**УДК 539.3**

# ВИКОРИСТАННЯ УТОЧНЕНОЇ ТЕОРІЇ ТИПУ ТИМОШЕНКО ДО ПОБУДОВИ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ СТІЙКОСТІ АНІЗОТРОПНИХ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ УТОЧНЕННОЙ ТЕОРИИ ТИПА ТИМОШЕНКО К ПОСТРОЕНИЮ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ УСТОЙЧИВОСТИ АНИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

# USING A REFINED TIMOSHENKO-TYPE THEORY TO THE CONSTRUCTION OF THE STABILITY EQUATIONS OF ANISOTROPIC SHELLS OF REVOLUTION

**Трач В.М., д.т.н., проф.**, **Бондарський О.Г., к.т.н., доц.** (Луцький національний технічний університет), **Хоружий М.М., аспірант** (Національний університет водного господарства та природокористування)

**Трач В.М., д.т.н.**, **проф.**, **Бондарський О.Г., к.т.н., доц.** (Луцкий национальный технический университет), **Хоружий М.М.**, **аспирант** (Национальный университет водного хозяйства и природопользования)

**Trach V.M.**, **doctor of technical sciences, professor**, **Bondarsky O.G., candidate of technical sciences, associate professor** (Lutsk National Technical University), **Horuzhy M.M.**, **graduate student** (National University of Water Management and Natural Resources Use)

**Побудована розв’язувальна система рівнянь стійкості анізотропних оболонок обертання у нормальному вигляді. Для приведення двовимірної задачі до одномірної використано представлення розв’язувальних функцій у вигляді комплексних рядів Фур’є за коловою координатою. Проведені потрібні видозміни у методі ортогоналізації для можливості застосування його до розв’язку диференціальних рівнянь з комплексними коефіцієнтами.**

**Построена разрешающая система уравнений устойчивости анизотропных оболочек вращения в нормальном виде. Для приведения двумерной задачи к одномерной использовано представление решающих функций в виде комплексных рядов Фурье по круговой координатой. Проведенные нужны видоизменения в методе ортогонализации для возможности применения его к решению дифференциальных уравнений с комплексными коэффициентами.**

**Built isolating system stability equations of anisotropic shells of revolution in the normal way. To bring the two-dimensional problem to a one-dimensional representation used isolating functions in a complex Fourier series of a circular coordinate. Conducted necessary modifications in the method of orthogonalization to be able to use it to the solution of differential equations with complex coefficients.**

**Ключові слова:**
Анізотропна оболонка, теорія типу Тимошенко, стійкість.
Анизотропная оболочка, теория типа Тимошенко, устойчивость.
Anisotropic shell, Timoshenko-type theory, stability.

Аналіз літератури з дослідження розв'язків задач теорії анізотропних оболонок [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9] показує, що питання нелінійного напружено-деформованого стану (НДС), стійкості та закритичної поведінки анізотропних оболонок середньої товщини недостатньо вивчені. Відомо, що для розрахунку таких конструкцій слід використовувати уточнені теорії. Найбільш широкого вжитку серед них набула теорія типу Тимошенко [6, 9]. В роботі представлений підхід побудови розв'язувальної системи рівнянь стійкості анізотропних оболонок обертання у нормальному вигляді на основі нелінійної теорії анізотропних оболонок типу Тимошенка.

В [10] представлений підхід до виведення системи рівнянь, що описує нелінійну осесиметричну деформацію анізотропних оболонок

$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial u}{\partial \alpha_1} = b_{11}T_{11} + b_{12}T_{12} + b_{13}M_{11} + b_{14}M_{12} + b'_{11}\frac{u}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} -$$

$$- b'_{11}\frac{w}{R_2} - b''_{11}\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}\theta_1 - \frac{v}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \frac{w}{R_2} + \frac{1}{2}\theta_2^2;$$

$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial v}{\partial \alpha_1} = b_{21}T_{11} + b_{22}T_{12} + b_{23}M_{11} + b_{24}M_{12} + b'_{21}\frac{u}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} -$$

$$- b'_{21}\frac{w}{R_2} - b''_{21}\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}\theta_1 + \frac{v}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{2}\theta_2^2;$$

$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial w}{\partial \alpha_1} = b_{55}Q_{13} + b'_{55}Q_{23} - \frac{u}{R_1} - \theta_1;$$

$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha_1} = b_{31}T_{11} + b_{32}T_{12} + b_{33}M_{11} + b_{34}M_{12} + b'_{31}\frac{u}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} -$$

$$- b'_{31}\frac{w}{R_2} - b''_{31}\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}\theta_1 + \frac{1}{2}\theta_2^2;$$

$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial\theta_2}{\partial\alpha_1}=b_{41}T_{11}+b_{42}T_{12}+b_{43}M_{11}+b_{44}M_{12}+b'_{41}\frac{u}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}-$$

$$-b'_{41}\frac{w}{R_2}-b''_{41}\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\theta_1+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\theta_2+\frac{1}{2}\theta_2^2;$$

$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial T_{11}}{\partial\alpha_1}=-\frac{1}{A_2}\frac{\partial T_{12}^*}{\partial\alpha_2}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}T_{22}-\frac{1}{R_1}Q_{13}-q_1;$$

$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial T_{12}^*}{\partial\alpha_1}=\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}T_{12}^*-\frac{1}{R_2}Q_{23};$$

$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial Q_{13}}{\partial\alpha_1}=-\frac{1}{R_1}T_{11}-\frac{1}{R_2}T_{22}-q_3;$$

$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial M_{11}}{\partial\alpha_1}=\frac{1}{A_2}\frac{\partial M_{12}^*}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}M_{22}+Q_{13}+T_{11}\theta_1;$$

$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial M_{12}^*}{\partial\alpha_1}=\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}M_{12}^*-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}M_{11}-Q_{23}+T_{22}\theta_2. \qquad (1)$$

Нелінійну систему рівнянь (1) можна використовувати для побудови рівнянь, за допомогою яких визначається критичний стан оболонок, пов'язаний з явищем біфуркації.

Позначимо функції, через які виражаються граничні умови при $\alpha_1=const$, наступним чином:

$$y_1=u,\quad y_2=v,\quad y_3=w,\quad y_4=\theta_1, y_5=\theta_2,$$

$$y_6=T_{11},\; y_7=T_{12}^*,\; y_8=Q_{13},\; y_9=M_{11},\; y_{10}=M_{12}^*. \qquad (2)$$

Це дає можливість записати рівняння (1) в узагальненому вигляді

$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial y_i}{\partial\alpha_1}=L_i(y)+q_i, \qquad (3)$$

де $y$ – вектор компонентами якого є функції $y_i$, $q_i$ – компоненти навантаження, $L_i$ – нелінійні диференціальні оператори , $i$ =1,…,10. На основній траєкторії деформування рівняння (2) мають вигляд

$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial y_{i,o}}{\partial\alpha_1}=L_i(y_o)+q_i. \qquad (3)$$

Тоді як на суміжній їх потрібно записати у такий спосіб

$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial\left(y_{i,o}+y_i\right)}{\partial\alpha_1}=L_i\left(y_o+y\right)+q_i\,. \tag{4}$$

У відповідності з критерієм Ейлера тут $y_i$ – це нескінченно малі збурення основного стану. Тому, користуючись поняттям похідної Фреше, можемо обмежитись в рядах Тейлора тільки двома членами

$$L_i\left(y_o+y\right)=L_i\left(y_o\right)+L_{i,j}\left(y_o\right)y\,. \tag{5}$$

Тут $L_{i,j}$ – похідні Фреше від операторів $L_i$ за аргументом $y_j\ \left(j=1,\ldots,10\right)$. Рівняння (4) набує вигляду

$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial y_{i,o}}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_1}\frac{\partial y_i}{\partial\alpha_1}=L_i\left(y_o\right)+L_{i,j}\left(y_o\right)y+q_i\,. \tag{6}$$

Враховуючи те, що навантаження $q_i$ основного і сумісного станів однакові, а функції з індексом “0” задовольняють рівнянням (3) з виразу (6) отримуємо лінеаризоване рівняння відносно приростів функцій $q_i$ при біфуркації

$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial y_i}{\partial\alpha_1}=L_{i,j}\left(y_o\right)y\,. \tag{7}$$

Отримуємо систему диференціальних рівнянь такого вигляду

$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial y_1}{\partial\alpha_1}=-\frac{1}{A_2}\frac{\partial T_{21}^*}{\partial\alpha_2}-a_1\left(y_2+T_{21}^*\right)-a_2\left(y_1-T_{21}^*\right)+\frac{1}{R_1}y_3\,,$$

$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial y_2}{\partial\alpha_1}=-\frac{1}{A_2}\frac{\partial T_{22}^*}{\partial\alpha_2}-a_2\left(y_2+T_{21}^*\right)+a_1\left(y_1-T_{22}^*\right)+\frac{1}{R_2}Q_{23}^*\,,$$

$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial y_3}{\partial\alpha_1}=-\frac{1}{A_2}\frac{\partial Q_{23}^*}{\partial\alpha_2}-a_2y_3-a_1Q_{23}^*-\frac{1}{R_1}y_1-\frac{1}{R_2}T_{22}^*\,,$$

$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial y_4}{\partial\alpha_1}=-\frac{1}{A_2}\frac{\partial M_{12}}{\partial\alpha_2}-2a_1M_{12}-a_2\left(y_4-M_{22}\right)Q_{13}\,,$$

$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial y_5}{\partial\alpha_1}=-a_1y_{12}+\frac{1}{R_1}y_7-\varepsilon_1\varepsilon_{1,0}-\theta_1\theta_1^0+A_{11}T_{11}+A_{12}T_{12}+$$

$$+A_{13}y_4+d_{11}\varepsilon_{22}+d_{12}\kappa_{22}+d_{13}\kappa_{12}\,,$$

$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial y_6}{\partial \alpha_1} = a_1 y_5 - \theta_{1,0}\theta_2 - \theta_1\theta_{2,0} +$$
$$+ A_{21}T_{11} + A_{22}T_{12} + A_{23}y_4 + d_{21}\varepsilon_{22} + d_{22}\kappa_{22} + d_{23}\kappa_{12},$$
$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial y_7}{\partial \alpha_1} = -\frac{1}{R_1}y_5 - y_8,$$
$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial y_8}{\partial \alpha_1} = a_1\theta_2 + A_{31}T_{11} + A_{32}T_{12} + A_{33}y_4 + d_{31}\varepsilon_{22} + d_{32}\kappa_{22} + d_{33}\kappa_{12},$$
$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial y_9}{\partial \alpha_1} = Q_{23}^{*} + d_{31}\varepsilon_{22} + d_{32}\kappa_{22} + d_{33}\kappa_{12},$$
$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial y_{10}}{\partial \alpha_1} = M_{12}^{*} + A_{32}T_{12}^{*} + d_{33}\kappa_{12}. \qquad (8)$$

В системі (8) використані позначення:

$$y_1 = u,\ \ y_2 = v,\ \ y_3 = w,\ \ y_4 = \theta_1, y_5 = \theta_2,$$
$$y_6 = T_{11}\left(1+\varepsilon_{1,0}\right) + T_{11,0}\varepsilon_1,\ y_7 = T_{12}\left(1+\varepsilon_{2,0}\right) + T_{12,0}\varepsilon_2 - \frac{2}{R_2}M_{12},$$
$$y_8 = Q_{13} + T_{11,0}\theta_1 + T_{11,0}\theta_{1,0} + T_{12}\theta_2 + T_{12}\theta_{2,0},$$
$$y_9 = M_{11},\ \ y_{10} = M_{12}^{*},\ T_{21}^{*} = T_{12}\left(1+\varepsilon_{1,0}\right),$$
$$T_{22}^{*} = T_{22}\left(1+\varepsilon_{2,0}\right) + T_{22,0}\varepsilon_2,$$
$$\begin{gathered} Q_{23}^{*} = \frac{1}{A_2}\frac{\partial M_{22}}{\partial \alpha_2} - a_1\left(y_4 - M_{22}\right) + 2a_2 M_{12} + \\ + T_{11,0}\theta_1 + T_{11}\theta_{1,0} + T_{12,0}\theta_2 + T_{12}\theta_{2,0} \end{gathered}. \qquad (9)$$

Зусилля $T_{22}$, $Q_{23}$ та моменти $M_{22}$, $M_{12}$ є пасивними змінними. Вони використані тільки як позначення наступних величин:

$$\begin{gathered} T_{22} = d_{11}T_{11} + d_{21}T_{12} + d_{31}M_{11} - \\ \left(C_{22}^{*} - C_{22}^{0}\right)\varepsilon_{22} - \left(B_{22}^{*} - B_{22}^{0}\right)\kappa_{22} - \left(B_{26}^{*} - B_{26}^{0}\right)\kappa_{12} \end{gathered},$$
$$\begin{gathered} M_{22} = d_{12}T_{11} + d_{22}T_{12} + d_{32}M_{11} - \\ \left(B_{22}^{*} - B_{22}^{0}\right)\varepsilon_{22} - \left(D_{22} - D_{22}^{0}\right)\kappa_{22} - \left(D_{26} - D_{26}^{0}\right)\kappa_{12} \end{gathered},$$

$$M_{12} = d_{13}T_{11} + d_{23}T_{12} + d_{33}M_{11} - \left(B_{26}^{*} - B_{26}^{0}\right)\varepsilon_{22} - \left(D_{26} - D_{26}^{0}\right)\kappa_{22} - \left(D_{66} - D_{66}^{0}\right)\kappa_{12} \qquad (10)$$

Праві частини рівнянь (8) містять функції $T_{11}$, $T_{12}$, $\varepsilon_1$. Їх потрібно виразити через розв’язувальні функції $y_i$. Якщо такі вирази будуть знайдені, то для визначення функцій $T_{22}$, $M_{22}$, $M_{12}$ досить буде скористатись виразами (10). Враховуючи те, що

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial y_5}{\partial \alpha_1} + a_1 y_6 - \frac{1}{R_1} y_7 ,$$

$$\kappa_{12} = \tau = 2\left( \frac{1}{A_2}\frac{\partial y_8}{\partial \alpha_2} + a_2 \frac{1}{A_2}\frac{\partial y_7}{\partial \alpha_2} + a_2 \frac{y_6}{R_2} - \frac{1}{R_2}\omega_1 \right) \qquad (11)$$

запишемо п’яте і шосте рівняння системи (8) та перші два вирази (9) у такому вигляді

$$\varepsilon_1\left(1 + \varepsilon_{1,0}\right) - A_{11}T_{11} - A_{12}T_{12} = f_5 ,$$

$$\varepsilon_1\omega_{2,0} - A_{21}T_{11} - A_{22}T_{12} = f_6 ,$$

$$\varepsilon_1 T_{11,0} + T_{11}\left(1 + \varepsilon_{1,0}\right) = y_1 ,$$

$$T_{11}\left( \omega_{1,0} - \frac{2}{R_2} d_{13} \right) + T_{12}\left( 1 + \varepsilon_{2,0} - \frac{2}{R_2} d_{23} \right) =$$

$$= y_2 - T_{12,0}\varepsilon_2 + \frac{2}{R_2} d_{33} y_4 - \frac{2}{R_2}\left(B_{26}^{*} - B_{26}^{0}\right)\varepsilon_{22} -$$

$$- \frac{2}{R_2}\left(D_{26} - D_{26}^{0}\right)\kappa_{22} - \frac{2}{R_2}\left(D_{66} - D_{66}^{0}\right)\kappa_{12}' ,$$

де

$$f_5 = y_8\theta_{1,0} + A_{13}y_4 + d_{11}\varepsilon_{22} + d_{12}\kappa_{22} + d_{13}\kappa_{12}' ,$$

$$f_6 = y_{8,0}\theta_2 - \varepsilon_2\omega_{1,0} + y_8\theta_{2,0} + A_{23}y_4 + d_{21}\varepsilon_{22} + d_{22}\kappa_{22} + d_{23}\kappa_{12}' ,$$

$$g_1 = y_1 ,$$

$$g_2 = y_2 - T_{12,0}\varepsilon_2 + \frac{2}{R_2} d_{33} y_4 - \frac{2}{R_2}\left(B_{26}^{*} - B_{26}^{0}\right)\varepsilon_{22} -$$

$$-\frac{2}{R_2}\left(D_{26}-D_{26}^0\right)\kappa_{22}-\frac{2}{R_2}\left(D_{66}-D_{66}^0\right)\kappa'_{12} \qquad (12)$$

Маємо систему рівнянь для визначення невідомих. Після незначних спрощень вона набуває вигляду

$$\varepsilon_1-A_{11}T_{11}-A_{12}T_{12}=f_5\ ,$$
$$-A_{21}T_{11}-A_{22}T_{12}=f_6,$$
$$\varepsilon_1 T_{11,0}+T_{11}=g_1,$$
$$T_{12}=g_2\ . \qquad (13)$$

При виключені змінних $T_{11}$ і $T_{12}$ отримуємо два рівняння

$$\varepsilon_1\left(1+A_{11}T_{11,0}\right)=f_5^*,$$
$$\varepsilon_1\left(A_{21}T_{11,0}\right)=f_6^* \qquad (14)$$

де

$$f_5^*=f_5+g_1\left[A_{11}+\left(\frac{2}{R_2}d_{13}\right)\right]+g_2\left(A_{12}\right),$$

$$f_6^*=f_6+g_1\left[A_{21}-\left(A_{22}\right)\left(\frac{2}{R_2}d_{13}\right)\right]+g_2\left(A_{22}\right)\ . \qquad (15)$$

За правилом Крамера знаходимо

$$\varepsilon_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad .(16)$$

Значення визначників $\Delta_1$, $\Delta_2$, $\Delta$ знаходимо за формулами

$$\Delta_1=f_5^*\left[1+\left(A_{22}\right)T_{11,0}\right]-f_6^*\left[\left(A_{12}\right)T_{11,0}\right],$$
$$\Delta_2=-f_5^*\left(A_{21}T_{11,0}\right)+\left(1+A_{11}T_{11,0}\right)f_6^*,$$
$$\Delta=\left(1+A_{11}T_{11,0}\right)\left[1+\left(A_{22}\right)T_{11,0}\right]-\left[\left(A_{12}\right)T_{11,0}\right]\left(A_{21}T_{11,0}\right). \qquad (17)$$

Коли відомі вирази для $\varepsilon_1$ через розв'язувальні функції, то можемо також знайти

$$T_{12}=\left[\varepsilon_1\left(A_{21}T_{11,0}\right)-f_6-A_{21}g_1\right]\left(A_{22}\right)^{-1},$$
$$T_{11}=g_1-\varepsilon_1 T_{11,0}\ ,$$
$$T_{13}=y_3+T_{11,0}y_8-T_{11}y_{8,0}-T_{12,0}\theta_2-T_{12,0}\theta_{2,0}\ . \qquad (18)$$

Враховуючи періодичність шуканих функцій у цьому напрямку, можна апроксимувати їх тригонометричними рядами Фур'є і тим звести систему (8) до системи звичайних диференціальних рівнянь.

Розглядувані оболонки замкнуті, тому розв'язувальні функції періодичні за коловою координатою $\alpha_2$ або $\varphi$. Для задоволення вимогам періодичності за $\alpha_2$, скористаємось рядами Фур'є у комплексній формі

$$y_j = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} y_{j,n} e^{in\varphi}, \qquad \varphi = \alpha_2 \ , \quad 0 \le \alpha_2 \le 2\pi , \tag{19}$$

де $y_{j,n}$ – комплексні функції $j = 1,...,10$, а $n$ – параметр колового хвилеутворення.

Після підстановки (19) в систему рівнянь стійкості (8), отримаємо систему звичайних диференціальних рівнянь, яка кожного додатного значення $n$ має вигляд

$$\frac{1}{A_1}\frac{dy_{1,n}}{d\alpha_1} = -in_a\left(T_{12,n}\right) + \psi_2\left(T_{22,n} - T_{11,n}\right) + \frac{1}{R_1}\left(y_{3,n} - in_a M_{12,n}\right);$$

$$\frac{1}{A_1}\frac{dy_{2,n}}{d\alpha_1} = -in_a(\left(T_{22,n}\right) - \psi_2\left(2T_{12,n}\right)$$

$$+\left(\frac{3}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)\psi_2 M_{12,n} + \frac{1}{R_2}\left(-T_{12}{}^0 y_{8,n} + T_{22}^0\theta_{2,n} - \right.$$

$$\left. - T_{12,n} y_8^0 + T_{22,n}\theta_2^0 + in_a M_{12,n}\right)$$

$$\frac{1}{A_1}\frac{dy_{3,n}}{d\alpha_1} = -in_a\left(-T_{12}{}^0 y_{8,n} + T_{22}^0\theta_{2,n} - T_{12,n} y_8^0 + T_{22,n}\theta_2^0 + 2\psi_2 M_{12,n}\right) -$$

$$-\psi_2 y_{3,n} - \frac{1}{R_1} y_{1,n} - \frac{1}{R_2}\left(T_{22,n}\right) ;$$

$$\frac{1}{A_1}\frac{dy_{4,n}}{d\alpha_1} = -in_a M_{12,n} - \psi_2\left(y_{4,n} - M_{22,n}\right) + y_{3,n} + T_{11}^0 y_{8,n} +$$

$$+T_{11,n} y_8^0 - T_{12}{}^0\theta_{2,n} - S_{,n}\theta_2^0;$$

$$\frac{1}{A_1}\frac{dy_{5,n}}{d\alpha_1}=\frac{1}{R_1}y_{7,n}-y_{8,n}y_8^0+A_{11}T_{11,n}+A_{12}T_{12,n}+A_{13}y_{4,n}-$$

$$-d_{11}\varepsilon_{22,n}-d_{12}\chi_{22,n}-d_{13}\chi_{12,n}\ ;$$

$$\frac{1}{A_1}\frac{dy_{6,n}}{d\partial\alpha_1}=-in_a y_{5,n}+\psi_2 y_{6,n}+y_{8,n}\theta_2^0+$$

$$+y_8^0\theta_{2,n}+A_{12}T_{11,n}+A_{22}S_{,n}+A_{23}y_{4,n}-d_{21}\varepsilon_{22,n}-d_{22}\chi_{22,n}-d_{23}\chi_{12,n}\,;$$

$$\frac{1}{A_1}\frac{dy_{7,n}}{d\alpha_1}=-\frac{1}{R_1}y_{5,n}-y_{8,n}\,;$$

$$\frac{1}{A_1}\frac{dy_{8,n}}{d\alpha_1}=-\frac{1}{R_1}\varepsilon_{1,n}+A_{13}T_{11,n}+A_{23}S_{,n}+A_{33}y_{4,n}-d_{31}\varepsilon_{22,n}-d_{32}k_{22,n}-$$

$$-d_{33}k_{12,n},$$

$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial y_{9,n}}{\partial\alpha_1}=\overset{*}{Q}_{23,n}+d_{31}\varepsilon_{22,n}+d_{32}\kappa_{22,n}+d_{33}\kappa_{12,n}\,,$$

$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial y_{10,n}}{\partial\alpha_1}=\overset{*}{M}_{12,n}+A_{32}\overset{*}{T}_{12,n}+d_{33}\kappa_{12,n}\,, \tag{20}$$

де $n_a=n/A_2$.

Таким чином, задача статичної стійкості симетрично завантаженої пружної анізотропної оболонки обертання зведена до системи з десяти звичайних однорідних диференціальних рівнянь у нормальній формі (20) із змінними коефіцієнтами і однорідними граничними умовами:

на контурі $\alpha_1=\alpha_0$

$$B_o y_n=0,$$

на контурі $\alpha_1=\alpha_l$ (21)

$$B_n y_n=0.$$

Мінімальне власне значення однорідної крайової задачі (20), (21) характеризує момент переходу від симетричного основного рівноважного стану до несиметричного, якому властиві відповідне число $n$ хвиль в коловому напрямку. Цей стан рівноваги повністю характеризується наступними величинами

$y_{1,n}, \ldots y_{10,n}$, $T_{11,n}$, $T_{22,n}$, $T_{12,n}$, $M_{22,n}$, $M_{12,n}$, $\varepsilon_{1,n}$, $\varepsilon_{2,n}$, $\varepsilon_{22,n}$, $\theta_{1,n}$, $\theta_{2,n}$, $\mathrm{k}_{22,n}$, $\mathrm{k}_{12,n}$, а також докритичними параметрами $T_{11}^{0}$, . $T_{22}^{0}$, $\mathrm{T}_{12}^{0}$, $\theta_1^0$, $\theta_2^0$.

Зусилля і моменти, що входять в (20), визначаються із залежностей

$$T_{11,n} = y_{6,n} \; ;$$

$$\begin{gathered} T_{22,n} = d_{11}T_{11,n} + d_{21}S_{,n} + d_{31}y_{4,n} + \left(C_{22} - C_{22}^{0}\right)\varepsilon_{22,n} + \\ + \left(K_{22} - K_{22}^{0}\right)k_{22,n} + \left(K_{26} - K_{26}^{0}\right)k_{12,n}; \\ M_{22,n} = d_{12}T_{11,n} + d_{22}S_{,n} + d_{32}y_{4,n} + \left(K_{22} - K_{22}^{0}\right)\varepsilon_{22,n} + \\ \left(D_{22} - D_{22}^{0}\right)k_{22,n} + \left(D_{26} - D_{26}^{0}\right)k_{12,n}; \\ M_{12,n} = d_{13}T_{11,n} + d_{23}S_{,n} + d_{33}y_{4,n} + \left(K_{26} - K_{26}^{0}\right)\varepsilon_{22,n} + \\ \left(D_{26} - D_{26}^{0}\right)k_{22,n} + \left(D_{66} - D_{66}^{0}\right)k_{12,n}; \end{gathered} \tag{22}$$

Окрім цих, вирази для визначення $\varepsilon_{1,n}$ і $T_{12,n}$ мають вигляд

$$\varepsilon_{1,n} = \Delta_1 / \Delta^* \text{ , а } \quad S_{,n} = \left(z_{3,n}\right) / r_{22} \, , \tag{23}$$

де введені наступні позначення

$$\Delta^* = r_{12}^* \, , \qquad \Delta_1 = r_{12}^* z_{1,n}^* - r_{11}^* z_{2,n}^* \, ,$$

$$r_{11}^* = r_{11} - \frac{r_{21}}{r_{22}}\left(-A_{12}\right), \qquad r_{12}^* = r_{12} - \frac{r_{21}}{r_{22}}\left(-A_{22}\right),$$

$$r_{11} = d_{13}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right), \qquad r_{12} = 1 + \varepsilon_2^0 + d_{23}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right),$$

$$r_{22} = 1 - \frac{1}{R_2} d_{23} \, , \, z_{1,n}^* = z_{1,n} - \frac{1}{r_{22}} z_{3,n}\left(-A_{12}\right),$$

$$z_{2,n}^* = z_{2,n} - \frac{1}{r_{22}} z_{3,n}\left(-A_{22}\right),$$

$$z_{1,n} = A_{11}\left(y_{1,n}\right) + y_{8,n}\theta_1^0 + A_{13}y_{4,n} - d_{11}\varepsilon_{22,n} - d_{12}k_{22,n} - d_{13}k_{12,n},$$

$$z_{2,n} = A_{12}\left(y_{1,n}\right) + y_{8,n}\theta_2^0 + y_8^0\theta_{2,n} + A_{23}y_{4,n} -$$
$$d_{12}\varepsilon_{22,n} - d_{22}k_{22,n} - d_{23}k_{12,n},$$

$$z_{3,n} = -\left(-\frac{1}{R_2}d_{13}\right)\left(y_{1,n}\right) + y_{2,n} + \frac{1}{R_2}d_{33}y_{4,n} + \frac{1}{R_2}\left(K_{26} - K_{26}^0\right)\varepsilon_{22,n} +$$
$$+\frac{1}{R_2}\left(D_{26} - D_{26}^0\right)k_{22,n} + \frac{1}{R_2}\left(D_{66} - D_{66}^0\right)k_{12,n}. \qquad (24)$$

Мінімальне власне число знаходиться при послідовному збільшенні навантаження, коли визначник матриці граничних умов дорівнює нулю. При розв'язку системи диференціальних рівнянь з комплексними коефіцієнтами визначник також є комплексним. Щоб існував розв'язок системи однорідних алгебраїчних рівнянь з комплексними коефіцієнтами необхідно, щоб були одночасно рівними нулю дійсна та уявна частини визначника. Методика розв'язку, розглядуваної крайової задачі, базується на чисельному методі дискретної ортогоналізації.

**1**. Баженов В.А. Нелінійне деформування, стійкість і закритична поведінка анізотропних оболонок / Баженов В.А., Семенюк М.П., Трач В.М. // – К.: Каравела, 2010. – 352 с. **2**. Ванин Г.А. Устойчивость оболочек из композиционных материалов с несовершенствами / Ванин Г.А., Семенюк Н.П. // – К.: Наук. думка, 1987.—200 с. **3**. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек / Амбарцумян С.А. // – М.: Наука, 1974. – 448 с. **4**. Алфутов Н.А. Моделирование процессов деформирования волокнистых металлокомпозитов / Алфутов Н.А., Дымников И. А. // Композиционные материалы: Справочник // В.В.Васильев, В.Д.Протасов, В.В.Болотин и др.; 7Под общ. ред. В.В.Васильева, Ю.М.Тарнопольского. – М.: Машиностроение, 1990. – 512 с. **5.** Кармишин А.В. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций / Кармишин А.В., Лясковец В.А., Мяченков В.И., Фролов А.Н. // – М.: Машиностроение, 1975. – 376 с. **6.** Григоренко Я.М. Численное решение задач осесимметричной деформации слоистых анизотропных оболочек вращения / Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Крюков Н.Н. // Механика композитных материалов. – 1983. – №6. – С. 1023-1028. **7**. Григоренко Я.М. Численное решение задач статики гибких слоистых оболочек с переменными параметрами / Григоренко Я.М., Крюков Н.Н. – К., Наук. думка, 1988. – 264 с. **8**. Королев В.И. Слоистые анизотропные пластинки и оболочки из армированных пластмасс / Королев В.И. // – М.: Машгиз, 1965. – 272 с. **9**. Григолюк Э.И. Многослойные армированные оболочки. Расчет пневматических шин / Григолюк Э.И., Куликов Г.М. // М.: Машиностроение, 1988. – 288с. **10**. Трач В.М. До питання про напружено-деформований стан анізотропних оболонок середнього згину // Трач В.М., Хоружий М.М. // Збірник "Наукові нотатки". – ЛНТУ, Луцьк. – 2013. – с.252-257.