

**ТЕОРЕТИЧНЕ ВИРІШЕННЯ РІВНЯНЬ РІВНОВАГИ ДЛЯ ЗАЛІЗОБЕТОННИХ ЕЛЕМЕНТІВ КРУГЛОГО ПЕРЕРІЗУ**

**THEORETICAL SOLUTION OF THE EQUATIONS OF EQUILIBRIUM FOR REINFORCED CONCRETE ELEMENTS OF CIRCULAR CROSS SECTION**

**Чеканович М. Г., к.т.н., проф., ORSID ID 0000-0002-9110-4109, (ДВНЗ «Херсонський державний аграрний університет», м. Херсон)**

**Chekanovych M.G. candidate of technical sciences, professor, (Kherson State Agrarian University, Kherson)**

**Стаття присвячена теоретичному визначенню параметрів напружено-деформованого стану залізобетонних елементів круглого перерізу, до яких відносяться колони, стояки опор, палі. На основі рекурентної формули для інтегралу від диференційного біному одержане теоретичне вирішення рівнянь рівноваги нормального круглого поперечного перерізу залізобетонних конструкцій в межах загальноприйнятих передумов.**

**The article is devoted to the theoretical determination of the parameters of the stress-strain state of reinforced concrete elements of round cross section.**

**In modern buildings and constructions, structures of circular cross section, including columns, supports, piles, pylons and many other elements are quite widespread. There exist approximate methods of calculation of such reinforced concrete elements. The theoretical solution of the equations of equilibrium for reinforced concrete elements of circular cross section allows increasing the accuracy of calculations, contributes to further progress in the development of a comprehensive theory of reinforced concrete.**

**The purpose of the study is the theoretical solution of integral equations of equilibrium for reinforced concrete elements of circular cross section for the possibility of determining their stress-strain state.**

**In equilibrium equations, the specified integral characterizes the work of compressed concrete. For an element of circular cross section, it can be geometrically represented for a compressed cross section in the form of a body with a base limited by a circle or circle and its chord, the height of which is described by a fifth order polynomial. In this case, the bending moment perceived by the compressed concrete is found through the multiplication of the resultant force applied in the geometric center of the given body by distance  $h$  from the force to the extreme compressed fiber in the cross section.**

**Based on the recurrence formula for the integral of the differential binomial, there has been obtained a theoretical solution of the equilibrium equations of a normal circular cross section for reinforced concrete structures within the generally accepted assumptions. In the case when the circular cross section of the concrete structure does not have a stretched zone, an accurate laconic solution of the equilibrium equations of the stress-strain state is obtained after conducting mathematical transformations.**

**The article presents a theoretical solution of equilibrium equations for a normal circular cross section of reinforced concrete structures within generally accepted preconditions, which allows determining analytically the stress-strain state of reinforced concrete elements in a possible range of changes in the properties of concrete and reinforcement steel for any stage of structural load.**

**Ключові слова:** напруження, деформації, круглий переріз, інтеграл, диференціал, біном.

**Вступ.** Залізобетон початку третього тисячоліття залишається основним будівельним матеріалом за об'ємом використання у конструкціях будівель і споруд [1-6]. Домінуюче його положення у будівництві пояснюється наявністю значних запасів сировинних матеріалів у земній корі, відносно низькою їх вартістю. Поєднання позитивних якостей бетону й арматурної сталі в залізобетонних елементах забезпечило йому провідне місце, зокрема, у стиснутих несучих будівельних конструкціях колон, паль, стояків, пілонів та ін. [4-10].

**Постановка проблеми.** В сучасних будівлях і спорудах досить поширені конструкції круглого перерізу, серед яких колони, стояки опор, пілони та багато інших елементів [6,7,9]. Розроблені наближені методи розрахунку таких залізобетонних елементів [1,2,8-10]. Теоретичне вирішення рівнянь рівноваги для залізобетонних елементів круглого перерізу дозволить підвищити точність розрахунків, сприятиме подальшому прогресу у розбудові всеохоплюючої теорії залізобетону.

**Мета роботи.** Метою роботи є теоретичне вирішення інтегральних рівнянь рівноваги для залізобетонних елементів круглого перерізу задля можливості уточненого визначення їх напружено-деформованого стану.

**Основна частина.** Для розрахунку напружено-деформованого стану залізобетонних елементів доцільно використовувати криволінійну діаграму « $\sigma$ - $\epsilon$ » бетону (рис. 1) [4-10]. Розглянемо теоретичне вирішення рівнянь рівноваги для залізобетонних елементів круглого перерізу в нормальних перерізах залізобетонних елементів у межах передумов «еквівалентного» перерізу [7].

Для виведення рівнянь напружено-деформованого стану для нормального круглого перерізу залізобетонних елементів приймемо наступні положення:

- розрахунковим вважається переріз, деформації у якому дорівнюють середнім по довжині блока між тріщинами (якщо останні мають місце);
- середні деформації бетону й арматури розподіляються по перерізу відповідно до лінійного закону;

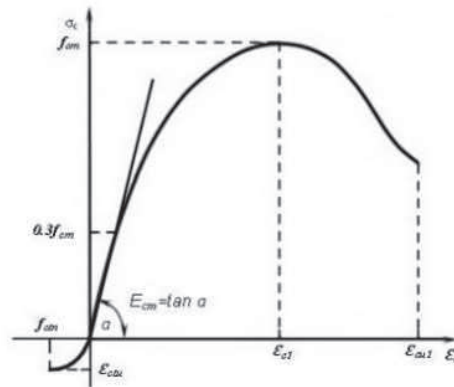


Рис. 1. Розрахункова діаграма «σ-ε» для бетону

- зв'язок між напруженнями й деформаціями бетону (рис. 1) описується поліномом п'ятого степеню:

$$\sigma_c = \sum_{k=1}^5 a_k \varepsilon_i^k \quad (1)$$

- залежність між напруженнями і деформаціями арматурної сталі приймається у вигляді діаграми «σ<sub>s</sub>-ε<sub>s</sub>» параметри якої одержуються за експериментальними або нормативними даними;

- зниження зусилля, яке сприймає розтягнена зона бетону за рахунок тріщиноутворення, може враховуватися коефіцієнтом

$$\psi_{ct} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{ct}}{\varepsilon_2}} \quad (2)$$

де:  $\varepsilon_2$  - відносні деформації розтягнутої крайньої фібри.

Виходячи з вищенаведених передумов, рівняння напружено-деформованого стану для будь-якого перерізу мають вигляд:

$$N = \int_A \sigma_c dA + \sum \sigma_{Si} A_{Si}; \quad (3)$$

$$M = \int_A \sigma_c h dA + \sum \sigma_{Si} A_{Si} h_{Si}; \quad (4)$$

де:  $\sigma_c$ - нормальні напруження на елементарній площині  $dA$ , яка знаходиться на відстані  $h$  від крайньої стисненої фібри,  $\sigma_{Si}$ ,  $A_{Si}$ , та  $h_{Si}$  - нормальні напруги, площа і відстань до крайньої стисненої фібри перерізу  $i$ -го арматурного стержня.

У рівняннях (3) і (4) означений інтеграл характеризує роботу стисненого бетону. Для елемента круглого поперечного перерізу його можна геометрично представити для стиснутої зони перерізу у вигляді тіла з основою обмеженою колом або колом і його хордою, висота якого описується поліномом степеня. При цьому згинальний момент, що сприймає стиснений бетон, знаходиться як добуток результуючої сили, прикладеної у геометричному центрі наведеного тіла, і відстані  $h$  від сили до крайньої стисненої фібри в перерізі.

Наведені рівняння (3) і (4) описують як першу, так і другу форми рівноваги залізобетонних конструкцій круглого поперечного перерізу.

Якщо позначити інтеграли як

$$I_K = \int h^K \sqrt{2Rh - h^2} dh, \quad (5)$$

то рівняння (3) і (4) матимуть вигляд:

$$N = 2[\sum N_K - N_{bt}] + \sum \sigma_{si} A_{si}; \quad (6)$$

$$M = 2[\sum M_K - M_{bt}] + \sum \sigma_{si} A_{si} h_{si}, \quad (7)$$

де

$$N_1 = a_1[\varepsilon_1 I_0 - \chi I_1];$$

$$N_2 = a_2[\varepsilon_1^2 I_0 - 2\chi\varepsilon_1^2 I_1 + \chi^2 I_2];$$

$$N_3 = a_3[\varepsilon_1^3 I_0 - 3\chi\varepsilon_1^2 I_1 + 3\chi\varepsilon_1 I_2 - \chi^3 I_3];$$

$$N_4 = a_4[\varepsilon_1^4 I_0 - 4\chi\varepsilon_1^3 I_1 + 6\chi^2\varepsilon_1 I_2 - 4\chi^3\varepsilon_1 I_3 + \chi^4 I_4];$$

$$N_5 = a_5[\varepsilon_1^5 I_0 - 5\chi\varepsilon_1^4 I_1 + 10\chi^2\varepsilon_1^3 I_2 - 10\chi^3\varepsilon_1^2 I_3 + 5\chi^4\varepsilon_1 I_4 - \chi^5 I_5];$$

$$N_{bt} = \psi_{bt} R_{bt} I_0^{bt};$$

$$M_1 = a_1[\varepsilon_1 I_1 - \chi I_2];$$

$$M_2 = a_2[\varepsilon_1^2 I_1 - 2\chi\varepsilon_1^2 I_2 + \chi^2 I_3];$$

$$M_3 = a_3[\varepsilon_1^3 I_1 - 3\chi\varepsilon_1^2 I_2 + 3\chi\varepsilon_1 I_3 - \chi^3 I_4];$$

$$M_4 = a_4[\varepsilon_1^4 I_1 - 4\chi\varepsilon_1^3 I_2 + 6\chi^2\varepsilon_1^2 I_3 - 4\chi^3\varepsilon_1 I_4 + \chi^4 I_5];$$

$$M_5 = a_5[\varepsilon_1^5 I_1 - 5\chi\varepsilon_1^4 I_2 + 10\chi^2\varepsilon_1^3 I_3 - 10\chi^3\varepsilon_1^2 I_4 + \\ + 5\chi^4\varepsilon_1 I_5 - \chi^5 I_6];$$

$$M_{bt} = \psi_{bt} R_{bt} I_1^{bt}.$$

При  $k = 0$  інтеграл визначається за формулою:

$$I_0 = 0,5 \left[ (h - R) \sqrt{2Rh - h^2} + R^2 \arcsin \frac{h - 2R + r}{h} \right] \quad (8)$$

Значення  $I^{ct}$  для розтягнутої зони бетону у перерізі мають такий вигляд:

$$I_0^{ct} = 0,5 \left[ \frac{\pi R^2}{2} - (h_c - R) \sqrt{2Rh_c - h_c^2} - R^2 \arcsin \frac{h_c - R}{R} \right]$$

(9)

$$I_1^{ct} = 0,5 \left[ \frac{\pi R^3}{2} + R^3 \arcsin \frac{R - h_c}{R} - \frac{2}{3} (2Rh_c - h_c^2) \cdot \sqrt{2Rh_c - h_c^2} - R(r - h_c) \sqrt{2Rh_c - h_c^2} \right] \quad (10)$$

Значення напружень в арматурній сталі  $\sigma_{si}$  можуть визначатися через фіброві деформації бетону:

$$\sigma_{si} = \varepsilon_1 - \chi h_{si}, \quad (11)$$

де

$$\chi = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2R}$$

В формулах необхідно враховувати межі інтегрування. Для стисненої зони круглого перерізу величина  $h$  може змінюватися від нуля до  $2R$ . За наявності розтягнутої зони перерізу  $h$  змінюється від нуля до  $h_c$ .

Для випадку коли у круглому поперечному перерізі залізобетонної конструкції не має розтягнутої ділянки, після проведення математичних перетворень, одержано точне лаконічне вирішення рівнянь рівноваги (6) та (7) напружено-деформованого стану:

$$\begin{aligned}
N = & \pi R^2 [a_1 (\varepsilon_1 - \chi R) + a_2 \left( \varepsilon_1^2 - 2\chi \varepsilon_1 R + \frac{5}{4} \chi^2 R^2 \right) + a_3 \left( \varepsilon_1^3 - 3\chi \varepsilon_1^2 R + \frac{15}{4} \chi^2 \varepsilon_1 R^2 - \frac{7}{4} \chi^3 R^3 \right) + \\
& + a_4 \left( \varepsilon_1^4 - 4\chi \varepsilon_1^3 R + \frac{15}{2} \chi^2 \varepsilon_1^2 R^2 - 7\chi^3 \varepsilon_1 R^3 + \frac{21}{8} \chi^4 R^4 \right) + \\
& \left( \varepsilon_1^5 - 5\chi \varepsilon_1^4 R + \frac{25}{2} \chi^2 \varepsilon_1^3 R^2 - \frac{35}{2} \chi^3 \varepsilon_1^2 R^3 + \frac{105}{8} \chi^4 \varepsilon_1 R^4 - \frac{33}{8} \chi^5 R^5 \right)] + \sum_{i=1}^m \sigma_{si} A_{si}; \\
M = & \pi R^3 [a_1 \left( \varepsilon_1 - \frac{5}{4} \chi R \right) + a_2 \left( \chi_1^2 - \frac{5}{2} \chi \varepsilon_1 R + \frac{7}{4} \chi^2 R^2 \right) + \\
& + a_3 \left( \varepsilon_1^3 - \frac{15}{4} \chi \varepsilon_1^2 R + \frac{21}{4} \chi^2 \varepsilon_1 R^2 - \frac{21}{8} \chi^3 R^3 \right) + \\
& a_5 \left( \varepsilon_1^5 - \frac{25}{4} \chi \varepsilon_1^4 R + \frac{35}{2} \chi^2 \varepsilon_1^3 R^2 - \frac{105}{4} \chi^3 \varepsilon_1^2 R^3 + \frac{165}{8} \chi^4 \varepsilon_1 R^4 - \frac{429}{64} \chi^5 R^5 \right)] + \sum_{i=1}^m \sigma_{si} A_{si} h_{si};
\end{aligned}
\tag{13}$$

**Висновки.** Таким чином, одержано теоретичне вирішення рівнянь рівноваги нормального круглого поперечного перерізу для залізобетонних конструкцій в межах загальноприйнятих передумов, що дозволяє аналітично визначати напружено-деформований стан залізобетонних елементів у можливому діапазоні зміни властивостей бетону і арматурної сталі для будь-якого етапу навантаження конструкції.

1. Leongard F. "Spannbeton" für die Praxis. Wyd.3. Ernst u Sohn, Berlin-München-Düsseldorf, 1973, p.246.

2. Кани Г. Предварительно напряженный бетон в проектировании и строительстве. — М.: Науч.-техн. изд-во автотр. лит-ры, 1958. - С. 15 - 18.

Kany H. Predvartelno napriazhennyi beton v proektyrovanny u stroytelstve. — М.: Nauch.-tekhn. yzd-vo avtotr. lyt-ry, 1958. - S. 15 - 18.

3. Walraven J. Challenges for new materials in concrete structures. *Proc. of the XIII-th FIP Congress on Challenges for concrete in the Next Millennium*, May 1998, Amsterdam, vol. 1, pp. 3-8.

4. Бабич Є.М., Бабич В.Є. Розрахунок і конструювання залізобетонних балок: навчальний посібник/ Є.М. Бабич, В.Є. Бабич. — 2-ге видання, перероблене і доповнене.-Рівне: НУВГП, 2017.- С. 10-64.

Babych Ye.M., Babych V.Ie. Rozrakhunok i konstruiuvannia zalizobetonnykh balok: navchalnyi posibnyk/ Ye.M. Babych, V.Ie. Babych. — 2-he vydannia, pereroblene i dopovnene.-Rivne: NUVHP, 2017.- S. 10-64.

5. Лемыш Л. Л. Расчет железобетонных конструкций с использованием полных диаграмм сжатия бетона и арматуры //Бетон и железобетон. — 1991. — № 7. — С. 21—23.

Lemysh L. L. Raschet zhelezobetonnykh konstruktsiy s yspolzovaniem polnykh dyagramm szhatyia betona y armatury //Beton y zhelezobeton. —1991.—№ 7.—S. 21—23.

6. Карпюк В.М., Петров Н.Н., Целикова А.С. «Совершенствование деформационной модели расчета изгибаемых внецентренно растянутых железобетонных балок» / Карпюк В.М., Петров Н.Н., Целикова А.С.// Збірник наукових праць «Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди». випуск 36 – Рівне, Національний університет водного господарства та природокористування, 2018 ISSN 2218-1873 – с. 108-113.

Karpiuk V.M., Petrov N.N., Tselykova A.S. «Sovershenstvovanye deformatsyonnoi modeli rascheta yzghybaemykh vnetsentrenno rastianutykh zhelezobetonnykh balok» / Karpiuk V.M., Petrov N.N., Tselykova A.S.// Zbirnyk naukovykh prats «Resursoekonomni materialy, konstruktsii, budivli ta sporudy». vypusk 36 – Rivne, Natsionalnyi universytet vodnoho hospodarstva ta pryrodokorystuvannia, 2018 ISSN 2218-1873 – s. 108-113.

7. Бамбура А. Н., Бачинский В. Я., Журавлева Н. В., Пешкова И. К. Методические рекомендации по уточненному расчету железобетонных элементов с учетом полной диаграммы сжатия бетона — К.: НИИСК, 1987. — 24 с.

Bambura A. N., Bachynskiy V. Ya., Zhuravleva N. V., Peshkova Y. K. Metodycheskiye rekomendatsyyu po utochnennomu raschetu zhelezobetonnykh elementov s uchetom polnoi dyagrammy szhatyia betona — K.: NYYSK, 1987. — 24 s.

8. Єврокод 2. Проектування залізобетонних конструкцій. Частина 1-1. Загальні правила і правила для споруд (EN 1992-1-1:2004, IDT); ДСТУ-Н Б EN 1992-1-1:2010 . - [Чинний від 2014-07-01].- Київ; Мінрегіон України, 2014.- (Національний стандарт України)

Yevrokod 2. Proektuvannia zalizobetonnykh konstruktsii. Chastyna 1-1. Zahalni pravyla i pravyla dlia sporud (EN 1992-1-1:2004, IDT); DSTU-N B EN 1992-1-1:2010 . - [Chynnyi vid 2014-07-01].- Kyiv; Minrehion Ukrainy, 2014.- (Natsionalnyi standart Ukrainy)

9. Давиденко О.І., Давиденко О.О. До розрахунку міцності залізобетонних колон кругового перерізу при сумісній дії поздовжньої і поперечної сили : матеріали всеукраїнської науково-практичної конференції «Будівельні матеріали, конструкції та споруди третього тисячоліття», м. Херсон, 19 травня 2019. С.36-42.

Davydenko O.I., Davydenko O.O. Do rozrakhunku mitsnosti zalizobetonnykh kolon kruhovoho pererizu pry sumisnii dii pozdovzhnoi i poperechnoi syly : materialy vseukrainskoi naukovo-praktychnoi konferentsii «Budivelni materialy, konstruktsii ta sporudy tretoho tysiacholittia», m. Kherson, 19 travnia 2019. S.36-42.

10. Гольшев А. Б., Бачинский В. Я., Полищук В. П., Харченко А. В., Руденко И. В. Проектирование железобетонных конструкций — К.: Будівельник, 1990. — 544 с.

Golyshev A. B., Bachynskiy V. Ya., Polyshchuk V. P., Kharchenko A. V., Rudenko Y. V. Proektyrovanye zhelezobetonnykh konstruktsiy — K.: Budivelnik, 1990. — 544 s.