

АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ТЕОДОЛИТНЫХ ХОДОВ ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ЛИНЕЙНО-УГЛОВЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

М. Брынь, Н. Богомолова, В. Иванов

Петербургский государственный университет путей сообщения, г. Санкт-Петербург

Ю. Щербак

Черниговский государственный институт экономики и управления

Ключевые слова: теодолитный ход, априорная оценка точности, средняя квадратическая ошибка.

Топографические и кадастровые съемки выполняют, как правило, с точек теодолитных ходов. При этом часто возникают ситуации, когда плотность исходных геодезических пунктов недостаточна для того, чтобы прокладывать ходы необходимой точности с соблюдением требуемых нормативными документами [2, 3] длин ходов. Выход, как правило, находят в сгущении сети исходных пунктов или создании системы теодолитных ходов.

Одним из решений отмеченной проблемы может быть выполнение дополнительных линейно-угловых измерений на точках хода. Рассмотрим, как повлияет выполнение таких измерений на точность определения положения точек хода, если дополнительные измерения выполнять по схемам “через точку” и “на каждой точке”.

Априорная оценка точности положения точки теодолитного хода при выполнении дополнительных линейно-угловых измерений по схеме “через одну точку”

При априорной оценке точности, как правило, исходят из того, что ход является вытянутым, имеет при этом примерно равные стороны и опирается на исходные пункты и исходные дирекционные углы. Определяющим параметром, значение которого необходимо обеспечить в результате априорной оценки точности, является средняя квадратическая ошибка m_P положения точки хода в слабом месте хода после уравнивания. Принято считать, что $2m_P = m_w$, где m_w – ошибка положения конечной точки хода. Ее вычисляют по формуле [1, 5]

$$m_w^2 = m_Q^2 + m_L^2 \tag{1}$$

где $m_Q = \frac{m_\beta}{\rho} L \sqrt{\frac{n+3}{12}}$ – средняя квадратическая поперечная ошибка хода, определяемая при условии предварительного распределения угловой невязки; $m_L = m_d \sqrt{n}$ – средняя квадратическая продольная ошибка хода. Здесь m_d – средняя квадратическая

ошибка измерения длин сторон; n – число сторон в ходе, m_β – средняя квадратическая ошибка измерения углов; L – длина хода.

Из формулы (1) можно найти L [4]

$$L = \frac{\rho}{m_\beta} \sqrt{\frac{12(4m_P^2 - nm_d^2)}{(n+3)}} \tag{2}$$

Пусть в ходе измерены дополнительные углы β'_i через точку хода ($i = 1, 3, \dots$), образованные направлениями на следующие за смежными точками хода вершины (рис. 1). При этом полагаем, что в основном ходе число углов – нечетное, и тем самым обеспечивается измерение дополнительного угла на последней точке хода.

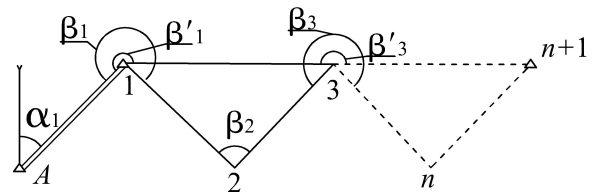


Рис. 1. Равносторонний вытянутый теодолитный ход с дополнительными измерениями углов “через одну точку”

Измеренные таким образом углы порождают условие равенности дирекционных углов

$$\left(\alpha_1 + \sum_1^{n+1} \beta_i \pm 180^\circ \right) - \left(\alpha_1 + \sum_1^{n+1} \beta'_{2i-1} \pm 180^\circ \right) = 0.$$

Примем за ошибку единицы веса среднюю квадратическую ошибку измерения угла, т.е. $\mu = m_\beta$. Тогда обратные веса q измеренных углов будут равны единице, $q = \frac{m_\beta^2}{\mu^2} = 1$ и матрица Q результатов измерений будет единичной.

Найдем обратную весовую матрицу $Q_{(\beta, \beta')}$ уравненных величин (β, β') по формуле $Q_{(\beta, \beta')} = E - QA^T (AQA^T)^{-1} A$ [6], преобразованную с учетом того, что $Q = E$.

$$Q_{(\beta, \beta')} = E - A^T (AA^T)^{-1} A,$$

где A – матрица-строка коэффициентов условных уравнений поправок, структура которой такая: $A = [1 \ 1 \ \dots \ -1 \ -1 \ \dots]$. Число столбцов в этой матрице равно количеству измеренных углов. После нахождения обратной весовой матрицы $Q_{(\beta, \beta')}$ уравненных величин размерностью $1,5n + 2 \times 1,5n + 2$ получим уравненное значение угловых измерений

$$m_{\beta'} = m_{\beta} \sqrt{\frac{(1,5n+1)}{(1,5n+2)}}. \quad (3)$$

Очевидно, что повышение точности поперечного сдвига происходит в $\sqrt{\frac{(1,5n+2)}{(1,5n+1)}}$ раз.

Пусть в равностороннем вытянутом теодолитном ходе через одну точку измерены стороны, образованные тремя смежными точками (рис. 2). Рассмотрим первые три точки.

Предположим, что они расположены на одной прямой, тогда возникает условие сторон $d_1 + d_2 - d_{1-3} = 0$.

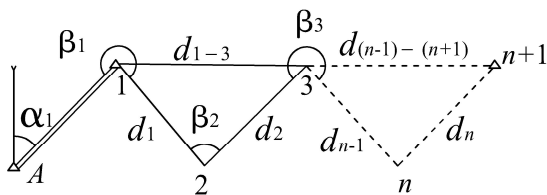


Рис. 2. Равносторонний вытянутый теодолитный ход с дополнительными измерениями сторон

Примем за ошибку единицы веса среднюю квадратичную ошибку измерения расстояния, т.е. $\mu = m_d$. Тогда обратные веса измеренных сторон равны единице, $q = \frac{m_d^2}{\mu^2} = 1$. Матрица обратных весов Q

будет единичной размерностью 3×3 .

Матрица коэффициентов условных уравнений поправок A будет $A = [1 \ 1 \ -1]$.

Умножив матрицу коэффициентов условных уравнений поправок A на свою транспонированную A^T , получим матрицу, обратная к которой $(AA^T)^{-1}$ равна $\frac{1}{3}$. Найдем произведение $A^T (AA^T)^{-1} A = \frac{1}{3}$ и разность $E - A^T (AA^T)^{-1} A = \frac{2}{3}$.

Таким образом, средняя квадратическая ошибка измерения расстояния после уравнивания составит

$$m_{d'} = \sqrt{\frac{2}{3}} m_d. \quad (4)$$

Видно, что точность продольного сдвига повысится в $\sqrt{\frac{3}{2}}$ раз.

Подставим уравненные значения углов и длин линий из формул (3) и (4) в формулы (1) и (2), в результате получим

$$m_w = 2m_p = \sqrt{\frac{m_{\beta}^2}{\rho^2} L^2 \frac{1,5n+1}{1,5n+2} \frac{n+3}{12} + m_d^2 \frac{2}{3} n};$$

$$L = \frac{\rho}{m_p} \sqrt{\frac{1,5n+2}{1,5n+1}} \sqrt{\frac{12(4m_p^2 - \frac{2}{3}nm_d^2)}{(n+3)}}. \quad (5)$$

Априорная оценка точности положения точки теодолитного хода при выполнении дополнительных линейно-угловых измерений на каждой точке хода

Предположим, что угловые измерения выполнены на каждой точке хода (рис. 3) таким образом, что образуют “цепочку треугольников”.

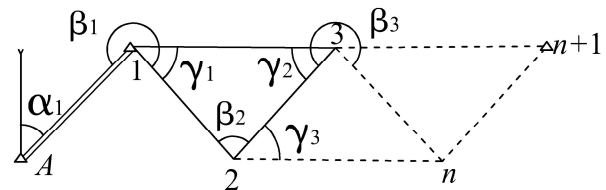


Рис. 3. Вытянутый равносторонний теодолитный ход с дополнительными измерениями углов на каждой вершине

В этом случае средняя квадратическая ошибка измерения каждого угла на точке хода после уравнивания за условием фигур будет

$$m'_{\beta_i} = m'_{\gamma_i} = \sqrt{\frac{2}{3}} m_{\beta}. \quad (6)$$

Очевидно, что поперечный сдвиг в этом случае уменьшится в $\sqrt{\frac{3}{2}}$ раз.

Если дополнительно выполнены измерения сторон через точку хода, то это приведет к возникновению $n - 1$ условий сторон. Матрица A коэффициентов условных уравнений будет иметь $n - 1$ строк и $2n - 1$ столбцов. Как показали исследования, средние квадратические ошибки m'_d линейных измерений для длин, участвующих в измерениях дважды (все длины, относящиеся к ходовой линии, кроме первой и последней), после уравнивания будут примерно равны

$$m'_d = 0,7 m_d. \quad (7)$$

Продольный сдвиг уменьшится примерно в $\frac{1}{0,7} = 1,4$ раза.

Подставим уравненные значения углов и длин линий, вычисляемые по формулам (6) и (7), в формулы (1) и (2). В результате получим

$$m_w = 2m_p = \sqrt{\frac{m_\beta^2}{\rho^2} L^2 \frac{n+3}{18} + 0,5nm_d^2};$$

$$L = \frac{\rho}{m_\beta} \sqrt{\frac{18(4m_p^2 - 0,5nm_d^2)}{(n+3)}}. \quad (8)$$

Зная m_p и задав m_β и m_d , по формулам (2), (5) и (8) можно вычислять допустимые длины ходов L при разном числе сторон n или допустимое число сторон в ходах разной длины. Например, при использовании для проложения теодолитных ходов электронных тахеометров с точностью измерений длин линий $m_d = 5$ мм и углов $m_\beta = 7''$ для обеспечения определения средних квадратических ошибок положения точек хода $m_p = 0,05$ м (в числителе) и $m_p = 0,10$ м (в знаменателе) возможные длины ходов и количество сторон в них представлены в таблице.

Длины ходов при разном числе сторон

n	5	10	15	20
L , км по (2)	3,6/7,2	2,8/5,6	2,4/4,8	2,1/4,2
L , км по (5)	3,8/7,6	2,9/5,8	2,4/4,9	2,1/4,3
L , км по (8)	4,4/8,8	3,4/6,9	2,9/5,9	2,6/5,2

Проведенные исследования показывают, что прибегать к выполнению дополнительных линейно-угловых измерений в теодолитных ходах следует в исключительных случаях, и то при небольшом числе сторон (до пяти), ибо существенного повышения длин ходов не удается добиться.

Литература

1. Геодезия. Топографические съемки: справ. пособ. / Ю.К. Неумывакин., Е.И. Халугин, П.Н. Кузнецов, А. В. Бойко. – М.: Недра, 1991. – 317 с.
2. Інструкція з топографічного знімання у масштабах 1:5000, 1:2000, 1:1000 та 1:500 : ГКНТА – 2.04-02-98: Офіц. вид. – К.: Укргеоінформ; Гол. упр. геодез., картогр. та кадастру, 1999. – 155 с.
3. Инструкция по топографической съемке в масштабах 1:5000, 1:2000, 1:1000, 1:500. – М.: Недра, 1985. – 160 с.
4. О параметрах теодолитных ходов, прокладываемых для выполнения кадастровой съемки / М. Брын, П. Веселкин, В. Иванов [та ін.] // Сучасні

досягнення геодезичної науки та виробництва. – 2007. – № 13. – С. 326–329.

5. Островский А.Л. Геодезия. Часть II: учебник / А.Л. Островский, О.И. Мороз, В. Л. Тарнавский. – Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2007. – 508 с.

6. Машимов М.М. Методы математической обработки астрономо-геодезических измерений: учебник / М.М. Машимов – М.: ВИА, 1990. – 510 с.

Априорна оцінка точності теодолітних ходів під час виконання додаткових лінійно-кутових вимірювань

М. Брын, Н. Богомолова, В. Иванов, Ю. Щербак

Отримані формули обчислення середньої квадратичної похибки положення кінцевої точки ходу і довжини ходу під час вимірювання додаткових кутів через точку ходу, утворених напрямками на наступні за суміжними точками ходу вершини, і відповідних довжин сторін, а також якщо лінійно-кутові вимірювання виконані на кожній точці ходу так, що утворюють “ланцюжок трикутників”.

Априорная оценка точности теодолитных ходов при выполнении дополнительных линейно-угловых измерений

М. Брын, Н. Богомолова, В. Иванов, Ю. Щербак

Получены формулы вычисления средней квадратической ошибки положения конечной точки хода и длины хода при измерении дополнительных углов через точку хода, образованных направлениями на следующие за смежными точками хода вершины, и соответствующих длин сторон, а также когда линейно-угловые измерения выполнены на каждой точке хода таким образом, что образуют “цепочку треугольников”.

The a priori estimation of precision theodolite lines when you run additional linear and angular measurements

M. Bryn, N. Bogomolova, V. Ivanov, Yu. Shcherbak

Obtained a formula for calculating the mean square error of the provisions of the endpoint of stroke and stroke length when measured more angles through the point of turn, formed the directions on the following adjacent points progress vertex and the respective lengths of the parties, as well as when linearly-angular measurements are made at each point in the progress so as to form a “chain of triangles”.