УДК 621.38

Д. П. ВАСИЛЬЧУК, С. В. ХУТОРНЕНКО, Д. А. СЕМЕНЕЦ, В. М. КОМОЛОВ

Учебно-научный профессионально-педагогический институт Украинской инженерно-педагогической академии, Украина

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОЛЕБАНИЙ ПЬЕЗОЭЛЕМЕНТА НА ОСНОВЕ МАТРИЧНО-ОПЕРАТОРНОГО МЕТОДА

Рассмотрены математические модели расчёта толщинно-сдвиговых колебаний пьезоэлектрических пластин. Проанализированы их преимущества и недостатки. Предложена математическая модель толщинно-сдвиговых колебаний кварцевых пластин на основе решения уравнений состояния, движения и электростатики повернутого Y-среза кварца матрично-операторным методом, учитывающая зависимость электрических и механических граничных условий от поперечной координаты. Получены аналитические выражения для механического напряжения, механического смещения, потенциала, электрического смещения.

Ключевые слова: *толщинно-сдвиговые колебания, ПКС, Y-среза кварца, матричная экспонента, матрично-операторный метод.*

Введение

На современном рынке измерительных преобразователей группа пьезорезонансных датчиков по многообразию решаемых задач является одной из наиболее обширных. Она включает большое число средств измерения механических параметров (усилий, давлений, ускорений, массы, угловых скоростей, моментов, деформаций и т.п.), тепловых приборов (термодатчиков, датчиков расхода, измерителей электрических параметров, датчиков тепловых потоков), устройств для контроля составов, концентраций газов, влажности, микромасс, датчиков определения толщины плёнок в микроэлектронике. Пьезорезонансные методы широко используются в экспериментальных исследованиях. По разрешающей способности и точности эти устройства зачастую превосходят преобразователи, выполненные на других физических принципах.

Техника пьезорезонансных датчиков постоянно совершенствуется. Частотные измерительные преобразователи неэлектрических величин на базе управляемых пьезорезонансных колебательных систем (ПКС) находят широкое применение в современной измерительной технике на базе микропроцессорных устройств [1, 2].

Вместе с тем, построение измерительных преобразователей силы и приводимых к ней физических величин (давления, перемещения и др.), использующих эффект управления резонансной частотой ПКС, связано с решением сложной задачи сопряжения силопередающего элемента с кварцевым пьезоэлементом. Решение данной задачи требует усовершенствования существующих математических моделей колебаний пьезоэлемента учитывающих нелинейность межэлектродного зазора и массонагрузки, что позволит повысить точность определения электрических параметров ПКС. Это, в свою очередь, позволит разрабатывать измерительные генераторы с улучшенными характеристиками.

Анализ публикаций

Толщинно-сдвиговые колебания (TSh) пьезоэлектрических пластин широко используются в качестве мод колебаний в пьезоэлектрических резонаторах, фильтрах и датчиках. Фундаментальные работы в данном направлении выполнили H. F. Tiersten, R. D. Mindiin и др. [3, 4], математические модели, описывающие данный тип колебаний, прошли проверку временем и хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Анализ математических моделей показал, что они фактически делятся на два типа: одномерные математические модели, основанные на точном решении упрощённой трёхмерной модели уравнений колебания пьезоэлектрических пластин и модели, основанные на аппроксимации двумерных уравнений, полученных путём разложения величин характеризующих электроупругое поле в ряд.

Первый тип математических моделей достаточно подробно представлен в работах [5–7], где представлены точные решения одномерной модели тонкой пьезоэлектрической пластины бесконечных размеров, с учётом массонагрузки и межэлектродного зазора, однако не учитывает изменение потенциала и массонагрузки в плоскости пьезоэлемента.

В работе [3] представлена математическая модель второго типа, получены выражения для определения резонансной частоты TSh колебаний.

В работе [8] в отличие от [5] учтено влияние массонагрузки, получены выражения для резонансных частот колебания ПЭ, установлен факт уменьшения резонансной частоты TSh колебаний при увеличении массонагрузки. В [9], основываясь на линейной аппроксимации TSh колебаний, предложенной Миндлином, получено решение для резонансной частоты, в случае квадратичного закона распределения массонагрузки вдоль длины и ширины ПЭ. Установлено, что резонансная частота чувствительна к неравномерности массонагрузки на поверхности ПЭ.

Математические модели TSh колебаний пьезоэлектрических пластин второго типа были получены на основе приближенной теории, предложенной Миндлином и др. [10]. При этом трёхмерные уравнения состояния пьезоэлектрической пластины сводились к двумерным с помощью вариационного принципа Гамильтона и с использованием разложения механического смещения и электрического потенциала в степенной ряд по координате, характеризующей толщину. Недостатком этой теории является, то, что при сведении трёхмерных уравнений состояния к системе двумерных используется линейная аппроксимация TSh колебаний вдоль толщинной координаты, а как известно из точной трёхмерной теории TSh колебания вдоль толщины распространяются по синусоидальному закону [11]. Так как аппроксимация линейной функцией является довольно грубой, возникает необходимость во введении корректирующих коэффициентов, которые оказываются различными для разных ПЭ и их срезов. Кроме того к недостаткам данной теории можно отнести и тот факт, что она более точно описывает только низкочастотные колебания ПЭ, а погрешность расчёта резонансной частоты колебаний возрастает при переходе в высокочастотную область [10]. Первый из указанных недостатков устраняется, если TSh колебание вдоль толщинной координаты раскладывать в ряд по тригонометрическим функциям, но в таком случае полученные уравнения состояния ПЭ будут хорошо описывать TSh колебания в высокочастотной области и их точность будет меньше в низкочастотной [10].

Целью данной работы является разработка математической модели, описывающей TSh колебания повернутого Y-среза кварца, на основе матрично-операторного метода, который практически не использовался для расчёта электроупругих полей в пьезоэлектрических пластинах, за исключением работы [12]. Кроме того математическая модель должна учитывать зависимость электрических и механических граничных условий от поперечной координаты (в нашем случае $T_{12}(h,x_3)$, $\varphi(h,x_3)$).

Математическая модель TSh колебаний повернутого Y-среза кварца

В данной работе для построения математической модели будет использован матрично-операторный метод решения краевых задач линейной теории пьезоэлектричества, представленный в [12].

Система уравнений состояния, движения и электростатики повернутого Y-среза кварца для случая, когда используется только одна компонента механического смещения $u_1(x_2,x_3) \neq 0$, а остальные $u_2(x_2,x_3)=u_3(x_2,x_3)=0$, согласно [13] будет следующей:

$$\begin{cases} T_{21}=C_{56}\dfrac{\partial u_1}{\partial x_3}+C_{66}\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}+e_{26}\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2}+e_{36}\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_3}, \\ T_{31}=C_{55}\dfrac{\partial u_1}{\partial x_3}+C_{56}\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}+e_{25}\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2}+e_{35}\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_3}, \\ D_2=e_{25}\dfrac{\partial u_1}{\partial x_3}+e_{26}\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}-\varepsilon_{22}\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2}-\varepsilon_{23}\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_3}, \\ D_3=e_{35}\dfrac{\partial u_1}{\partial x_3}+e_{36}\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}-\varepsilon_{23}\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2}-\varepsilon_{33}\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_3}. \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \rho\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}=\dfrac{\partial T_{21}}{\partial x_2}+\dfrac{\partial T_{31}}{\partial x_3}, \\ \dfrac{\partial D_3}{\partial x_3}+\dfrac{\partial D_2}{\partial x_2}=0, \end{cases} \quad (2)$$

где x_2, x_3 - направления вдоль толщины и ширины ПЭ соответственно,

$c_{ij}, e_{kij}, \varepsilon_{ij}$ - упругие, пьезоэлектрические и диэлектрические постоянные ПЭ;

ρ, D_i, U_j, φ - плотность пьезоэлемента, электрическое и механическое смещение вдоль координатных осей и электрический потенциал соответственно;

T_{ij} - элементы тензора механического напряжения.

Следуя методике, изложенной в [12] выразим из 2-го и 4-го уравнений системы (1) производные $\dfrac{\partial u_1}{\partial x_3}$ и $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_3}$, затем полученные выражения подставим в 1-е и 2-е уравнение системы (1), исключив, таким образом, из этих уравнений $\dfrac{\partial u_1}{\partial x_3}$ и $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_3}$. Далее необходимо выражения для T_{21} и D_2, не содержащие производных по координате x_3, подставить в систему (2). В результате получим расчётную систему уравнений в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = -\alpha_4 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \alpha_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \alpha_1 T_{31} + \alpha_2 D_3, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = \alpha_7 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \alpha_6 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \alpha_2 T_{31} - \alpha_5 D_3, \\ \frac{\partial T_{31}}{\partial x_3} = -\rho\omega^2 u_1 - \alpha_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} - \alpha_{10} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} - \alpha_8 \frac{\partial T_{31}}{\partial x_2} - \alpha_9 \frac{\partial D_3}{\partial x_2}, \\ \frac{\partial D_3}{\partial x_3} = -\alpha_{15} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} - \alpha_{14} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} - \alpha_{12} \frac{\partial T_{31}}{\partial x_2} - \alpha_{13} \frac{\partial D_3}{\partial x_2}, \end{cases} \tag{3}$$

где

$$\alpha_1 = \frac{\varepsilon_{33}}{e_{35}^2 + c_{55}\varepsilon_{33}},\ \alpha_2 = \frac{e_{35}}{e_{35}^2 + c_{55}\varepsilon_{33}},\ \alpha_3 = \frac{(e_{35}\varepsilon_{23} - e_{25}\varepsilon_{23})}{e_{35}^2 + c_{55}\varepsilon_{33}},$$

$$\alpha_4 = \frac{(e_{35}e_{36} - c_{56}\varepsilon_{33})}{e_{35}^2 + c_{55}\varepsilon_{33}},\ \alpha_5 = \frac{c_{55}}{e_{35}^2 + c_{55}\varepsilon_{33}},\ \alpha_6 = \frac{(e_{25}e_{35} - c_{55}\varepsilon_{23})}{e_{35}^2 + c_{55}\varepsilon_{33}},$$

$$\alpha_7 = \frac{(e_{36}c_{55} - e_{35}c_{56})}{e_{35}^2 + c_{55}\varepsilon_{33}},\ \alpha_8 = c_{56}\alpha_1 + e_{36}\alpha_2,\ \alpha_9 = -c_{56}\alpha_2 + e_{36}\alpha_5,$$

$$\alpha_{10} = e_{26} + c_{56}\alpha_3 - e_{36}\alpha_6,\ \alpha_{11} = c_{66} - c_{56}\alpha_4 + e_{36}\alpha_7,$$

$$\alpha_{12} = -e_{25}\alpha_1 + \varepsilon_{23}\alpha_2,\ \alpha_{13} = e_{25}\alpha_2 + \varepsilon_{23}\alpha_5,\ \alpha_{14} = -e_{25}\alpha_3 + \varepsilon_{22} - \alpha_6\varepsilon_{23},$$

$$\alpha_{15} = -e_{26} + e_{25}\alpha_4 + \alpha_7\varepsilon_{23}.$$

Следует отметить, что расчётная система уравнений (3) представлена именно в таком виде, чтобы в дальнейшем при сведении данной двумерной системы уравнений к одномерной матричная экспонента раскладывалась в степенной ряд по координате x_3. В работе [12] матричная экспонента раскладывалась вдоль координаты x_2, характеризующей толщину ПЭ и, как следствие, полученные решения для TSh колебаний не сохраняли синусоидальную зависимость вдоль координаты x_2, которая вытекает из точной трёхмерной модели [11].

Если ввести векторы $U_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ \varphi \end{bmatrix}$ и $U_2 = \begin{bmatrix} T_{31} \\ D_3 \end{bmatrix}$, то систему (3) можно представить в матричной форме:

$$\begin{cases} \frac{\partial U_1}{\partial x_3} = M_{11}U_1 + M_{12}U_2, \\ \frac{\partial U_2}{\partial x_3} = M_{21}U_1 + M_{22}U_2, \end{cases} \tag{4}$$

где

$$M_{11} = \begin{vmatrix} -\alpha_4 \frac{\partial}{\partial x_2} & \alpha_3 \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \alpha_7 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} & -\alpha_6 \frac{\partial}{\partial x_2} \end{vmatrix},\ M_{12} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & -\alpha_5 \end{vmatrix},$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} -\rho\omega^2 - \alpha_{11} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} & \alpha_{10} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \\ \alpha_{15} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} & \alpha_{14} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \end{vmatrix},\ M_{22} = \begin{vmatrix} -\alpha_8 \frac{\partial}{\partial x_2} & \alpha_9 \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \alpha_{12} \frac{\partial}{\partial x_2} & -\alpha_{13} \frac{\partial}{\partial x_2} \end{vmatrix}$$

- матрицы операторов.

Общее решение системы (4) представляется через матричную экспоненту в виде:

$$\begin{vmatrix} U_1 \\ U_2 \end{vmatrix} = e^{Mx_3} \begin{vmatrix} C_1 \\ C_2 \end{vmatrix}, \tag{5}$$

где $\begin{vmatrix} C_1 \\ C_2 \end{vmatrix}$ - произвольный вектор, $M = \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{vmatrix}$.

Для задач с начальными условиями (задачи Коши) $\begin{vmatrix} C_1 \\ C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} U_{10} \\ U_{20} \end{vmatrix}$, где U_{10}, U_{20} - значения векторов U_1, U_2 в срединной плоскости $x_3 = 0$.

Представим решение (5) в следующем виде:

$$\begin{vmatrix} U_1 \\ U_2 \end{vmatrix} = e^{Mx_3} \begin{vmatrix} \bar{U}_{10} \\ \bar{U}_{20} \end{vmatrix}, \tag{6}$$

где элементы вектора столбца $\bar{U}_{10}, \bar{U}_{20}$ имеют физический смысл решений для U_1, U_2 в плоскостях сечений ортогональных оси x_3.

Представим матричную экспоненту в виде степенного ряда $e^{Mx_3} = E_4 + Mx_3 + M^2 \frac{x_3^2}{2} + \ldots$ и ограничимся двумя членами в этом разложении. Тогда:

$$\begin{cases} U_1 = (E_2 + M_{11}x_3)\bar{U}_{10} + M_{12}x_3\bar{U}_{20}, \\ U_2 = M_{21}x_3\bar{U}_{10} + (E_2 + M_{22}x_3)\bar{U}_{20}, \end{cases} \tag{7}$$

где E_2 - единичная матрица второго порядка.

Если на боковой поверхности пластины заданы механическое напряжения T_{31} и электрическое смещение D_3, то, принимая в (7) $x_3 = \pm l$, можно записать систему дифференциальных уравнений относительно векторов $\bar{U}_{10}, \bar{U}_{20}$, которая после элементарных преобразований приобретает вид:

$$\begin{cases} \frac{U_2^+ + U_2^-}{2} = E_2\bar{U}_{20}, \\ \frac{U_2^+ - U_2^-}{2} = M_{21}l\bar{U}_{10} + M_{22}l\bar{U}_{20}, \end{cases} \tag{8}$$

где U_2^+, U_2^- - известные значения вектора $U_2 = \begin{bmatrix} T_{31} \\ D_3 \end{bmatrix}$ при $x_3 = \pm l$ соответственно.

Боковая поверхность ПЭ свободна от механических воздействий, следовательно, можно положить $T_{31} = 0$, кроме того, можно положить $D_3 = 0$, так как боковая поверхность пьезоэлемента граничит с воздухом, диэлектрическая проницаемость которого значительно меньше постоянных ε_{ij} пьезоэлемента. Следовательно, система (8) примет вид:

$$\begin{cases} 0=E_2\bar{U}_{20}, \\ 0=M_{21}\bar{U}_{10}+M_{22}\bar{U}_{20}. \end{cases} \quad (9)$$

Решение этой системы уравнений с учётом (4):

$$\bar{U}_{10} \to \begin{cases} \bar{u}_{10}=C_1\sin(\eta x_2)+C_2\cos(\eta x_2), \\ \bar{\varphi}_0=-\bar{u}_{10}\frac{\alpha_{15}}{\alpha_{14}}+C_3x_2+C_4, \\ \bar{T}_{31}=0, \\ \bar{D}_{30}=0, \end{cases} \quad (10)$$

где $\eta=\sqrt{\frac{\rho}{\alpha_{11}-\frac{\alpha_{15}\alpha_{10}}{\alpha_{14}}}}\omega$ - волновое число.

Соотношения (10) устанавливают законы изменения $\bar{u}_{10},\bar{\varphi}_0,\bar{T}_{31},\bar{D}_{30}$ в любой плоскости, ортогональной оси x_3. В каждой такой плоскости решения будут отличаться друг от друга только постоянными C_1,C_2,C_3,C_4, следовательно, общее решение для TSh колебания повернутого Y-среза кварца можно записать в виде:

$$\begin{cases} u_1(x_2,x_3)=C_1(x_3)\sin(\eta x_2)+C_2(x_3)\cos(\eta x_2), \\ \varphi(x_2,x_3)=-u_1(x_2,x_3)\frac{\alpha_{15}}{\alpha_{14}}+C_3(x_3)x_2+C_4(x_3), \\ T_{31}(x_2,x_3)=0, \\ D_3(x_2,x_3)=0. \end{cases} \quad (11)$$

Законы изменения $T_{21}(x_2,x_3)$ и $D_2(x_2,x_3)$ можно установить, если выражения для $u_1(x_2,x_3)$ и $\varphi_0(x_2,x_3)$ из (11) подставить в уравнения для $T_{21}(x_2,x_3)$ и $D_2(x_2,x_3)$, которые получались на этапе исключения из них производных по координате x_3 [12]. В результате получаются следующие выражения для $T_{21}(x_2,x_3)$ и $D_2(x_2,x_3)$:

$$\begin{cases} T_{21}(x_2,x_3)=\eta\alpha_{17}[C_1(x_3)\cos(\eta x_2)- \\ \quad -C_2(x_3)\sin(\eta x_2)]+\alpha_{10}C_4(x_3), \\ D_2(x_2,x_3)=\alpha_{14}C_4(x_3), \end{cases} \quad (12)$$

где $\alpha_{17}=\frac{(\alpha_{11}\alpha_{14}-\alpha_{10}\alpha_{15})}{\alpha_{14}}$.

Анализ разработанной модели TSh колебаний повернутого Y-среза кварца

Проверим достоверность полученной математической модели для хорошо изученного случая [5] бесконечной пьезоэлектрической пластины толщиной $2h$ (толщина параллельна оси x_2) с граничными условиями $T_{21}=0$ и $\varphi=\pm\varphi_0\cos\omega t$ при $x_2=\pm h$. После подстановки граничных условий в $T_{21}(x_2,x_3)$ и $\varphi(x_2,x_3)$ систем (11) и (12) получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} -\frac{\alpha_{15}}{\alpha_{14}}\left[C_1(x_3)\sin(\eta h)+C_2(x_3)\cos(\eta h)\right]+C_3(x_3)h+ \\ \quad +C_4(x_3)=\varphi_0, \\ \frac{\alpha_{15}}{\alpha_{14}}\left[C_1(x_3)\sin(\eta h)-C_2(x_3)\cos(\eta h)\right]-C_3(x_3)h+ \\ \quad +C_4(x_3)=-\varphi_0, \\ \eta\alpha_{17}\left[C_1(x_3)\cos(\eta h)-C_2(x_3)\sin(\eta h)\right]+ \\ \quad +\alpha_{10}C_4(x_3)=0, \\ \eta\alpha_{17}\left[C_1(x_3)\cos(\eta h)+C_2(x_3)\sin(\eta h)\right]+ \\ \quad +\alpha_{10}C_4(x_3)=0. \end{cases} \quad (13)$$

Из (13) определяем постоянные $C_1(x_3),C_2(x_3),C_3(x_3),C_4(x_3)$:

$$C_1(x_3)=\frac{\alpha_{10}\varphi_0}{-h\eta\cos(\eta h)\alpha_{17}-\sin(\eta x_2)\frac{\alpha_{10}\alpha_{15}}{\alpha_{14}}},$$

$$C_4(x_3)=\frac{\eta\alpha_{17}\varphi_0}{h\eta\alpha_{17}+\tan(\eta x_2)\frac{\alpha_{10}\alpha_{15}}{\alpha_{14}}}, \quad (14)$$

$$C_2(x_3)=0, C_3(x_3)=0.$$

Резонанс наступает при $C_1(x_3)\to\infty$, то есть знаменатель $C_1(x_3)$ приравниваем к нулю и после очевидных преобразований получим трансцендентное уравнение:

$$\mathrm{ctg}(\eta h)=\frac{\alpha_{18}}{\eta h}, \quad (15)$$

где $\alpha_{18}=-\frac{\alpha_{10}\alpha_{15}}{\alpha_{14}\alpha_{17}}$.

Трансцендентное уравнение для исследуемой пьезоэлектрической пластины с такими же граничными условиями, полученное в [10], имеет следующий вид:

$$\mathrm{ctg}(\xi h)=\frac{\bar{k}_{26}^2}{\eta h}, \quad (16)$$

где $\bar{k}_{26}^2=\frac{k_{26}^2}{1+k_{26}^2}$ - модифицированный коэффициент электромеханической связи;

$\xi=\sqrt{\frac{\rho}{c_{66}(1+k_{26}^2)}}\omega$ - волновое число.

Сопоставляя выражения (15) и (16) можно сделать вывод, что, несмотря на различную структуру коэффициентов α_{18} и $\bar{k}_{26}^2$, их числовые значения незначительно отличаются друг от друга, то же относится и к коэффициентам $\sqrt{\frac{\rho}{\alpha_{11}-\frac{\alpha_{15}\alpha_{10}}{\alpha_{14}}}}$ и

$\sqrt{\frac{\rho}{c_{66}(1+k_{26}^2)}}$, входящих в волновые числа η и ξ.

Заключение

В данной работе получил дальнейшее развитие матрично-операторный метод решения краевых задач линейной теории пьезоэлектричества. Данный метод позволяет свести систему двумерных уравнений колебания пьезоэлектрических пластин к системе одномерных уравнений. Использование матрично-операторного метода, в отличие от известных методов решения уравнений колебания пьезоэлектрических пластин, позволяет получить уравнения, описывающие TSh колебания ПЭ, с учётом зависимости электрических $D_2(x_2,x_3),\varphi(x_2,x_3)$ и механических граничных условий $T_{12}(x_2,x_3)$ от поперечной координаты x_3 на поверхности ПЭ ($x_2=h$).

Получена математическая модель толщинно-сдвиговых колебаний повернутого Y-среза кварца с учётом граничных условий, учитвающих неравномерность распределения механического напряжения $T_{12}(h,x_3)$ и электрического потенциала $\varphi(h,x_3)$ на поверхностях пьзоэлемента, в которой, в отличие от существующих, учтено влияние вышеуказанных граничных условий на резонансную частоту колебаний пьезоэлемента.

Литература

1. Taranchuk, A. A. Design Methodology to Construct Information Measuring Systems Built on Piezoresonant Mechanotrons with a Modulated Interelectrode Gap the monograph [Text] / A. A. Taranchuk, S. K. Pidchenko // Applied Measurement System. – 2012. – Vol. 12. – P. 229–258.

2. Pidchenko, S. K. Utilization Features of the Mexanotron for Information Measurement Systems [Text] / S. K. Pidchenko, A. Taranchuk, A. Opolska // Modern Problems of Radio Engineering, Telecommunication and Computer Science. – 2010. – Vol. 1. – P. 358.

3. Mindlin, R. D. High frequency vibrations of piezoelectric crystal plates [Text] / R. D. Mindlin // Int. J. Solids Structures. – 1972. – Vol. 8. – P. 895-906.

4. Tiersten, H. F. Linear Piezoelectric Plate Vibrations: Elements of the Linear Theory of Piezoelectricity and the Vibrations of Piezoelectric Plates [Text] / H.F. Tiersten. – Springer US, 1995. – 212 p.

5. Resonant frequency function of thickness-shear vibrations of rectangular crystal plates [Text] / J. Wang, Y. Lijun, P. Qiaoqiao, C. Min-Chiang, D. Jianke // IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency control. – 2011. – Vol. 58, No. 5. – P. 1102-1107.

6. Хуторненко, С. В. Математична модель коливань кварцового п'єзоелемента з міжелектродним зазором і однобічним масонавантаженням [Текст] / С. В. Хуторненко, В. М. Савченко // Системи озброєння і військова техніка. – 2007. – №2(10). – С. 118 – 120.

7. Thickness-shear Vibration of Rotated Y-cut Quartz Plates with Unattached Electrodes and Asymmetric Air Gaps [Text] / Z. Yang, S. Guo, Y. Hu, J. Yang // Philosophical Magazine Letters. – 2009. – Vol. 89, No. 5. – P. 313–321.

8. Thickness-shear vibration of a rectangular quartz plate with partial electrodes [Text] / H. Huijing, J. Yang, J. A. Kosinski, J. Wang // Acta Mechanica Solida Sinica. – 2013. – Vol. 26, No. 2. – P. 121-128.

9. Liu, N. Effects of a Mass Layer With Gradually Varying Thickness on a Quartz Crystal Microbalance [Text] / N. Liu, S. Y. Jiashi, C. Weiqiu // IEEE Sensors journal. – 2011. – Vol. 11, No. 8. – P. 1635-1639.

10. Wang, J. Higher-order theories of piezoelectric plates and applications [Text] / J. Wang, J. Yang // Applied Mechanics Reviews. – 2000. – Vol. 53, No. 4. – P. 87-99.

11. Зеленка, И. Пьезоэлектрические резонаторы на объемных и поверхностных акустических волнах: Материалы, технология, конструкция, применение [Текст] / И. Зеленка. – М. : Мир, 1990. – 584 с.

12. Партон, В. З. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел [Текст] / В. З. Партон, Б. А. Кудрявцев. – М. : Наука. Гл. ред. Физ.-мат. лит., 1988. – 472 с.

13. Yang, J. Special Topics in the Theory of Piezoelectricity [Text] / J. Yang. – Springer Science+Business Media, 2009. – 329 p.

References

1. Taranchuk, A. A., Pidchenko, S. K. Design Methodology to Construct Information Measuring Systems Built on Piezoresonant Mechanotrons with a Modulated Interelectrode Gap the monograph. *Applied Measurement System*, 2012, vol. 12, pp. 229–258.

2. Pidchenko, S. K., Taranchuk, A., Opolska, A. Utilization Features of the Mexanotron for Information Measurement Systems. *Modern Problems of Radio Engineering, Telecommunication and Computer Science,* 2010, vol. 1, pp. 358.

3. Mindlin, R. D. High frequency vibrations of piezoelectric crystal plates. *Int. J. Solids Structures*, 1972, vol. 8, pp. 895-906.

4. Tiersten, H. F. *Linear Piezoelectric Plate Vibrations: Elements of the Linear Theory of Piezoelectricity and the Vibrations of Piezoelectric Plates*. Springer US Publ., 1995. 212 p.

5. Wang, J., Lijun, Y., Qiaoqiao, P., Min-Chiang, C., Jianke, D. Resonant frequency function of thickness-shear vibrations of rectangular crystal plates. *Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency control,* 2011, vol. 58, no. 5, pp. 1102-1107.

6. Hutornenko, S. V., Savchenko, V. M. Matematichna model' kolivan' kvarcovogo p'ezoelementa z mizhelektrodnim zazorom i odnobichnim masonavantazhennjam [Mathematical model of vibrations of quartz piezoelectric element with an interelectrode gap and one-sided mass load]. *Sistemi ozbroєnnja i vijs'kova tehnika – Weapons systems and military equipment*, 2007, vol. 2(10), pp. 118 – 120.

7. Yang, Z., Guo, S., Hu, Y., Yang, J. Thickness-shear Vibration of Rotated Y-cut Quartz Plates with Unattached Electrodes and Asymmetric Air Gaps. *Philosophical Magazine Letters*, 2009, vol. 89, no. 5, pp. 313–321.

8. Huijing, H., Yang, J., Kosinski, J. A., Wang, J. Thickness-shear vibration of a rectangular quartz plate with partial electrodes. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2013, vol. 26, no. 2, pp. 121-128.

9. Liu, N., Jiashi, S. Y., Weiqiu, C. Effects of a Mass Layer With Gradually Varying Thickness on a Quartz Crystal Microbalance. *IEEE Sensors journal*, 2011, vol. 11, no. 8, pp. 1635-1639.

10. Wang, J., Yang, J. Higher-order theories of piezoelectric plates and applications. *Applied Mechanics Reviews,* 2000, vol. 53, no. 4, pp. 87-99.

11. Zelenka, I. *P'ezojelektricheskie rezonatory na obyoemnyh i poverhnostnyh akusticheskih volnah: Materialy, tehnologija, konstrukcija, primenenie* [The piezoelectric resonators on bulk and surface acoustic waves: materials, technology, design, application]. Moscow, Mir Publ., 1990. 584 p.

12. Parton, V. Z., Kudryavtsev, B. A. *Jelektromagnitouprugost' p'ezojelektricheskih i jelektroprovodnyh tel* [Electromagnetoelastic piezoelectric and conductive bodies]. Moscow, Nauka Publ., 1988. 472 p.

13. Yang, Jiashi. *Special Topics in the Theory of Piezoelectricity*. Springer Science+Business Media Publ., 2009. 229 p.

Поступила в редакцию 5.05.2016, рассмотрена на редколлегии 12.05.2016

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ КОЛИВАНЬ П'ЄЗОЕЛЕМЕНТА НА ОСНОВІ МАТРИЧНО-ОПЕРАТОРНОГО МЕТОДА

Д. П. Васильчук, С. В. Хуторненко, Д. А. Семенець, В. М. Комолов

Розглянуто математичні моделі розрахунку товщинно-зрушувальних коливань п'єзоелектричних пластин. Проаналізовано їх переваги і недоліки. Запропоновано математичну модель товщинно-зрушувальних коливань кварцових пластин на основі вирішення рівнянь стану, руху і електростатики повернутого Y-зрізу кварцу матрично-операторним методом, що враховує залежність електричних і механічних граничних умов від поперечної координати. Отримано аналітичні вирази для механічної напруги, механічного зсуву, потенціалу, електричного зсуву.

Ключові слова: товщинно-зрушувальні коливання, ПКС, Y-зріз кварцу, матрична експонента, матрично-операторний метод.

THE MATHEMATICAL MODEL VIBRATIONS OF PIEZOELEMENT BASIS ON THE MATRIX- OPERATOR METHOD

D. P. Vasilchuk, S. V. Hutornenko, D. A. Semenets, V. M. Komolov

A mathematical calculation models of the thickness-shear waves in piezoelectric plates have been explored (studied). Their advantages and shortcomings are analyzed. The mathematical model of the thickness-shear waves in piezoelectric plates on the basis of the solution of state equations, movements and electrostatics of the turned quartz Y-cut by the matrix operator method, considering dependence of electric and mechanical boundary conditions from coordinate was proposed. Analytical expressions for mechanical stress, mechanical shift, potential, electric displacement are developed.

Key words: thickening-shear modes, PVS, quartz Y-cut, matrix exponent, matrix-operator method.

Васильчук Дмитрий Петрович – ст. преп. каф. электромеханических систем, учебно-научный профессионально-педагогический институт Украинской инженерно-педагогической академии, Бахмут, Украина, e-mail: dimauipa@yandex.ru.

Хуторненко Сергей Владимирович - канд. техн. наук, доц. каф. электроники и компьютерных технологий систем управления, учебно-научный профессионально-педагогический институт Украинской инженерно-педагогической академии, Бахмут, Украина, e-mail: zavkaf@rks.kh.ua.

Семенец Дмитрий Анатольевич - канд. техн. наук, доц. каф. электроники и компьютерных технологий систем управления, учебно-научный профессионально-педагогический институт Украинской инженерно-педагогической академии, Бахмут, Украина, e-mail: diamans@i.ua.

Комолов Вячеслав Михайлович - старший преподаватель кафедры электроники и компьютерных технологий систем управления, учебно-научный профессионально-педагогический институт Украинской инженерно-педагогической академии, Бахмут, Украина.

Vasilchuk Dmitry Petrovich - senior lecturer of Department of Electromechanical Systems, Ukrainian Engineering Pedagogics Academy, Educational-scientific Professionally-pedagogical Institute (Bahmut), Ukraine, e-mail: dimauipa@yandex.ru.

Hutornenko Sergey Vladimirovich - Candidate of Technical Science, Assistant Professor of Dept. of Electronics and Computer Technologies of Control Systems, Ukrainian Engineering Pedagogics Academy, Educational-scientific Professionally-Pedagogical Institute (Bahmut), Ukraine, e-mail: e-mail: zavkaf@rks.kh.ua.

Semenets Dmitry Anatolyevich - Candidate of Technical Science, Assistant Professor of Dept. of Electronics and Computer Technologies of Control Systems, Ukrainian Engineering Pedagogics Academy, Educational-scientific Professionally-Pedagogical Institute (Bahmut), Ukraine, e-mail: e-mail: diamans@i.ua.

Komolov Vyacheslav Mikhaylovich - senior lecturer of department of Electronics and Computer Technologies of Control Systems, Ukrainian Engineering Pedagogics Academy, Educational-scientific Professionally-Pedagogical Institute (Bahmut), Ukraine.