

УДК 539.3

**Г. О. Фесенко**

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

## КОНТАКТНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПІВНЕСКІНЧЕННОГО ШАРУ

Розв'язано контактну задачу про втискування з ексцентриситетом кругового штампа у півнескінченний пружний шар, що спирається на абсолютно жорстку основу без тертя. На бічній та нижній гранях півшару задано умови гладкого контакту. Під час розв'язання використано вертикальне переміщення точок шару, під дією зосередженої на верхній межі шару сили. Отримано сингулярне інтегральне рівняння відносно невідомого контактного напруження. Розв'язок рівняння розщукується у вигляді розвинення за системою косинусів у силу парності контактного напруження відносно полярного кута. В подальшому проведено ортогоналізацію за системою косинусів, що приводить до системи парних інтегральних рівнянь. Рівняння розв'язано методом ортогональних многочленів і зведено до нескінченної двовимірної системи алгебраїчних рівнянь, яку розв'язано методом редукції. Отримані осадка штампа і момент сили, що забезпечує поступальний рух штампа, із умов рівноваги.

*MSC: 74G05.*

*Ключові слова: контактна задача, круговий штамп, півнескінченний шар, сингулярне інтегральне рівняння, метод редукції.*

*DOI: 10.18524/2519-206x.2018.1.134624.*

**Вступ.** Дослідження контактної взаємодії твердих тіл розпочинається з класичних робіт Ж. Буссинеска та Г. Герца [1, 2]. Г. Герцем було створено достатньо загальну теорію контакту пружних тіл з гладкою поверхнею. Ж. Буссинеском фактично було побудовано розв'язок контактної задачі про втискування кругового штампа у пружний півпростір. Велику кількість робіт присвячено розв'язку просторових контактних задач для пружного шару. У цьому класі більш складних задач не знайдено точних розв'язків, але запропоновано ефективні методи наближених. М. Н. Лебедевим та Я. С. Уфляндом у [3] розв'язано задачу про втискування кругового штампа у пружний шар. Розв'язок побудовано за допомогою інтегрального перетворення Ханкеля та зведено до рівняння Фредгольма з симетричним ядром. У роботі І. І. Воровича та Ю. А. Устинова [4] було запропоновано асимптотичний розв'язок цієї задачі для товстого шару. Пізніше В. М. Александровим та І. І. Воровичем було розроблено асимптотичні методи, що дозволяють знаходити розв'язки як для товстого, так і для тонкого шару [5].

Втискування штампа невісьовою силою у пружний шар розглянуто у роботах К. Є. Єгорова [6], А. Л. Флоренса [7]. Більш проста задача про кручення шару круговим штампом досліджена Я. С. Уфляндом [8], А. Л. Флоренсом [7], Д. В. Грилицьким [9]. У роботах Р. Лоу [10], К. Срівастави та В. Саксени [11] розглянуто вісьосиметричні контактні задачі для пружного шару, що стискається парою штампів кругової або кільцевої форми. Г. Я. Поповим у роботі [12] наближено розв'язано контактну задачу з круговою областю контакту у випадку пружної основи загального типу. К. Є. Єгоровим розглянуто контактну задачу

для пружного шару за дії невісьової вертикальної сили на круговий штамп, де розв'язок задачі розділено на дві частини відповідно для центральної сили та пари сил з моментом. Задачу зведено до системи парних інтегральних рівнянь Фредгольма [6]. У роботі [13] розглянуто невісьосиметричну контактну задачу для кругового штампа на пружній основі. Інтегральне рівняння завдяки ортогоналізації за системою косинусів зведено до окремих інтегральних рівнянь відносно контактних напружень під штампом, що розв'язані методом ортогональних многочленів [14] та зведені до нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь, що розв'язані методом редукції. Проте відмітимо, що проблеми збіжності двовимірних нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь практично не досліджувались. Основний внесок тут зроблено Г. Я. Поповим у роботі [15].

Дослідження робіт, присвячених контактним задачам теорії пружності для шару за дії кругового штампа, показало, що залишається відкритою проблема дослідження напруженого стану півнескінченного шару за дії кругового штампа з ексцентриситетом. Не встановлено момент сили, що забезпечує поступальний рух штампа.

### ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

**1. Постановка задачі та її розв'язання.** У півнескінченну пружну плиту (модуль зсуву  $G$ , коефіцієнт Пуассона  $\mu$ ) скінченної товщини  $h$ , що спирається на абсолютно жорстку основу без тертя, що описується у декартовій системі координат співвідношеннями  $0 < x < \infty$ ,  $-\infty < y < \infty$ ,  $0 < z < h$  під дією зовнішньої сили  $P$  на грані  $z = h$  втискується абсолютно жорсткий круговий у плані штамп (рис.) ( $A$  – радіус штампа,  $B$  – відстань від початку координат до центра штампа), причому лінія діючої на штамп сили не збігається з його віссю. Приймаємо також, що тертя між штампом та плитою відсутнє. По торцю півшару і на нижній грані задано умови гладкого контакту. Потрібно знайти такий момент  $M$  прикладення зосередженої сили  $P$ , що штамп буде рухатися поступально на невідому величину осадки  $\delta$ .

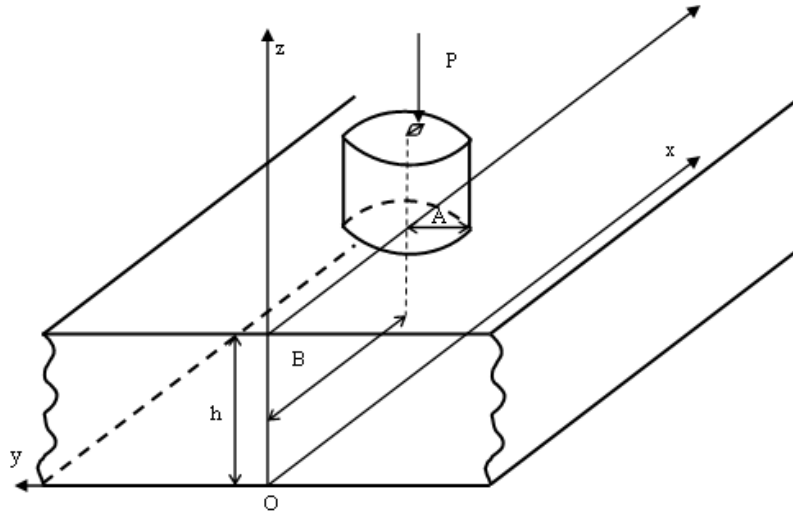


Рис. Постановка задачі

При розв'язуванні використовується формула вертикального переміщення точок півшару під дією сили  $P$ , що діє у довільній точці  $(a, b)$  грані  $z = h$ , аналітичне подання якого отримано у роботі [16]

$$w_0(x, y, z) = -\frac{\mu_1^{-1}}{4\pi G} \int_0^\infty J_0^*(t, x, y, a, b) F(ht) dt, \quad F(ht) = \frac{ch(2ht) - 1}{sh(2ht) + 2ht}, \quad \mu_1 = (2 - 2\mu)^{-1},$$

$$J_0^*(t, x, y, a, b) = J_0\left(t\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}\right) + J_0\left(t\sqrt{(x+a)^2 + (y-b)^2}\right), \quad (1)$$

$J_0(t)$  — функція Бесселя.

Виділимо асимптотику підінтегральної функції виходячи з того, що

$$\lim_{t \rightarrow 0} J_0(t) = 1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 1,$$

за наступним правилом:  $F(t) - 1 + 1 = R(t) + 1$ , де

$$R(ht) = \frac{2e^{-4ht} - 2e^{-2ht} - 4hte^{-2ht}}{1 + 4hte^{-2ht} - e^{-4ht}} = \frac{e^{-2ht} - 2ht - 1}{sh(2ht)} + 2ht. \quad (2)$$

Для того щоб перейти до кругового штампа  $0 < r < A$ ,  $-\pi < \phi < \pi$ , виконаємо заміну до полярної системи координат

$$x = B + r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi, \quad a = B + \rho \cos \psi, \quad b = \rho \sin \psi, \quad (3)$$

де  $B$  — відстань від початку координат до центра штампа.

Тоді замість функції  $J_0^*(t, x, y, a, b)$  у (1) отримаємо

$$J_0^*(t, r, \rho, \phi, \psi, B) = J_0\left(t\sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\phi - \psi)}\right) + J_0\left(t\sqrt{4B^2 + 4B(r \cos \phi + \rho \cos \psi) + r^2 + \rho^2 + 2r\rho \cos(\phi - \psi)}\right).$$

Введемо наступне позначення

$$W(r, \rho, \phi, \psi) = \int_0^\infty J_0\left(t\sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\phi - \psi)}\right) (1 + R(ht)) dt,$$

$$W(r, \rho, \phi, \psi)_B = \int_0^\infty J_0\left(t\sqrt{4B^2 + 4B(r \cos \phi + \rho \cos \psi) + r^2 + \rho^2 + 2r\rho \cos(\phi - \psi)}\right) \cdot (1 + R(ht)) dt.$$

Тоді переміщення під дією розподіленого по круговому штампі навантаження отримаємо у вигляді

$$w_p(r, \phi) = -\frac{\mu_1^{-1}}{4\pi G} \int_0^A \int_{-\pi}^\pi [W(r, \rho, \phi, \psi) + W(r, \rho, \phi, \psi)_B] p(\rho, \psi) \rho d\rho d\psi, \quad (4)$$

де  $p(\rho, \psi)$  — інтенсивність діючого навантаження. Навантаження задамо таким чином, що функція переміщень буде являти собою площину, причому паралельну осі  $y$

$$Ax + Cz + D = 0 \Rightarrow z = -\frac{A}{C}x - \frac{D}{C}. \quad (5)$$

З іншого боку, якщо  $\delta$  — відстань, на яку втискується штамп,  $\omega$  — кут повороту штампа навколо осі  $Oy$ , то, розглянувши локальну систему координат, отримаємо

$$w = -\delta - x_* \sin \omega, \quad x = x_* + B \Rightarrow x_* = x - B,$$

а значить

$$w = -\delta - (x - B) \sin \omega = -x \sin \omega - (\delta - B \sin \omega).$$

Тоді із (5), прирівнявши коефіцієнти

$$\frac{A}{C} = \sin \omega, \quad \frac{D}{C} = \delta - B \sin \omega, \quad z = -\delta - (x - B) \sin \omega,$$

запишемо рівняння переміщень точок штампа

$$w_0(r, \phi) = -\delta + (B + r \cos \phi - B) \sin \omega = -\delta - r \cos \phi \sin \omega. \quad (6)$$

Переміщення верхньої межі шару (4) покладемо рівними переміщенням штампа (6) під дією на нього сили постійної інтенсивності. У результаті отримаємо інтегральне рівняння відносно невідомого контактного напруження.

Запишемо у загальному вигляді інтегральне рівняння

$$w_p(r, \phi) = w_0(r, \phi), \quad 0 < r < A, \quad -\pi < \phi < \pi. \quad (7)$$

Зробимо наступну заміну змінних

$$\begin{aligned} r &= r' A, & r' &\in [0, 1] & \rho &= \rho' A, & \rho' &\in [0, 1], & dp &= A d\rho', \\ t &= t' / A, & dt &= dt' / A, & a &= h / A. \end{aligned} \quad (8)$$

Отримаємо для (4) вираз

$$w_p(r' A, \phi) = -\frac{\mu_1^{-1} A}{4\pi G} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} J_0^*(t', r', \rho', \phi, \psi, B/A) (1 + R(t'a)) p(\rho' A, \psi) \rho' d\rho' d\psi dt'.$$

У подальшому штрихи не пишемо. З урахуванням вигляду  $J_0^*$  можна записати так:

$$w_p(r, \phi) = -\frac{\mu_1^{-1} A}{4\pi G} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} [W(r, \rho, \phi, \psi) + W_{B/A}(r, \rho, \phi, \psi)] p(\rho, \psi) \rho d\rho d\psi.$$

Тоді інтегральне рівняння (7) запишемо у формі

$$\begin{aligned} -\frac{\mu_1^{-1} A}{4\pi G} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} [W(r, \rho, \phi, \psi) + W_{B/A}(r, \rho, \phi, \psi)] p(\rho, \psi) \rho d\rho d\psi = \\ = -\delta - r A \cos \phi \sin \omega, \quad 0 < r < A, \quad -\pi < \phi < \pi. \end{aligned} \quad (9)$$

Враховуючи те, що силу прикладено симетрично відносно штампа, площина  $zOy$  є площиною симетрії, та тому контактне напруження буде парним відносно

полярного кута та можна задавати його у вигляді розвинення у ряд по системі косинусів

$$p(\rho, \psi) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(\rho) \cos n\psi. \quad (10)$$

Підставимо (10) у рівняння (9)

$$\begin{aligned} -\frac{\mu_1^{-1}A}{4\pi G} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \rho p_n(\rho) \int_{-\pi}^{\pi} [W(r, \rho, \phi, \psi) + W_{B/A}(r, \rho, \phi, \psi)] \cos n\psi d\rho d\psi = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cos n\phi, \quad 0 < r < A, \quad -\pi < \phi < \pi. \end{aligned} \quad (11)$$

Тут праву частину також розкладено у ряд за системою косинусів, причому, враховуючи вигляд правої частини у (9), виконуються рівності

$$f_0(r) = -\delta, \quad f_1 = -rA \sin \omega.$$

Введемо позначення

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \rho p_n(\rho) \int_{-\pi}^{\pi} W(r, \rho, \phi, \psi) \cos n\psi d\rho d\psi = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \rho p_n(\rho) \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} J_0 \left( t \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\phi - \psi)} \right) (1 + R(ht)) \cos n\psi d\rho d\psi dt. \end{aligned} \quad (12)$$

$$I_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \rho p_n(\rho) \int_{-\pi}^{\pi} W_{B/A}(r, \rho, \phi, \psi) \cos n\psi d\rho d\psi. \quad (13)$$

Тоді інтегральне рівняння (11) приймає вигляд

$$-\frac{\mu_1^{-1}A}{4\pi G} [I_1 + I_2] = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(r) \cos n\phi. \quad (14)$$

Розглянемо у співвідношенні  $I_1$ , що визначено формулою (12), інтеграл

$$\int_{-\pi}^{\pi} J_0 \left( t \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\phi - \psi)} \right) p(\rho, \psi) d\psi = \int_{-\pi}^0 + \int_0^{\pi} (J_0 \cdot p(\rho, \psi)) d\psi,$$

де після виконання у другому інтегралі заміни  $\psi' = -\psi$  отримаємо

$$\int_0^{\pi} \left[ J_0 \left( t \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\phi - \psi)} \right) + J_0 \left( t \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\phi + \psi)} \right) \right] p(\rho, \psi) d\psi.$$

Після застосування теореми додавання для функції Бесселя (8.531 [23]) маємо

$$\int_0^{\pi} \left[ 2J_0(tr)J_0(t\rho) + 4 \sum_{k=1}^{\infty} J_k(tr)J_k(t\rho) \cos k\phi \cos k\psi \right] p(\rho, \psi) d\psi. \quad (15)$$

Підставимо отриманий вираз (15) у вихідний інтеграл  $I_1$  (12)

$$I_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \rho p_n(\rho) \int_0^{\pi} \cos n\psi \int_0^{\infty} [2J_0(tr)J_0(t\rho) + \\ + 4 \sum_{k=1}^{\infty} J_k(tr)J_k(t\rho) \cos k\phi \cos k\psi] (1 + R(ht)) d\rho d\psi dt$$

та обчислимо інтеграли по  $\psi$ , враховуючи формулу (858.517 [27]).

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \rho p_n(\rho) \int_0^{\pi} \cos n\psi \left[ 2J_0(tr)J_0(t\rho) + 4 \sum_{k=1}^{\infty} J_k(tr)J_k(t\rho) \cos k\phi \cos k\psi \right] d\psi = \\ = 2\pi p_0(\rho)J_0(tr)J_0(t\rho) + 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} p_n(\rho)J_n(tr)J_n(t\rho) \cos n\phi = \\ = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} p_n(\rho)J_n(tr)J_n(t\rho) \cos n\phi. \end{aligned}$$

Запишемо остаточний вигляд перетвореного інтеграла з рівняння (14)

$$I_1 = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \rho p_n(\rho) \int_0^{\infty} J_n(tr)J_n(t\rho) (1 + R(ht)) d\rho dt \cdot \cos n\phi. \quad (16)$$

Розглянемо інтеграл  $I_2$ , визначений у (13)

$$I_1 = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \rho p_n(\rho) \int_{-\pi}^{\pi} W_{B/A}(r, \rho, \phi, \psi) \cos n\psi d\rho d\psi, \quad (17)$$

де

$$W_{B/A}(r, \rho, \phi, \psi) = \int_0^{\infty} J_0(t \cdot R(r, \rho, \phi, \psi)) (1 + R(ht)) dt, \quad (18)$$

$$R(r, \rho, \phi, \psi) = \quad (19)$$

$$= \sqrt{4(B/A)^2 + 4(B/A)(r \cos \phi + \rho \cos \psi) + r^2 + \rho^2 + 2r\rho \cos(\phi + \psi)}.$$

Розглянемо інтеграл (18)

$$\begin{aligned} W_{B/A}(r, \rho, \phi, \psi) &= \int_0^{\infty} J_0(t \cdot R(r, \rho, \phi, \psi)) (1 + R(ht)) dt = \\ &= \frac{1}{R(r, \rho, \phi, \psi)} + \int_0^{\infty} J_0(t \cdot R(r, \rho, \phi, \psi)) R(ht) dt. \end{aligned}$$

Тут було використано формулу (6.511[23]), у другому інтегралі підінтегральна функція  $R(ht)$ , що визначена у (2), експоненціально спадає. Підставимо інтегральне подання функції Бесселя [14]

$$J_0\left(t\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2}\right)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos[t(x+a)\cos\xi]\cos[t(y-b)\sin\xi]d\xi$$

в останній інтеграл, враховуючи заміну змінних (13), (8)

$$\begin{aligned} W_{B/A} &= \frac{1}{R(r,\rho,\phi,\psi)} + \\ &+ \frac{2}{\pi} \int_0^\infty R(ta) \int_0^{\pi/2} \cos[t(2B/A+r\cos\phi+\rho\cos\psi)\cos\xi] \times \\ &\times \cos[t(r\sin\phi-\rho\sin\psi)\sin\xi] d\xi dt. \end{aligned} \quad (20)$$

Після застосування формул (401.03., 401.04. [27]), знайдемо

$$\begin{aligned} &\cos[t_c(x+a)]\cos[t_s(y-b)] = \\ &= \cos(t_c x)\cos(t_c a)\cos(t_s y)\cos(t_s b) + \cos(t_c x)\cos(t_c a)\sin(t_s y)\sin(t_s b) - \\ &- \sin(t_c x)\sin(t_c a)\cos(t_s y)\cos(t_s b) - \sin(t_c x)\sin(t_c a)\sin(t_s y)\sin(t_s b). \end{aligned}$$

Тут використані позначення

$$t\cos\xi = t_c, \quad t\sin\xi = t_s.$$

Підставимо отриманий вираз (20) у  $I_2$ , що визначено у (17),

$$I_2 = A \int_0^1 \rho \sum_{n=0}^{\infty} p_n(\rho) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos n\psi d\rho d\psi}{R(r,\rho,\phi,\psi)} + \quad (21)$$

$$+ \frac{2A}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \rho p_n(\rho) \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi/2} R(ta) \cos n\psi \int_0^{\pi/2} F^* d\rho d\psi dt d\xi,$$

де

$$\begin{aligned} F^* &= \cos\left[t_c\left(\frac{B}{A}+r\cos\phi\right)\right]\cos\left[t_c\left(\frac{B}{A}+\rho\cos\psi\right)\right]\cos[t_s(r\sin\phi)]\cos[t_s(\rho\sin\psi)] + \\ &+ \cos\left[t_c\left(\frac{B}{A}+r\cos\phi\right)\right]\cos\left[t_c\left(\frac{B}{A}+\rho\cos\psi\right)\right]\sin[t_s(r\sin\phi)]\sin[t_s(\rho\sin\psi)] - \\ &- \sin\left[t_c\left(\frac{B}{A}+r\cos\phi\right)\right]\sin\left[t_c\left(\frac{B}{A}+\rho\cos\psi\right)\right]\cos[t_s(r\sin\phi)]\cos[t_s(\rho\sin\psi)] - \\ &- \sin\left[t_c\left(\frac{B}{A}+r\cos\phi\right)\right]\sin\left[t_c\left(\frac{B}{A}+\rho\cos\psi\right)\right]\sin[t_s(r\sin\phi)]\sin[t_s(\rho\sin\psi)]. \end{aligned}$$

В інтегралі (21) використаємо парність підінтегральної функції  $F^*$  за змінною  $\xi$  та зробимо в отриманому інтегралі заміну

$$\sin \xi = \tau, \quad \cos \xi = \sqrt{1 - \tau^2}, \quad d\xi = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}}.$$

Застосуємо квадратурну формулу Гаусса [36] до отриманого інтеграла

$$\frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} F^* d\xi = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 F^*(\tau) \text{frac} d\tau \sqrt{1 - \tau^2} = \frac{1}{2} \frac{\pi}{N} \sum_{-1}^1 F^*(\tau_i^N),$$

$\tau_i = \cos \frac{2i-1}{2N} \pi$ ,  $i = \overline{1, N}$  – нулі многочлена Чебишева першого роду. Тоді інтеграл (21) перетвориться до вигляду

$$\begin{aligned} I_2 = & A \int_0^1 \rho \sum_{n=0}^{\infty} p_n(\rho) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos n\psi d\rho d\psi}{R(r, \rho, \phi, \psi)} + \\ & + A \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \rho p_n(\rho) \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} R(ta) \cos n\psi \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F^*(\tau_i^N) d\rho d\psi dt. \end{aligned} \quad (22)$$

Змінимо порядок інтегрування та розглянемо

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} F^*(\tau_i^N) \cos n\psi d\psi = \\ & = \cos \left[ t_c \left( \frac{B}{A} + r \cos \phi \right) \right] \cos [t_s(r \sin \phi)] \int_{-\pi}^{\pi} \cos n\psi \cos \left[ t_c \left( \frac{B}{A} + \rho \cos \psi \right) \right] \cos [t_s(\rho \sin \psi)] d\psi + \\ & + \cos \left[ t_c \left( \frac{B}{A} + r \cos \phi \right) \right] \sin [t_s(r \sin \phi)] \int_{-\pi}^{\pi} \cos n\psi \cos \left[ t_c \left( \frac{B}{A} + \rho \cos \psi \right) \right] \sin [t_s(\rho \sin \psi)] d\psi - \\ & - \sin \left[ t_c \left( \frac{B}{A} + r \cos \phi \right) \right] \cos [t_s(r \sin \phi)] \int_{-\pi}^{\pi} \cos n\psi \sin \left[ t_c \left( \frac{B}{A} + \rho \cos \psi \right) \right] \cos [t_s(\rho \sin \psi)] d\psi - \\ & - \sin \left[ t_c \left( \frac{B}{A} + r \cos \phi \right) \right] \sin [t_s(r \sin \phi)] \int_{-\pi}^{\pi} \cos n\psi \sin \left[ t_c \left( \frac{B}{A} + \rho \cos \psi \right) \right] \sin [t_s(\rho \sin \psi)] d\psi. \end{aligned}$$

Видно, що у другому та четвертому інтегралах підінтегральні функції непарні, а значить, ці інтеграли дорівнюють нулю. У першому та третьому – парні, значить



МОЖЕМО ЗАПИСАТИ

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} F^*(\tau_i^N) \cos n\psi d\psi = \\ & = 2 \cos \left[ t_c \left( \frac{B}{A} + r \cos \phi \right) \right] \cos [t_s(r \sin \phi)] \int_0^{\pi} \cos n\psi \cos \left[ t_c \left( \frac{B}{A} + \rho \cos \psi \right) \right] \cos [t_s(\rho \sin \psi)] d\psi - \\ & - 2 \sin \left[ t_c \left( \frac{B}{A} + r \cos \phi \right) \right] \cos [t_s(r \sin \phi)] \int_0^{\pi} \cos n\psi \sin \left[ t_c \left( \frac{B}{A} + \rho \cos \psi \right) \right] \cos [t_s(\rho \sin \psi)] d\psi. \end{aligned}$$

Таким чином, для другого доданка (22) з урахуванням заміни  $\sin \xi = \tau$  маємо

$$2A \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \rho p_n(\rho) \int_0^{\infty} R(ta) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F^{**}(\tau_i^N) d\rho dt, \quad (23)$$

де

$$\begin{aligned} F^{**}(\tau_i^N) &= \cos \left[ t \sqrt{1 - \tau_i^2} \left( \frac{B}{A} + r \cos \phi \right) \right] \cos [t\tau_i r \sin \phi] \times \\ & \times \int_0^{\pi} \cos n\psi \cos \left[ t \sqrt{1 - \tau_i^2} \left( \frac{B}{A} + \rho \cos \psi \right) \right] \cos [t\tau_i r \sin \psi] d\psi - \\ & - \sin \left[ t \sqrt{1 - \tau_i^2} \left( \frac{B}{A} + r \cos \phi \right) \right] \cos [t\tau_i r \sin \phi] \times \\ & \times \int_0^{\pi} \cos n\psi \sin \left[ t \sqrt{1 - \tau_i^2} \left( \frac{B}{A} + \rho \cos \psi \right) \right] \cos [t\tau_i r \sin \psi] d\psi. \end{aligned}$$

Використаємо формули (401.03., 401.01. [27]). Введемо позначення

$$I_{ni}^{(1)}(\rho) = \int_0^{\pi} \cos n\psi \cos \left[ t \sqrt{1 - \tau_i^2} \left( \frac{B}{A} + \rho \cos \psi \right) \right] \cos [t\tau_i r \sin \psi] d\psi, \quad (24)$$

$$I_{ni}^{(2)}(\rho) = \int_0^{\pi} \cos n\psi \sin \left[ t \sqrt{1 - \tau_i^2} \left( \frac{B}{A} + \rho \cos \psi \right) \right] \cos [t\tau_i r \sin \psi] d\psi.$$

Після виконання перетворень, отримаємо вираз для доданка (23)

$$\begin{aligned} & 2A \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \rho p_n(\rho) \int_0^{\infty} R(ta) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left\{ \cos \left[ t \sqrt{1 - \tau_i^2} \left( 2\frac{B}{A} + r \cos \phi \right) \right] \cos [t\tau_i r \sin \phi] \cdot I_{ni}^{(1)}(\rho) - \right. \\ & \left. - \sin \left[ t \sqrt{1 - \tau_i^2} \left( 2\frac{B}{A} + r \cos \phi \right) \right] \cos [t\tau_i r \sin \phi] \cdot I_{ni}^{(2)}(\rho) \right\} d\rho dt. \end{aligned} \quad (25)$$

Запишемо остаточний вираз для інтеграла  $I_2$

$$\begin{aligned}
 I_2 = & A \sum_0^1 \rho \sum_{n=0}^{\infty} p_n(\rho) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos n\psi d\rho d\psi}{R(r, \rho, \phi, \psi)} + \\
 & + 2A \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \rho p_n(\rho) \int_0^{\infty} R(ta) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left\{ \cos \left[ t\sqrt{1 - \tau_i^2} \left( 2\frac{B}{A} + r \cos \phi \right) \right] \cos [t\tau_i r \sin \phi] \cdot I_{ni}^{(1)}(\rho) - \right. \\
 & \left. - \sin \left[ t\sqrt{1 - \tau_i^2} \left( 2\frac{B}{A} + r \cos \phi \right) \right] \cos [t\tau_i r \sin \phi] \cdot I_{ni}^{(2)}(\rho) \right\} d\rho dt.
 \end{aligned} \tag{26}$$

У результаті проведених перетворень інтегральне рівняння (14), враховуючи (16), запишемо у формі

$$\begin{aligned}
 & - \frac{\mu_1^{-1} A}{4\pi G} \left[ 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \rho p_n(\rho) \int_0^{\infty} J_n(tr) J_n(t\rho) (1 + R(ta)) d\rho dt \cdot \cos n\phi + \right. \\
 & \left. + \int_0^1 \rho \sum_{n=0}^{\infty} p_n(\rho) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos n\psi d\rho d\psi}{R(r, \rho, \phi, \psi)} + \right. \\
 & + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \rho p_n(\rho) \int_0^{\infty} R(ta) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left\{ \cos \left[ t\sqrt{1 - \tau_i^2} \left( 2\frac{B}{A} + r \cos \phi \right) \right] \cos [t\tau_i r \sin \phi] \cdot I_{ni}^{(1)}(\rho) - \right. \\
 & \left. - \sin \left[ t\sqrt{1 - \tau_i^2} \left( 2\frac{B}{A} + r \cos \phi \right) \right] \cos [t\tau_i r \sin \phi] \cdot I_{ni}^{(2)}(\rho) \right\} d\rho dt \Big] = \\
 & = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(r) \cos n\phi,
 \end{aligned} \tag{27}$$

де функцію  $R(r, \rho, \phi, \psi)$  визначено у (19),  $R(ta)$  у (2) з заміною  $h$  на  $a$ ,  $I_{ni}^{(i)}(\rho)$ ,  $i = 0, 1$  – у співвідношеннях (24).

Домножимо рівняння (27) на  $\cos k\phi$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  та проінтегруємо на проміжку  $\phi \in [0, \pi]$  з використанням ортогональності системи косинусів. Для першого доданка

$$I_1 = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \rho p_n(\rho) \int_0^{\infty} J_n(tr) J_n(t\rho) (1 + R(ta)) d\rho dt \cdot \cos n\phi$$

отримаємо

$$\begin{aligned}
 I_1 = & \pi^2 \delta_k^* \int_0^1 \rho p_k(\rho) \int_0^{\infty} J_k(tr) J_k(t\rho) (1 + R(ta)) d\rho dt, \\
 k = & 0, 1, 2, \dots, \quad \delta_k^* = \begin{cases} 2, & k = 0 \\ 1, & k \leq 1 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{28}$$

Для другого доданка рівняння (27) будемо мати

$$I_2 = \int_0^1 \rho \sum_{n=0}^{\infty} p_n(\rho) \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos n\psi \cdot \cos k\phi d\rho d\psi}{R(r, \rho, \phi, \psi)} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \rho p_n(\rho) \int_0^{\infty} R(ta) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_{nk}(R, \rho) d\rho dt, \quad (29)$$

де

$$f_{nk}(R, \rho) = \cos \left[ 2 \frac{B}{A} t \sqrt{1 - \tau_i^2} \right] \left\{ I_{ni}^{(1)}(\rho) \cdot I_{ki}^{(1)}(r) - I_{ni}^{(2)}(\rho) \cdot I_{ki}^{(2)}(r) \right\} -$$

$$- \sin \left[ 2 \frac{B}{A} t \sqrt{1 - \tau_i^2} \right] \left\{ I_{ni}^{(1)}(\rho) \cdot I_{ki}^{(2)}(r) - I_{ni}^{(2)}(\rho) \cdot I_{ki}^{(1)}(r) \right\}.$$

Якщо ввести позначення

$$F_{nk}^*(r, \rho) = \frac{1}{2} \int_0^1 \rho \sum_{n=0}^{\infty} p_n(\rho) \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos n\psi \cdot \cos k\phi d\rho d\psi d\phi}{R(r, \rho, \phi, \psi)} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \rho p_n(\rho) \int_0^{\infty} R(ta) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_{nk}(R, \rho) d\rho dt, \quad (30)$$

інтегральне рівняння (27) після ортогоналізації за системою косинусів, враховуючи (28), (29), запишеться у вигляді

$$- \frac{\mu_1^{-1} A}{2\pi G} \left[ \pi^2 \delta_k^* \int_0^1 \rho p_k(\rho) \int_0^{\infty} J_k(tr) J_k(t\rho) (1 + R(ta)) d\rho dt + F_{nk}^*(r, \rho) \right] = f_k(r), \quad (31)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

Для правої частини будемо мати

$$f_k(r) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(r) \int_0^{\pi} \cos k\phi \cos n\phi d\phi =$$

$$= f_0(r) \int_0^{\pi} \cos k\phi d\phi + f_1(r) \int_0^{\pi} \cos k\phi \cos \phi d\phi = \pi \delta_{k0} f_0(r) + \frac{\pi}{2} \delta_{k1} f_1(r).$$

Використаємо результат роботи [70]

$$W_{\mu, \gamma}^{\nu}(x, y) = \int_0^{\infty} t^{\nu} J_{\mu}(tx) J_{\gamma}(ty) dt, \quad \operatorname{Re} \nu < 1, \quad \operatorname{Re}(\nu + \mu + \gamma) > -1,$$

де у нашому випадку інтеграл Вебера—Шафхейтліна приймає вигляд

$$W_{k, k}(r, \rho) = \int_0^{\infty} J_k(tr) J_k(t\rho) dt, \quad \nu = 0, \quad \mu = \gamma = k$$

$$2\sigma_+ = 1 - \nu - (\gamma - \mu) = 1, \quad 2\sigma_- = 1 - \nu + (\gamma - \mu) = 1 \Rightarrow$$

$$\sigma_{\pm} = \frac{1}{2}, \quad 2\sigma_- = 1 + \nu + \gamma + \mu = 1 + 2k \Rightarrow \sigma = \frac{1}{2} + k.$$

Виходячи із спектрального співвідношення [70]

$$\int_0^{\infty} \frac{W_{k,k}(x,y)}{\sqrt{1-y^2}} P_m^{k,-\frac{1}{2}}(1-2y^2) Y^{k+1} dy = \sigma_{mk} x^k P_m^{k,-\frac{1}{2}}(1-2x^2), \quad (32)$$

де  $\sigma_{mk} = \frac{\Gamma(m+\frac{1}{2})\Gamma(m+k+\frac{1}{2})}{2m!\Gamma(m+k+1)}$ ,  $P_m^{k,-\frac{1}{2}}(1-2y^2)$  – многочлени Якобі, розв’язок рівняння (31) будемо шукати у вигляді

$$p_k(\rho) = \frac{\rho^k}{\sqrt{1-\rho^2}} \sum_{m=0}^{\infty} p_{km} P_m^{k,-\frac{1}{2}}(1-2\rho^2). \quad (33)$$

Підставимо розв’язок (33) у перший інтеграл рівняння (31) та використаємо співвідношення (32)

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{\rho^{k+1}}{\sqrt{1-\rho^2}} \sum_{m=0}^{\infty} p_{km} P_m^{k,-\frac{1}{2}}(1-2\rho^2) W_{k,k}(r,\rho) d\rho = \\ & \sum_{m=0}^{\infty} p_{km} \int_0^1 \frac{W_{k,k}(r,\rho)}{\sqrt{1-\rho^2}} P_m^{k,-\frac{1}{2}}(1-2\rho^2) \rho^{k+1} d\rho = \sum_{m=0}^{\infty} p_{km} \sigma_{km} r^k P_m^{k,-\frac{1}{2}}(1-2\rho^2). \end{aligned}$$

Після підстановки розв’язку до другого інтеграла рівняння (31) отримаємо

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_{km} \int_0^1 \int_0^{\infty} \frac{\rho^{k+1}}{\sqrt{1-\rho^2}} R(ta) J_k(tr) J_k(t\rho) P_m^{k,-\frac{1}{2}}(1-2\rho^2) d\rho dt.$$

У залишених доданках будемо підставляти розвинення

$$p_n(\rho) = \frac{\rho^n}{\sqrt{1-\rho^2}} \sum_{l=0}^{\infty} p_{nl} P_l^{n,-\frac{1}{2}}(1-2\rho^2).$$

Після підстановки розв’язку (33) рівняння (31) буде мати вигляд

$$\begin{aligned} & -\frac{\mu_1^{-1}A}{2\pi G} [\pi^2 \delta_k^* \{ \sum_{m=0}^{\infty} p_{km} \sigma_{mk} r^k P_l^{k,-\frac{1}{2}}(1-2\rho^2) + \\ & + \sum_{m=0}^{\infty} p_{km} \int_0^1 \int_0^{\infty} \frac{\rho^{k+1}}{\sqrt{1-\rho^2}} J_k(tr) J_k(t\rho) P_l^{k,-\frac{1}{2}}(1-2\rho^2) d\rho dt \} + F_{nkl}^*(r,\rho)] = f_k(r), \\ & k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (34)$$

де

$$\begin{aligned} F_{nkl}^*(r,\rho) &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{\rho^{n+1}}{\sqrt{1-\rho^2}} \sum_{l=0}^{\infty} p_{nl} P_l^{k,-\frac{1}{2}}(1-2\rho^2) \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos n\psi \cdot \cos k\phi d\rho d\psi d\phi}{R(r,\rho,\phi,\psi)} + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{\rho^{n+1}}{\sqrt{1-\rho^2}} \sum_{l=0}^{\infty} p_{nl} P_l^{k,-\frac{1}{2}}(1-2\rho^2) \int_0^{\infty} R(ta) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_{nk}(r,\rho) d\rho dt. \end{aligned}$$

Виконаємо ортогоналізацію за многочленами Якобі. Skorистаємося формулою (7.391(1), [23]) з наступною заміною змінних

$$x = 1 - 2y^2, \quad dx = -4ydy, \quad x = -1 \rightarrow y = 1, \quad x = 1 \rightarrow y = 0.$$

Врахуємо, що  $\beta = -\frac{1}{2}$ ,  $\alpha = k$ . Тоді отримаємо формулу ортогональності

$$\int_0^1 \frac{P_m^{k, -\frac{1}{2}}(1-2\rho^2)P_j^{k, -\frac{1}{2}}(1-2\rho^2)}{\sqrt{1-\rho^2}} y^{2k+1} dy = \sigma_{jk}^* \delta_{jm}, \quad (35)$$

де  $\sigma_{jk}^* = \frac{\Gamma(j + \frac{1}{2})\Gamma(k + j + 1)}{2j!\Gamma(m + k + \frac{1}{2})(k + 2j + \frac{1}{2})}$ ,  $\delta_{jm}$  – символ Кронекера.

Виходячи із формули (35) проінтегруємо за змінною  $r$  на проміжку  $[0, 1]$  рівняння (34) з вагою  $r^{k+1}(1-r^2)^{-\frac{1}{2}}P_j^{k, -\frac{1}{2}}(1-2r^2)$

$$\int_0^1 \frac{P_m^{k, -\frac{1}{2}}(1-2\rho^2)P_j^{k, -\frac{1}{2}}(1-2\rho^2)}{\sqrt{1-\rho^2}} r^{2k+1} dr = \sigma_{jk}^* \delta_{mj};$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} p_{km} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{\infty} R(ta) J_k J_k(t\rho) \frac{\rho^{n+1} P_m^{n, -\frac{1}{2}}(1-2\rho^2)}{\sqrt{1-\rho^2}} \frac{\rho^{n+1} P_j^{n, -\frac{1}{2}}(1-2\rho^2)}{\sqrt{1-r^2}} d\rho dr dt = \\ = \sum_{m=0}^{\infty} p_{km} A_{mj}^{(k)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} p_{nl} \int_0^1 \frac{\rho^{n+1} P_l^{n, -\frac{1}{2}}(1-2\rho^2)}{\sqrt{1-\rho^2}} \int_0^1 \frac{\rho^{n+1} P_j^{n, -\frac{1}{2}}(1-2\rho^2)}{\sqrt{1-r^2}} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \cos n\psi \cdot \cos k\phi d\rho d\psi d\phi = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} p_{nl} C_{jnl}^{(k)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} p_{nl} \int_0^1 \frac{\rho^{n+1} P_l^{n, -\frac{1}{2}}(1-2\rho^2)}{\sqrt{1-\rho^2}} \int_0^1 \frac{\rho^{n+1} P_j^{n, -\frac{1}{2}}(1-2\rho^2)}{\sqrt{1-r^2}} \int_0^{\infty} R(ta) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_{nk}(r, \rho) d\rho dt = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} p_{nl} B_{jnl}^{(k)}. \end{aligned}$$

Для правої частини рівняння запишемо

$$f_{kj} = - \int_0^1 \left[ \delta_{k0} \delta + \frac{1}{2} \delta_{k1} r A \sin \omega \right] \frac{\rho^{k+1} P_j^{k, -\frac{1}{2}}(1-2r^2)}{\sqrt{1-r^2}}.$$

Отримано нескінченну двовимірну систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} & -\frac{\mu_1^{-1}A}{2G}[\pi^2\delta_k^* \left\{ \sigma_{kj}\sigma_{kj}^* p_{kj} + \sum_{m=0}^{\infty} p_{km}A_{mj}^{(k)} \right\} + \\ & + \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} p_{nl}(C_{jnl}^{(k)} + B_{jnl}^{(k)})] = f_{kj}, \quad k, j = \overline{0, \infty}. \end{aligned} \quad (36)$$

Регуляризуємо її, привівши до стандартного вигляду нескінченної двовимірної системи [69]

$$x_{kj} - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} t_{kjnl} x_{nl} = f_{kj}, \quad k, j = \overline{0, \infty}.$$

Позначимо

$$\Lambda_{kj} = \sigma_{kj}^* \cdot \sigma_{kj}.$$

Перетворимо доданок у (36)

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_{km}A_{mj}^{(k)} = \sum_{l=0}^{\infty} p_{kl}A_{lj}^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} p_{nl}\delta_{nk}A_{lj}^{(k)} = \sum_{l=0}^{\infty} A_{lj}^{(k)} \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{nk}p_{nl} = \sum_{l=0}^{\infty} p_{kl}A_{lj}^{(k)}.$$

Тоді

$$\frac{1}{2}\delta_k \left\{ \Lambda_{kj}p_{kj} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} p_{nl}\delta_{nk}A_{lj}^{(k)}\delta_{nk} \right\} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} p_{nl}B_{jnl}^{*(k)} = \frac{2G\mu_1}{A}f_{kj},$$

де  $B_{jnl}^{*(k)} = \frac{1}{\pi^2}(C_{jnl}^{(k)} + B_{jnl}^{(k)})$ . Запишемо нескінченну систему (36) у вигляді

$$\Lambda_{kj}p_{kj} - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left[ -A_{nl}^{(k)}\delta_{nk} - \delta_k^* B_{jnl}^{*(k)} \right] p_{nl} = \delta_k^* \frac{2G\mu_1}{A}f_{kj}, \quad (37)$$

де  $\delta_k^* = \begin{cases} 1, k = 0 \\ 2, k \leq 1 \end{cases}$ . Для запису системи у стандартній формі знайдемо асимптотику  $\Lambda_{kj}$ .

$$\sigma_{kj} = \frac{1}{2}j^{-\frac{1}{2}} \left( 1 + O\left(\frac{1}{j}\right) \right) \frac{1}{(j+k)^{\frac{1}{2}}} \left( 1 + O\left(\frac{1}{j+k}\right) \right),$$

$$\sigma_{kj}^* = \frac{1}{2}j^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{k+2j+\frac{1}{j}} \left( 1 + O\left(\frac{1}{j}\right) \right) (j+k)^{\frac{1}{2}} \left( 1 + O\left(\frac{1}{j+k}\right) \right),$$

таким чином,

$$\Lambda_{kj} = \frac{1}{4} \frac{j^{-1}}{k+2j+\frac{1}{2}} \left( 1 + O\left(\frac{1}{j}\right) \right) \left( 1 + O\left(\frac{1}{j+k}\right) \right).$$

Зробимо заміну

$$p_{kj}^* = \sqrt{\Lambda_{kj}}p_{kj},$$

після чого розділимо обидві частини рівняння (37) на  $\sqrt{\Lambda_{kj}}$  та запишемо нескінченну систему у стандартній формі

$$p_{kj}^* - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} T_{nlkj} p_{kj}^* = f_{kj}^*, \quad (38)$$

де

$$T_{nlkj} = -\frac{1}{\sqrt{\Lambda_{kj}}\sqrt{\Lambda_{nl}}} \left[ A_{lj}^{(k)} \delta_{nk} + \delta_k^* B_{jnl}^{*(k)} \right], \quad (39)$$

$$\Lambda_{nl} = \left[ \frac{\Gamma(l + \frac{1}{2})}{2l!} \right]^2 \frac{1}{n + 2l + \frac{1}{2}}, \quad f_{kj}^* = \delta_k^* \frac{2G\mu_1}{A} \frac{f_{kj}}{\sqrt{\Lambda_{kj}}}, \quad \delta_k^* = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 2, & k \leq 1 \end{cases}$$

Будемо вважати, що штамп під дією прикладеної з ексцентриситетом  $e$  сили рухається поступально, тобто кут повороту  $\omega = 0$ . Необхідно визначити ексцентриситет, що забезпечить таке переміщення. Права частина рівняння (38) у цих припущеннях запишеться у формі

$$f_{kj}^* = \delta_k^* \cdot \delta_{k0} \frac{2G\mu_1}{A} \frac{\delta}{\sqrt{\Lambda_{kj}}} \int_0^1 \frac{r^{k+1} P_j^{k, -\frac{1}{2}}(1 - 2r^2)}{\sqrt{1 - r^2}}.$$

Матриця коефіцієнтів має вигляд (39), де

$$A_{lj}^k = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\rho^{k+1}}{\sqrt{1-\rho^2}} \cdot P_l^{k, -\frac{1}{2}}(1 - 2\rho^2) \cdot \frac{r^{k+1}}{\sqrt{1-r^2}} \cdot P_j^{k, -\frac{1}{2}}(1 - 2r^2) \cdot \int_0^{\infty} R(ta) \cdot J_k(t\rho) \cdot J_k(tr) d\rho dr dt,$$

$$R(ta) = \frac{e^{-2ta} - 1 - 2ta}{sh2ta + 2ta}, \quad a = \frac{h}{A},$$

$$B_{jnl}^{*(k)} = \frac{1}{\pi^2} [C_{jnl}^k - B_{jnl}^k],$$

$$C_{jnl}^k = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\rho^{n+1}}{\sqrt{1-\rho^2}} \cdot P_l^{n, -\frac{1}{2}}(1 - 2\rho^2) \cdot \frac{r^{k+1}}{\sqrt{1-r^2}} \cdot P_j^{k, -\frac{1}{2}}(1 - 2r^2) \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} F(\psi, \phi; r, \rho) d\rho dr d\psi d\phi,$$

$$F(\psi, \phi; r, \rho) = \frac{\cos n\psi \cdot \cos k\phi}{\sqrt{4b^2 + 4b(r \cos \phi + \rho \cos \psi)^2 r^2 + \rho^2 + 2r\rho \cos(\phi + \psi)}},$$

$$B_{jnl}^k = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\rho^{n+1}}{\sqrt{1-\rho^2}} \cdot P_l^{n, -\frac{1}{2}}(1 - 2\rho^2) \cdot \frac{r^{k+1}}{\sqrt{1-r^2}} \cdot P_j^{k, -\frac{1}{2}}(1 - 2r^2) \cdot \int_0^{\infty} R(ta) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F^*(t, \tau_i, \rho, r), d\rho dr dt,$$

$$F^*(t, \tau, \rho, r) = \cos[2t \frac{B}{A} \sin \tau_i] \cdot \left\{ I_{ni}^{(1)}(\rho) \cdot I_{ki}^{(1)}(r) - I_{ni}^{(2)}(\rho) \cdot I_{ki}^{(2)}(r) \right\} - \sin[2t \frac{B}{A} \sin \tau_i] \cdot \left\{ I_{ni}^{(1)}(\rho) \cdot I_{ki}^{(2)}(r) - I_{ni}^{(2)}(\rho) \cdot I_{ki}^{(1)}(r) \right\},$$

$$I_{ni}^{(1)} = \int_0^{\pi} \cos(n\psi) \cdot [t \cdot \rho \cdot \cos \tau_i \cdot \sin \psi] \cdot \cos(n\psi) \cdot [t \cdot \rho \cdot \sin \tau_i \cdot \cos \psi] d\psi,$$

$$I_{ni}^{(2)} = \int_0^{\pi} \cos(n\psi) \cdot [t \cdot \rho \cdot \cos \tau_i \cdot \sin \psi] \cdot \sin(n\psi) \cdot [t \cdot \rho \cdot \sin \tau_i \cdot \cos \psi] d\psi,$$

$$\tau_i = \frac{2i-1}{2N} \pi; \quad i = \overline{1, N}.$$

Систему (38) розв'язано методом редукції. У задачі є два невідомі параметри:  $\delta$  — величина поступальної осадки штампя під дією нецентральної вертикальної сили;  $M$  — момент сили, що забезпечує необхідне переміщення. Шукані параметри знайдемо з умов рівноваги штампя:

1. Сума проєкцій усіх сил, що прикладено до тіла, дорівнює нулю.
2. Сума моментів усіх сил, що прикладено до тіла, дорівнює нулю.

$$\int_0^A \int_0^{\pi} p(\rho, \psi) \rho d\rho d\psi = P, \quad \int_0^A \int_0^{\pi} p(\rho, \psi) \rho^2 \sin \psi d\rho d\psi = M.$$

**2. Результати розрахунків та їх аналіз.** Числові розрахунки проведено для шару з міді ( $\mu = 1/3$ ,  $G = 44.7$  ГПа) товщиною  $h = 1$  в залежності від  $B$  — відстані від бічної стінки півшару до центра штампя, радіуса  $A = 1$ . У таблиці наведено значення осадки штампя і момента сили при відстані від бічної стінки півшару до центра кругового штампя, що дорівнює  $B = 1$ ,  $B = 5$ ,  $B = 10$  відповідно, для різних значень  $N$  в редукції двовимірної нескінченної системи.

Таблиця

Осадка штампя та момент сили

		$\delta$	$M$
$B = 1$	$N = 1(4 \times 4)$	0.00310	0.50046
	$N = 2(9 \times 9)$	0.00291	0.51493
$B = 5$	$N = 1(4 \times 4)$	0.00274	0.51527
	$N = 2(9 \times 9)$	0.00235	0.51406
$B = 10$	$N = 1(4 \times 4)$	0.00312	0.51303
	$N = 2(9 \times 9)$	0.00290	0.51301

### Висновки.

1. Розв'язано контактну задачу про втискування кругового жорсткого штампя на невісьовою силою у пружний півнескінченний шар.
2. Побудовано наближені формули для визначення осадки штампя та момента сили, що забезпечує поступальний рух штампя. Проблему зведено до сингулярного інтегрального рівняння відносно невідомого контактного напруження, що розв'язано методом ортогональних многочленів і зведено до нескінченної двовимірної системи алгебраїчних рівнянь, яку розв'язано методом редукції.



1. **Boussinesq J.** Application des potentiels à l'étude l'équilibre et du mouvement des solides élastiques / J. Boussinesq – Paris: Gauthiers. – Villars. – 1885. – 721 p.
2. **Hertz H.** Über die Berührung fester elastischer Körper / H. Hertz // *Jornal für die reine und angewandte Mathematik.* – 1882. – 92. – S. 156–171.
3. **Лебедев Н. Н.** Осесимметричная контактная задача для упругого слоя / Н. Н. Лебедев, Я. С. Уфлянд // *Прикл. математика и механика.* – 1958. – 22, № 3. – С. 320–326.
4. **Ворович И. И.** О давлении штампа на слой конечной толщины / И. И. Ворович, Ю. А. Устинов // *Прикл. математика и механика.* – 1959. – 22, вып. 3. – С. 445–454.
5. **Александров В. М.** О действии штампа на упругий слой конечной толщины / В. М. Александров, И. И. Ворович // *Прикл. математика и механика.* – 1960. – 24, вып. 2. – С. 323–330.
6. **Егоров К. Е.** Контактная задача для упругого слоя при действии внецентренной вертикальной силы на круглый жесткий штамп / К. Е. Егоров // *Докл. АН СССР.* – 1960. – 133, № 4. – С. 781–784.
7. **Уфлянд Я. С.** Кручение упругого слоя / Я. С. Уфлянд // *Докл. АН СССР.* – 1959. – Т. 129, №5. – С. 997.
8. **Гриліцький Д. В.** Кручення двошарового пружного середовища / Д. В. Гриліцький // *Прикл. механіка.* – 1961. Т. 7, № 1. – С. 89.
9. **Low R.** On a doubly mixed boundary value problem for an elastic layer / R. Low // *Quart. Appl. Math.* – 1964. – Vol.22, № 2. – P. 153–160.
10. **Srivastava K.** Axisymmetric problem of an infinite elastic plane in contact with two punches / K. Srivastava, V. Saxena // *Ind. J. Pure and Appl. Math.* – 1972.– Vol.3, № 6. – P. 1278–1285.
11. **Попов Г. Я.** Контактная задача теории упругости при наличии круговой области контакта / Г. Я. Попов // *Прикл. математика и механика.* – 1962. – Т.26, Вып.1. – С.152–164.
12. **Босаков С. В.** Об одном подходе в контактной задаче для круглого штампа на упругом основании / С. В. Босаков // *Прикл. механика* – 2008. – Т.44, № 4. – С. 65–71.
13. **Попов Г. Я.** Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений / Г. Я. Попов – Москва: Наука,1982. – 344 с.
14. **Попов Г. Я.** Основы теории двумерных бесконечных систем / Г. Я. Попов // *Мат. методы и физ.-мех. поля.* – 2010. – Т.53, №2.– С.17–27.
15. **Fesenko A. A.** Mixed problems of stationary heat conduction and elasticity theory for a semiinfinite layer / A. A. Fesenko // *Mat. Met. Fiz.-Mekh. Polya.* – 2014. – Vol. 56; №3. – P. 182–191.

Фесенко А. А.

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО СЛОЯ

*Резюме*

В работе рассмотрена контактная задача о вдавливании с эксцентриситетом кругового штампа в полубесконечный упругий слой, опирающийся на абсолютно жесткое основание без трения. На боковой и нижней гранях полуслоя заданы условия гладкого контакта. При решении использовано вертикальное перемещение точек слоя под действием сосредоточенной на верхней границе слоя силы. Получено сингулярное интегральное уравнение относительно неизвестного контактного напряжения. Решение уравнения разыскивается в виде разложения по системе косинусов в силу четности контактного напряжения относительно полярного угла. В дальнейшем проведена ортогонализация по системе косинусов, что приводит к системе парных интегральных уравнений. Сингулярное интегральное уравнение решено методом ортогональных многочленов и сведено к бесконечной двумерной системе алгебраических уравнений, которая решена методом редукции. Получены осадка штампа и момент силы, который обеспечивает поступательное движение штампа, из условий равновесия.

*Ключевые слова:* контактная задача, круговой штамп, полубесконечный слой, сингулярное интегральное уравнение, метод редукции.

Fesenko A. A.

THE CONTACT PROBLEM FOR AN ELASTIC SEMI-INFINITE LAYER

*Summary*

It is solved the contact problem on the action of a circular stamp with an extra-central power on the elastic semi-infinite layer. On the lateral and lower side of the layer the conditions of the smooth contact are given. The solution of the elastic problem for the semi-infinite layer when concentrated force was situated on the upper side of the layer was used. This problem was solved by the new method which is based on the reduction of Lamé's equations system to two together and one independent solved equations relatively to the new unknown functions associated with the displacements. Using of the integral transformations reduces the problem to a one-dimensional vector boundary value problem that to be solved exactly by the apparatus of the matrix differential calculus. The singular integral equation with respect to unknown contact pressure was obtained. The problem was reduced to the singular integral equation which was solved by the method of the orthogonal polynomials and was reduced to the infinite two-dimensional system of algebraic equations. These equations were solved by the reduction method. As a result the eccentricity and precipitation of the stamp that provide its forward movement were determined.

*Key words:* contact problem, circular stamp, semi-infinite layer, singular integral equation, reduction method.

## REFERENCES

1. Boussinesq, J. (1885). *Application des potentiels à l'étude l'équilibre et du mouvement des solides élastiques*. Paris: Gauthiers. Villars.
2. Hertz, H. (1882). Über die Berührung fester elastischer Körper. *Jornal für die reine und angewandte Mathematik*. 92. pp. 156–171.
3. Lebedev, N. N. & Uflyand, Ya. S. (1958). *Osesimmetrichnaya contactnaya zadacha dlya uprugogo sloya. Prikladnaya matematika i mekhanika*. 22 (3). pp. 320–326.

4. Vorovich, I. I. & Ustinov, U. A. (1959). O davlenii shtampa na sloi konechnoi tolshini. *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 22 (3). pp. 445–454.
5. Aleksandrov, V. M. & Vorovich, I. I. (1960). O deystvii shtampa na uprugiy sloi konechnoi tolshini. *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 24 (1). pp. 323–330.
6. Egorov, K. E. (1960). Contactnaya zadacha dlya uprugogo sloya pri deistvii vnezentrenoi verticalnoi sili na kruglii jestkii shnamp. *Dokladi AN SSSR*. 133 (4). pp. 781–784.
7. Florence, A. L. (1961). Two contact problems for an elastic layer. *Quart. Journ. Mech. and Appl. Math.* 14 (4). P. 456.
8. Uflyand, Ya. S. (1959). Krucheniye uprugogo sloya. *Dokladi AN SSSR*. 129 (5). P. 997.
9. Grilizkiy, D. V. (1961). Krucheniya dvosharovogo prujnogo seredovisha. *Prikladnaya mekhanika*. 7 (1). P. 89.
10. Low, R. (1964). On a doubly mixed boundary value problem for an elastic layer. *Quart. Appl. Math.* 22 (2). pp. 153–160.
11. . Srivastava, K. & Saxena, V. (1972). Axisymmetric problem of an infinite elastic plane in contact with two punches. *Ind. J. Pure and Appl. Math.* 3 (6). pp. 1278–1285.
12. Popov, G. Ya. (1962). Contactnaya zadacha teorii uprugosti pri nalichii krugovoi oblasni contacta. *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 26 (1). pp. 152–164.
13. Bosakov, S. V. (2008). Ob odnom podhode v contactnoi zadache dlya kruglogo shtampa na uprugom osnovanii. *Prikladnaya mekhanika*. 44 (4). pp. 65–71.
14. Popov, G. Ya. (1982). *Konzentratsiya uprugih napryazhenii vozle shtampov, razrezov, tonkih vklyuchenii i podkrepleni*. Moskva: Nauka.
15. Popov, G. Ya. (2010). Osnovi teorii dvumernih beskonechnih system. *Matematychni Metody ta Fizyko–Mekhanichni Poly*. 53 (2). pp. 17–27.
16. Fesenko, A. A. (2014). Mixed problems of stationary heat conduction and elasticity theory for a semiinfinite layer. *Matematychni Metody ta Fizyko–Mekhanichni Poly*. 56 (3). pp. 182–191.