаговых коллокационных блочных методов

Выберем в качестве основного и вспомогательного методы с числом расчетных точек, равным 3, и числом опорных соответственно 3 и 4. Выведем систему разностных уравнений, используя интегрирующе-интерполяционный метод. Определим интерполяционный многочлен Лагранжа  $L_{m+s-1}(t)$ , узлы интерполяции которого совпадают с точками коллокации разностных методов  $t_{n,j}$ , а значения функции в узлах интерполяции соответствуют значениям в правой части уравнения (1)  $F_{n,j} = f(t_n + j\tau, u_{n,j})$  в точках  $j = -(m-1), -(m-2), \dots, 0, 1, \dots, s$ . Этот же подход может быть реализован с использованием интерполяционного полинома Эрмита [11]. В этом случае модификация разностных схем (2) будет связана с введением повышенного порядка производных в опорных точках, что позволяет повысить порядок аппроксимации разностных схем и не приводит к росту размерности системы. Для формирования разностных схем интегрирование будет осуществляться в пределах  $(t_{n,0}, t_{n,i})$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$  на основе соотношений

$$u_{n,i} = u_{n,0} + \int_{t_{n,0}}^{t_{n,i}} L_{m+s-1}(t) dt.$$

Сначала построим интерполяционный многочлен Лагранжа для первой расчетной схемы ( $m = 3, s = 3$ ) с узлами интерполяции

$$\{t_n - 2\tau, F_{n,-2}\}, \{t_n - \tau, F_{n,-1}\}, \{t_n, F_{n,0}\}, \{t_n + \tau, F_{n,1}\}, \\ \{t_n + 2\tau, F_{n,2}\}, \{t_n + 3\tau, F_{n,3}\}.$$

Проинтегрируем его в соответствующих пределах, получим следующую систему уравнений с расчетными матрицами:

$$B = \begin{pmatrix} 11 & -31 & 401 \\ 1440 & -480 & 720 \\ 0 & -1 & 17 \\ 3 & -90 & 45 \\ 160 & -21 & 57 \\ 160 & 160 & 80 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 401 & -31 & 11 \\ 720 & -480 & 1440 \\ 19 & 17 & -1 \\ 15 & 45 & -90 \\ 57 & 219 & 51 \\ 80 & 160 & 160 \end{pmatrix}.$$

вида

$$u_{n,1} = u_{n,0} + \frac{\tau}{1440} (11 F_{n,-2} - 93 F_{n,-1} + 802 F_{n,0} + 802 F_{n,1} - 93 F_{n,2} + 11 F_{n,3}), \quad (9)$$

$$u_{n,2} = u_{n,0} - \frac{\tau}{90} (F_{n,-1} - 34 F_{n,0} - 114 F_{n,1} - 34 F_{n,2} + F_{n,3}),$$

$$u_{n,3} = u_{n,0} + \frac{3\tau}{160} (F_{n,-2} - 7 F_{n,-1} + 38 F_{n,0} + 38 F_{n,1} + 73 F_{n,2} + 17 F_{n,3})$$

Увеличим размерность опорного блока на одну точку (рис.2), введем дополнительный узел в многочлен Лагранжа и сгенерируем соответствующую систему разностных уравнений с числом опорных точек на единицу больше, чем у основного метода.

$$u_{n,1} = u_{n,0} + \frac{\tau}{60480} (-191 F_{n,-3} + 1608 F_{n,-2} - 6771 F_{n,-1}) + \frac{\tau}{60480} (37504 F_{n,0} + 30819 F_{n,1} - 2760 F_{n,2} + 271 F_{n,3}), \quad (10)$$

$$u_{n,2} = u_{n,0} + \frac{\tau}{3780} (5 F_{n,-3} - 30 F_{n,-2} + 33 F_{n,-1}) + \frac{\tau}{3780} (1328 F_{n,0} + 4863 F_{n,1} + 1398 F_{n,2} - 37 F_{n,3}),$$

$$u_{n,3} = u_{n,0} + \frac{\tau}{2240} (-29 F_{n,-3} + 216 F_{n,-2} - 729 F_{n,-1}) + \frac{\tau}{2240} (2176 F_{n,0} + 1161 F_{n,1} + 3240 F_{n,2} + 685 F_{n,3})$$

с соответствующими матрицами

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{191}{60480} & \frac{67}{2520} & -\frac{2257}{20160} & \frac{586}{945} \\ \frac{1}{756} & -\frac{1}{126} & \frac{11}{1260} & \frac{332}{945} \\ \frac{29}{2240} & \frac{27}{280} & -\frac{729}{2240} & \frac{34}{35} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \frac{10273}{20160} & -\frac{23}{504} & \frac{271}{60480} \\ \frac{1621}{1260} & \frac{233}{630} & -\frac{37}{3780} \\ \frac{1161}{2240} & \frac{81}{56} & \frac{137}{448} \end{pmatrix}.$$

Оценим погрешность полученных формул (9) и (10), принимая во внимание, что максимальный порядок аппроксимации составляет величину  $m+s$ , поэтому в первом случае ( $3 \times 3$ ) при разложении решений в ряды ограничимся членами порядка  $O[\tau^7]$ :

$$\frac{191 x^{(7)}[t_n] \tau^6}{60480} + O[\tau^7], -\frac{x^{(7)}[t_n] \tau^6}{756} + O[\tau^7], \\ \frac{29 x^{(7)}[t_n] \tau^6}{2240} + O[\tau^7], \quad (11)$$

а для второго метода ( $4 \times 3$ ) увеличим количество членов в разложении до членов порядка  $O[\tau^8]$  и получим оценки погрешности аппроксимации по всем точкам рассчитываемого блока.

$$\frac{191 x^{(8)} [t_n] \tau^7}{120960} + O[\tau^8], -\frac{x^{(8)} [t_n] \tau^7}{756} + O[\tau^8],$$

$$\frac{9 x^{(8)} [t_n] \tau^7}{896} + O[\tau^8]. \quad (12)$$

С учетом того, что рассматриваемые методы являются многошаговыми, для решения нелинейной системы (2) необходимо заранее каким-либо одношаговым методом вычислить значения в опорном блоке (рис. 1). Кроме того, поскольку при вычислении приближенных значений решения задачи Коши в последующих узлах будет использоваться итерационный процесс (5), для ускорения сходимости на первом шаге итерационного процесса используем предикторные формулы Адамса [3]. Выведем их для наших размерностей опорных блоков с учетом, что для первого метода ( $m = 3$ ) в качестве начального приближения необходимо использовать решение в 3-х опорных точках, поэтому предикторные формулы на точках  $\{t_n - 2\tau, F_{n,2}\}, \{t_n - \tau, F_{n,1}\}, \{t_n, F_{n,0}\}$  для вычисления приближенного значения решения на первом шаге будут иметь вид:

$$u_{n,1} = u_{n,0} + \frac{\tau}{12} (5 F_{n,2} - 16 F_{n,1} + 23 F_{n,0}), \quad (13)$$

$$u_{n,2} = u_{n,0} + \frac{\tau}{3} (7 F_{n,2} - 20 F_{n,1} + 19 F_{n,0}),$$

$$u_{n,3} = u_{n,0} + \frac{3\tau}{4} (9 F_{n,2} - 24 F_{n,1} + 19 F_{n,0}).$$

При решении методом  $m = 4, s = 3$  формулы предиктора на точках

$$\{t_n - 3\tau, F_{n,2}\}, \{t_n - 2\tau, F_{n,2}\}, \{t_n - \tau, F_{n,1}\}, \{t_n, F_{n,0}\}$$

для вычисления приближенного решения на первом шаге будут иметь вид:

$$u_{n,1} = u_{n,0} + \frac{\tau}{24} (-9 F_{n,3} + 37 F_{n,2} - 59 F_{n,1} + 55 F_{n,0}), \quad (14)$$

$$u_{n,2} = u_{n,0} + \frac{\tau}{3} (-8 F_{n,3} + 31 F_{n,2} - 44 F_{n,1} + 27 F_{n,0}),$$

$$u_{n,3} = u_{n,0} - \frac{3\tau}{8} (25 F_{n,3} - 93 F_{n,2} + 123 F_{n,1} - 63 F_{n,0}).$$

В качестве примера можно рассмотреть тестовую задачу [4, 15] вида

$$x'(t) = \lambda (\sin(4t) - x(t)) + 4 \cos(4t),$$

$$x(0) = 1, \quad 0 \leq t \leq 10 \quad (15)$$

с известным точным решением

$$x(t) = e^{-\lambda t} + \sin(4t). \quad (16)$$

Поскольку точное решение известно, то в качестве значений в  $m$  начальных точках используем точные решения. Построим графики численного решения и накопленных погрешностей, полученные с помощью методов (9–10), используя в качестве

начальных приближений для значений очередного блока решения, полученные с помощью (13–14).

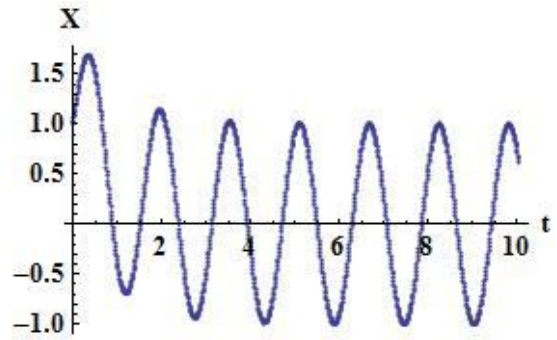


Рис. 3. Графики точного и численного решений (15)

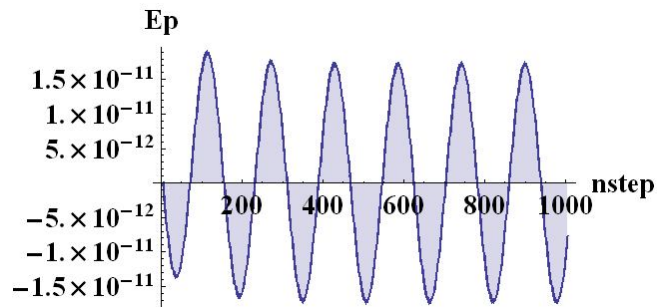


Рис. 4. График накопленной погрешности решения (15) методами (9, 13)

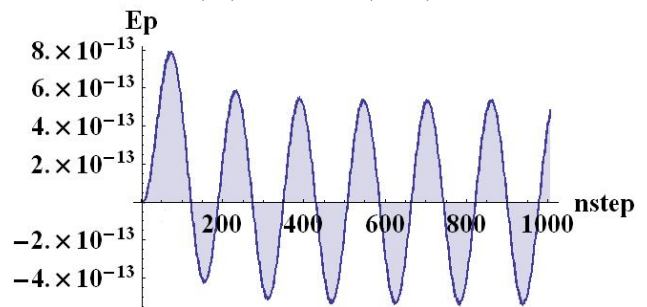


Рис. 5. График накопленной погрешности решения (15) методами (10, 14)

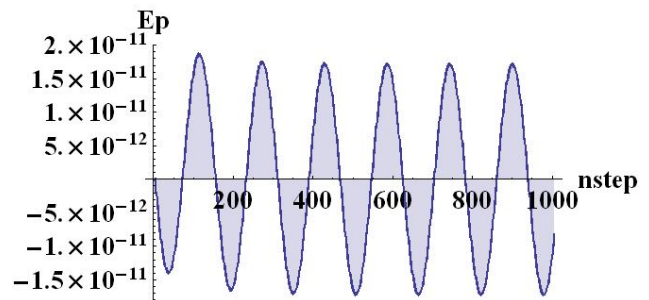


Рис. 6. График оценки главного члена локальной погрешности (15) по результатам решения методами (9, 13) и (10, 14)

Получим оценку погрешности аппроксимации с использованием выражений для невязок (11) и точного решения (16) на отрезке  $0 \leq t \leq 10$  при решении задачи (15) методами (9,13) с шагом  $\tau = 0.01$ . Погрешность аппроксимации в этом случае может быть оценена как

$$\varepsilon = \frac{29 x^{(7)} [t_n] \tau^6}{2240} = 2.13771 * 10^{-10}.$$

Исходя из выражений для невязок (12) при решении задачи (15) методами (10,14), погрешность аппроксимации с тем же шагом  $\tau = 0.01$  оценивается как

$$\varepsilon = \frac{8x^{(8)} [t_n] \tau^7}{896} = 5.849262 * 10^{-12}.$$

В рассматриваемых случаях максимальные значения оценок локальных погрешностей приближенных решений близки к соответствующим значениям действительных накопленных погрешностей (см. рис. 4–5). Построенный на основании соотношения (8) график оценки главного члена локальной погрешности (рис. 6) свидетельствует о представительности полученной оценки, которая, при этом, была сформирована без использования точного решения. Получаемая таким образом оценка локальной погрешности позволяет обеспечивать управление шагом интегрирования в тех случаях, когда искомая функция имеет различную скорость изменения на отдельных участках отрезка интегрирования.

### Заключение

Проведенные исследования позволили предложить новый подход к решению проблемы параллельного управления точностью интегрирования на основе вариации длины шага. Предлагаемый подход основан на использовании многошаговых многоточечных коллокационных блочных методов с изменяемыми размерностями опорных блоков. Вовлечение в процесс вычислений дополнительной точки в опорном блоке не приводит к увеличению размерности системы, но, в то же время, позволяет получить в совпадающих точках расчетного блока решения, посчитанные с разными порядками точности. Получение численных решений с разными порядками аппроксимации в совпадающих точках расчетного блока позволило формировать оценки погрешности численного интегрирования без привлечения точного решения, которое, во многих случаях, вообще неизвестно. Для формирования вычислительных схем разработана программная система, основанная на использовании интегро-интерполяционного метода, позволяющая генерировать коэффициенты для разностных уравнений с произвольными размерностями расчетных и опорных блоков. Численное решение для каждого расчетного блока осуществлялось с помощью итерационного процесса. Начальные приближения определялись с помощью предикторного метода Адамса, что позволило ускорить сходимость итерационного процесса.

На известных тестовых задачах выполнена параллельная реализация предложенных алгоритмов.

### Литература

1. Schmitt, B. A. *Parallel two-step ROW-methods for stiff delay differential equations [Text] / B. A. Schmitt, R. Weiner, S. Jebens // Applied Numerical Mathematics. – 2009. – Vol. 59, № 8. – P. 1768–1778.*
2. Hairer, E. *Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems [Text] / E. Hairer, G. Wanner. – Springer-Verlag, 1999. – 685p. – ISBN 5-03-003117.*
3. Hairer, E. *Solving Ordinary Differential Equations I. Nonstiff Problems Springer [Text] / E. Hairer, S. Nørsett, G. Wanner. – Springer Verlag, 1993. – 528 p. . – ISBN 5-03-001179.*
4. Вайнер, Р. *Эффективное управление точностью численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений и оптимальные интерполяционные равнозначные блочные методы с переменным шагом [Текст] / Р. Вайнер, Г. Ю. Куликов, // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2014. – Т. 54, № 4. – P. 591–607.*
5. Фельдман, Л. П. *Параллельные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений блочными разностными схемами [Текст] / Л. П. Фельдман // Известия Южного федерального университета. – 2007. – Т. 75, № 3. – С. 47–60.*
6. Дмитриева, О. А. *Разработка и исследование параллельных коллокационных блочных методов [Текст] / О. А. Дмитриева, Л. П. Фельдман // Научные труды Донецкого национального технического университета. – 2012. – № 16(204). – С. 28–35.*
7. Дмитриева, О. А. *Разработка и обоснование устойчивости параллельных методов моделирования динамических систем с введением коллоцирования [Текст] / О. А. Дмитриева // Искусственный интеллект. – 2014. – № 3 (61). – С. 488 – 494.*
8. Дмитриева, О. А. *Управление шагом интегрирования при параллельной реализации обобщенных коллокационных блочных методов [Текст] / О. А. Дмитриева // Радиоэлектронные и компьютерные системы. – 2014. – № 5 (69). – С. 119–123.*
9. Дмитриева, О. А. *Разработка и обоснование параллельных одношаговых блочных методов типа Биккарта [Текст] / О. А. Дмитриева // Системы обработки информации. – 2014. – № 7(123). – С. 121–126.*
10. Dmitrieva, O. *Parallel Step Control. Development of parallel algorithms of the step variation for simulation of stiff dynamic systems [Text] / O. Dmitrieva, L. Feldman. – Lambert Academic Publishing. – 2013. – 72 p. – ISBN 978-3-659-38425-7.*
11. Дмитриева, О. А. *Разработка многошаговых параллельных коллокационных блочных методов с использованием интерполяционных полиномов Эрмита [Текст] / О. А. Дмитриева // Радиоэлектрон-*

ные и компьютерные системы. – 2013. – № 5 (64). – С. 243–249.

12. Дмитрієва, О. А. Паралельне моделювання динамічних об'єктів зі сконцентрованими параметрами [Текст] / О. А. Дмитрієва. – Харків: «Ноулідж». – 2014. – 336 с. – ISBN 978-617-579-990-1.

13. Фельдман, Л. П. Параллельные колокационные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений [Текст] / Л. П. Фельдман // Научные труды Донецкого нацио-

нального технического университета. – 2008. – № 9. – С. 33–40.

14. Самарский, А. А. Численные методы [Текст] / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М.: Наука, 1989. – 432 с. – ISBN 5-02-013996-3.

15. Prothero, A. On the stability and accuracy of onestep methods for solving stiff systems of ordinary differential equations [Text] / A. Prothero, A. Robinson // Mathematics of Computation. – 1974. – Vol. 28, № 125. – P. 145–162.

Поступила в редакцію 02.03.2015, рассмотрена на редколлегии 20.03.2015

## ПАРАЛЕЛЬНЕ КЕРУВАННЯ ТОЧНІСТЮ ЧИСЕЛЬНОГО ІНТЕГРУВАННЯ НА ОСНОВІ ВАРІАЦІЇ РОЗМІРНОСТІ БЛОКУ

*О. А. Дмитрієва*

У роботі запропоновано новий підхід до керування точністю інтегрування, який засновано на паралельній реалізації колокаційних блокових методів зі змінюваними розмірностями опорних блоків. Формування розрахункових схем здійснювалося на основі багатокрокових колокаційних блокових методів. Розроблено програмну систему, що дозволяє згенерувати різниці схеми використовуваних методів з довільними розмірностями розрахункових і опорних блоків з відповідними матрицями коефіцієнтів. Чисельне розв'язання для кожного розрахункового блоку реалізовувалося на основі використання ітераційного процесу. Блоковий підхід при пошуку чисельного розв'язку дозволив просуватися на множину точок, кількість яких збігалася з розмірністю розрахункового блоку, що забезпечувало перевагу методів навіть при послідовній реалізації. Одержання чисельних розв'язків із різними порядками апроксимації в співпадаючих точках розрахункового блоку дозволило формувати оцінки похибок чисельного інтегрування. Показано, що оцінки похибок апроксимації, які отримані з використанням виразів для відхилів наближених розв'язків, близькі до відповідних значень дійсних накопичених похибок і можуть бути сформовані без використання точного розв'язку. На відомих тестових завданнях виконано паралельну реалізацію запропонованих алгоритмів.

**Ключові слова:** задача Коші, точки колокації, розрахунковий блок, крок інтегрування, локальна похибка, порядок апроксимації.

## PARALLEL CONTROL ACCURACY OF THE NUMERICAL INTEGRATION BASED ON VARIATIONS DIMENSION BLOCK

*O. A. Dmitrieva*

In article proposes a new approach to the management of precision integration, based on the parallel implementation of collocation block methods with variable dimensions of the reference blocks. Formation of design models was based on the multi-step collocation methods block. Developed a software system that allows you to generate a difference schemes used methods with arbitrary dimensions of settlement and bearing units with corresponding coefficient matrices. Numerical solution for each design block was realized through the use of an iterative process. To speed up the convergence of the initial approximation is determined using the method of Adams predictor. Block approach in finding numerical solutions allowed to move on the set of points, the number of which coincides with that of the calculated block that provides the advantages of methods, even with consistent implementation. Obtaining numerical solutions with different orders of approximation in the calculation of matching points allowed to form block error estimates for numerical integration. It is shown that the approximation error estimates obtained using the expressions for the residuals approximate solutions close to the corresponding values of the actual accumulation of errors and can be formed without using the exact solution. Parallel implementation of the proposed algorithms was made on the base of known tests.

**Key words:** Cauchy problem, collocation points, computation block, integration step, local error, the order of approximation.

Дмитрієва Ольга Анатольевна – д-р техн. наук, професор кафедри прикладної математики та інформатики, Донецький національний технічний університет, Красноармейск, Україна, приглашенный профессор Исследовательского центра моделирующих технологий (SRC SimTech), университет Штуттгарта, Германия, e-mail: dmitrieva.donntu@gmail.com.