

УДК 528.9

ВИКОРИСТАННЯ ТОРОЇДАЛЬНИХ ПОВЕРХОНЬ ПІД ЧАС РОЗРОБЛЕННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ОСНОВ ГЕОГРАФІЧНИХ КАРТ УКРАЇНИ

П. Король, В. Волошин

Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки

Ключові слова: апсидальні поверхні обертання, еліпсоїд обертання, еліптичний параболоїд, двопорожнинний гіперболоїд, тор, тороїдальна поверхня, орто-апсидальні проекції, видозмінена ізометрична ортографічна проекція Райса–Armadillo.

Постановка проблеми

Загалом, для математичної картографії ідея використання поверхонь обертання як проміжних під час переходу від поверхні сфери до площини карти не нова.

У 1943 р. відомий угорський картограф і географ, куратор колекції карт Гарвардського університету Ервін Джозефуш Райс (1893–1968) запропонував серію картографічних проекцій, побудова яких передбачає використання проміжних криволінійних поверхонь [3]. Для означення таких проекцій автор використав дефініцію “ортоапсидальні” (з грец. *орто* – прямий + *апсίδα* – склепіння), що визначає геометричний принцип їх побудови: сферична поверхня топологічно перетворюється на деяку іншу апсидальну поверхню обертання, яка, своєю чергою, ортогонально відображається на площині карти. До апсидальних поверхонь обертання, на які проектується сфера, крім традиційно прийнятих у математичній картографії колових циліндричної та конічної, зараховують еліпсоїд обертання, еліптичний параболоїд, двопорожнинний гіперболоїд, тор тощо. У роботі [3] Райс запропонував різноманітні варіанти використання апсидальних поверхонь обертання під час розроблення математичних основ географічних карт світу, зокрема поверхні еліпсоїда обертання з різними значеннями кута нахилу та ексцентриситету, а також поверхні гіперболоїда і тора, що у разі відображення на площину створюють ілюзію об’ємності зображення і забезпечують ефект сферичності Землі.

Зв’язок із важливими науковими і практичними завданнями

Науковці Східноєвропейського національного університету імені Лесі Українки виконують системні прикладні дослідження модифікацій наявних картографічних проекцій, які відповідають вимогам створення, укладання та видання географічних карт України.

Метою цього дослідження є обґрунтування можливостей використання модифікованих варіантів видозміненої ізометричної ортоапсидальної проекції Райса під час укладання різномасштабних географічних карт України.

Аналіз останніх досліджень та публікацій, що стосуються вирішення цієї проблеми

Історичні аспекти розроблення ортоапсидальних картографічних проекцій висвітлено у монографії

Дж. П. Снайдера [6], а їх математичне обґрунтування у сферичному варіанті виконано у роботі Е. Райса [3]. Можливості використання апсидальних поверхонь обертання, зокрема тора, під час розроблення математичних основ карт світу викладено в підручниках Е. Райса [2, 4].

Математичне обґрунтування видозміненої ізометричної ортографічної проекції Райса на половині тора Armadillo, практичні аспекти побудови її картографічної сітки, особливості побудови системи координат, характеристики розподілу спотворень у ній та макети картографічних сіток наведено у книзі Дж. П. Снайдера і Ф. М. Воксланда [5], а її повне аналітичне дослідження – у монографії Е. В. Графенда і Ф. В. Крумма [1]. Можливості використання модифікованих варіантів цієї проекції під час розроблення математичних основ географічних карт України у вітчизняній і зарубіжній картографічній літературі не розглядалися.

Виклад основного матеріалу

Найвідомішою ортоапсидальною картографічною проекцією є видозмінена ізометрична ортографічна проекція Райса на половині тора, що називається Armadillo (з порт. *armadillo* – броненосець), оскільки зовнішній вигляд її картографічної сітки віддалено нагадує панцир цього хордового ссавця.

Тором називається поверхня обертання, яка утворюється шляхом обертання твірного кола навколо осі, що лежить у площині цього кола, але не проходить через його центр. Вісь обертання тора може перетинати коло, дотикатись до нього або розміщуватись за його межами. У перших двох випадках тор називається закритим, в останньому – відкритим, або кільцем. У відкритому торі кільцеподібна поверхня обертання називається *тороїдальною*.

Паралелі та меридіани на зовнішній поверхні тора є рівновіддаленими коловими дугами, що під час проектування на площину карти перетворюються на нерівновіддалені еліптичні дуги.

Проекція Райса Armadillo з нульовим нахилом тора зовні нагадує псевдоциліндричні проекції німецького географа і картографа Фрідріха Едуарда Макса Еккерта–Грайфендорфа Eckert III і Eckert IV, однак за своєю суттю не є такою.

В оригінальному варіанті проекції використовується косий тор з нахилом $\beta = 20^\circ$, що забезпечує максимальну диспропорцію у співвідношенні площ суходолу й океанічної поверхні в разі їх відображення на площині карти, а також прямолінійний центральний меридіан $\lambda_0 = 10^\circ$ сх. д., що є віссю симетрії (рис. 1). У такому випадку Північний полюс відображається

половиною еліпса, Австралія відображається частково, а Південний полюс, як і території Антарктиди і Нової Зеландії, у проекції взагалі не відображаються. Для їх відображення використовуються спеціальні карти-врізки. При цьому проекція штучно розширює західну та східну півкулі, охоплюючи за широтою близько 410° , що дає змогу об'єктивно розділити Аляску та Сибір.



Рис. 1. Видозмінена ізометрична ортографічна проекція Райса на половині тора – Armadillo (нахил тора $\beta = 20^\circ$, центральний меридіан $\lambda_0 = 0^\circ$)

Широта південної паралелі φ_s , що обмежує видиму частину зображення зовнішньої поверхні нахиленого тора, визначається як:

$$\varphi_s = -\arctg \left[\cos \left(\frac{(\lambda - \lambda_0)}{2} \right) / \operatorname{tg} \beta \right], \quad (1)$$

де β – кут нахилу тора.

Якщо $\varphi \geq \varphi_s$, то коса довільна ортоапсидальна проекція Райса на половині тора у прямокутних координатах описується системою рівнянь виду:

$$\begin{aligned} x &= R \left[(1 + \cos \varphi) \sin \left(\frac{(\lambda - \lambda_0)}{2} \right) \right] \\ y &= R \left[(1 + \sin \beta - \cos \beta) / 2 + \cos \beta \sin \varphi - \right. \\ &\quad \left. - \sin \beta (1 + \cos \varphi) \cos \left(\frac{(\lambda - \lambda_0)}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (2)$$

Вісь y збігається з центральним меридіаном і напрямлена на північ, а вісь x перетинає центральний меридіан у точці з широтою $28^\circ 06'$ пн. ш. і напрямлена на схід.

Частинні похідні $\frac{\partial x}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial y}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial x}{\partial \lambda}$, $\frac{\partial y}{\partial \lambda}$ визначаються як:

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = -R \sin \varphi \sin \left(\frac{(\lambda - \lambda_0)}{2} \right), \quad (3)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{1}{2} R \left[(1 + \cos \varphi) \cos \left(\frac{(\lambda - \lambda_0)}{2} \right) \right], \quad (4)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = R \left[\cos \varphi \sin \beta + \sin \varphi \cos \beta \cos \left(\frac{(\lambda - \lambda_0)}{2} \right) \right], \quad (5)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda} = \frac{1}{2} R \left[(1 + \cos \varphi) \cos \beta \sin \left(\frac{(\lambda - \lambda_0)}{2} \right) \right]. \quad (6)$$

За частинними похідними обчислено коефіцієнти першої квадратичної форми Гаусса E, F, G , проведено повне аналітичне дослідження проекції та визначено параметри її спотворень m, n, p, a, b, ω .

Зауважимо, що косі варіанти цієї проекції надзвичайно зручні для відображення відношення “країна у світі”. Кут нахилу зображення визначається за середньою широтою відповідної території. Для території України доцільно використовувати косий тор з нахилом $\beta = 48^\circ$ і прямолінійним центральним меридіаном $\lambda_0 = 31^\circ$ сх. д. (рис. 2, 3).



Рис. 2. Модифікована ізометрична ортографічна проекція на половині тора (адаптований варіант: нахил тора $\beta = 48^\circ$, центральний меридіан $\lambda_0 = 31^\circ$ сх. д.)

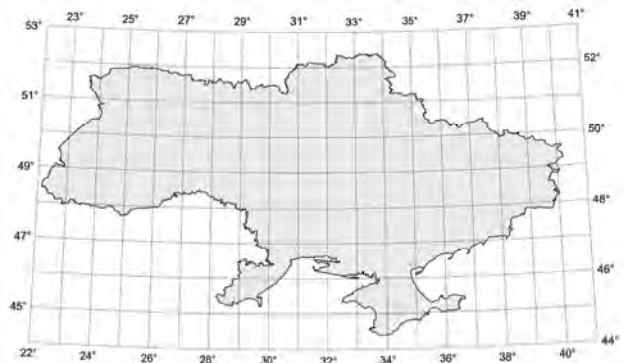


Рис. 3. Картографічна сітка модифікованої ізометричної ортографічної проекції на половині тора (адаптований варіант: нахил тора $\beta = 48^\circ$, центральний меридіан $\lambda_0 = 31^\circ$ сх. д.) (нахил тора $\beta = 20^\circ$, центральний меридіан $\lambda_0 = 0^\circ$)

Результати аналітичних досліджень засвідчують мінімальні спотворення в ортогональності зображення ліній картографічної сітки модифікованої проекції (табл. 1), що дозволяє вважати її квазіконформною.

З іншого боку, стабільність значень часткових масштабів довжин вздовж меридіанів m по всьому полю карти (табл. 2) забезпечує квазіеквідистантність зображення, що дає змогу використовувати модифікований варіант проекції під час розроблення математичних основ географічних карт України.

Значення часткових масштабів довжин вздовж паралелей n (табл. 3) фактично збігаються зі значеннями часткових масштабів площ p , що зумовлено мінімальними параметрами спотворень кутів і довжин вздовж меридіанів.

Таблиця 1

Значення максимальних спотворень кутів ε у вузлах картографічної сітки модифікованої ізометричної ортографічної проекції

| Паралелі картографічної сітки | Меридіани картографічної сітки | | | | | | | | | |
|-------------------------------|--------------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | 23° | 25° | 27° | 29° | 31° | 33° | 35° | 37° | 39° | 41° |
| 53° | 34'25" | 25'54" | 17'18" | 08'40" | 00'00" | 08'40" | 17'18" | 25'54" | 34'25" | 42'50" |
| 52° | 31'12" | 23'29" | 15'42" | 07'51" | 00'00" | 07'51" | 15'42" | 23'29" | 31'12" | 38'49" |
| 51° | 28'00" | 21'05" | 14'06" | 07'03" | 00'00" | 07'03" | 14'06" | 21'05" | 28'00" | 34'50" |
| 50° | 24'49" | 18'42" | 12'30" | 06'16" | 00'00" | 06'16" | 12'30" | 18'42" | 24'49" | 30'52" |
| 49° | 21'40" | 16'19" | 10'55" | 05'28" | 00'00" | 05'28" | 10'55" | 16'19" | 21'40" | 26'55" |
| 48° | 18'31" | 13'58" | 09'21" | 04'41" | 00'00" | 04'41" | 09'21" | 13'58" | 18'31" | 22'59" |
| 47° | 15'22" | 11'36" | 07'46" | 03'54" | 00'00" | 03'54" | 07'46" | 11'36" | 15'22" | 19'03" |
| 46° | 12'15" | 09'15" | 06'12" | 03'07" | 00'00" | 03'07" | 06'12" | 09'15" | 12'15" | 15'09" |
| 45° | 09'07" | 06'55" | 04'39" | 02'20" | 00'00" | 02'20" | 04'39" | 06'55" | 09'07" | 11'15" |
| 44° | 06'00" | 04'35" | 03'05" | 01'33" | 00'00" | 01'33" | 03'05" | 04'35" | 06'00" | 07'11" |

Таблиця 2

Значення часткових масштабів довжин m у вузлах картографічної сітки модифікованої ізометричної ортографічної проекції

| Паралелі картографічної сітки | Меридіани картографічної сітки | | | | | | | | | |
|-------------------------------|--------------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | 23° | 25° | 27° | 29° | 31° | 33° | 35° | 37° | 39° | 41° |
| 53° | 0,9819 | 0,9818 | 0,9817 | 0,9816 | 0,9816 | 0,9816 | 0,9817 | 0,9818 | 0,9819 | 0,9821 |
| 52° | 0,9851 | 0,9849 | 0,9849 | 0,9848 | 0,9848 | 0,9848 | 0,9849 | 0,9849 | 0,9851 | 0,9852 |
| 51° | 0,9879 | 0,9878 | 0,9877 | 0,9877 | 0,9877 | 0,9877 | 0,9877 | 0,9878 | 0,9879 | 0,9880 |
| 50° | 0,9905 | 0,9904 | 0,9903 | 0,9903 | 0,9903 | 0,9903 | 0,9903 | 0,9904 | 0,9905 | 0,9906 |
| 49° | 0,9927 | 0,9926 | 0,9926 | 0,9926 | 0,9925 | 0,9926 | 0,9926 | 0,9926 | 0,9927 | 0,9928 |
| 48° | 0,9947 | 0,9946 | 0,9946 | 0,9945 | 0,9945 | 0,9945 | 0,9946 | 0,9946 | 0,9947 | 0,9947 |
| 47° | 0,9963 | 0,9963 | 0,9962 | 0,9962 | 0,9962 | 0,9962 | 0,9962 | 0,9963 | 0,9963 | 0,9964 |
| 46° | 0,9977 | 0,9976 | 0,9976 | 0,9976 | 0,9976 | 0,9976 | 0,9976 | 0,9976 | 0,9977 | 0,9977 |
| 45° | 0,9987 | 0,9987 | 0,9986 | 0,9986 | 0,9986 | 0,9986 | 0,9986 | 0,9987 | 0,9987 | 0,9987 |
| 44° | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9995 |

Таблиця 3

Значення часткових масштабів довжин n у вузлах картографічної сітки модифікованої ізометричної ортографічної проекції

| Паралелі картографічної сітки | Меридіани картографічної сітки | | | | | | | | | |
|-------------------------------|--------------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | 23° | 25° | 27° | 29° | 31° | 33° | 35° | 37° | 39° | 41° |
| 53° | 1,3290 | 1,3298 | 1,3304 | 1,3307 | 1,3308 | 1,3307 | 1,3304 | 1,3298 | 1,3290 | 1,3280 |
| 52° | 1,3104 | 1,3111 | 1,3117 | 1,3120 | 1,3121 | 1,3120 | 1,3117 | 1,3111 | 1,3104 | 1,3094 |
| 51° | 1,2928 | 1,2935 | 1,2941 | 1,2944 | 1,2945 | 1,2944 | 1,2941 | 1,2935 | 1,2928 | 1,2918 |
| 50° | 1,2761 | 1,2769 | 1,2774 | 1,2778 | 1,2779 | 1,2778 | 1,2774 | 1,2769 | 1,2761 | 1,2752 |
| 49° | 1,2604 | 1,2612 | 1,2617 | 1,2620 | 1,2621 | 1,2620 | 1,2617 | 1,2612 | 1,2604 | 1,2595 |
| 48° | 1,2456 | 1,2463 | 1,2468 | 1,2471 | 1,2472 | 1,2471 | 1,2468 | 1,2463 | 1,2456 | 1,2446 |
| 47° | 1,2315 | 1,2322 | 1,2327 | 1,2330 | 1,2331 | 1,2330 | 1,2327 | 1,2322 | 1,2315 | 1,2306 |
| 46° | 1,2181 | 1,2189 | 1,2194 | 1,2197 | 1,2198 | 1,2197 | 1,2194 | 1,2189 | 1,2181 | 1,2172 |
| 45° | 1,2055 | 1,2062 | 1,2067 | 1,2070 | 1,2071 | 1,2070 | 1,2067 | 1,2062 | 1,2055 | 1,2046 |
| 44° | 1,1935 | 1,1942 | 1,1947 | 1,1950 | 1,1951 | 1,1950 | 1,1947 | 1,1942 | 1,1935 | 1,1926 |

Висновки

У результаті проведених досліджень математично обґрунтовано доцільність застосування видозміненої ортометричної довільної ортоапсидальної проекції Armadillo на нахиленому й розвернутому торі як математичної основи для укладання дрібномасштабних географічних карт України.

Перспективним напрямом подальших досліджень у цій галузі є вивчення можливостей використання мінімальних поверхонь обертання або поверхонь з нульовою середньою кривиною, зокрема поверхонь катеноїда і гелікоїда, як фрагментарної ізометричної деформації катеноїда, для розроблення математичних основ географічних карт.

Література

1. Grafarend E. W. Map projections: cartographic information systems / E. W. Grafarend, F. W. Krumm. – Berlin: Springer, 2006. – P. 92–95.
2. Raisz E. J. General cartography / E. J. Raisz. – New York, Toronto and London: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1948. – 354 p.
3. Raisz E. J. Orthoapsidal world maps // E. J. Raisz // Geographical Review. – 1943. – Vol. 33, No.1. – P. 132–134. – [Armadillo and other orthographic projections of a sphere with intermediate projection onto another solid].
4. Raisz E. J. Principle of Geography / E. J. Raisz. – New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1962. – P. 181.
5. Snyder J. P. An album of map projections: Prof. Paper 1453, U.S. Geol. Survey / J. P. Snyder, Ph. M. Voxland. – Washington: U.S. Government Printing Office, 1989. – P. 206–207, 238.
6. Snyder J. P. Flattening the earth: two thousand years of map projections / J. P. Snyder. – Chicago and London: University of Chicago Press, 1997. – P. 267–268.

Використання тороїдальних поверхонь під час розроблення математичних основ географічних карт України

П. Король, В. Волошин

Доведено можливість та доцільність використання апсидальних поверхонь обертання як проміжних під час переходу від сферичної поверхні до площини карти. Виконано повне аналітичне дослідження видозміненої ізометричної ортографічної проекції на половині нахиленого і розвернутого тора, а також побудовано макети картографічних сіток проекції для карт світу й для України.

Использование тороидальных поверхностей при разработке математических основ географических карт Украины

П. Король, В. Волошин

Доказано возможность и целесообразность использования апсидальных поверхностей вращения как промежуточных при переходе от сферической поверхности к плоскости карты. Выполнено полное аналитическое исследование видоизмененной изометрической ортографической проекции на половине наклонного и развернутого тора, а также построено макеты картографических сеток проекции для карт мира и Украины.

Using the toroidal surfaces for development of mathematical bases of geographical maps of Ukraine

P. Korol, V. Voloshin

The possibility and feasibility of using apsidal surfaces of revolution as an intermediate in the transition from spherical surface to the plane of the map is proved. The complete analytical study of a modified isometric orthographic projection at half of tilted and deployed torus is performed, and the models of grids of map projection for maps of the world and Ukraine are constructed.

HAMBURG 2016 **INTERGEO**[®]
GLOBAL HUB OF THE GEOSPATIAL COMMUNITY

550 EXHIBITORS
MORE THAN 30,000 m² EXHIBITION SPACE
16,500 TOP CONTACTS WITH AROUND NATIONAL AND INTERNATIONAL VISITORS FROM MORE THAN 100 COUNTRIES
11 – 13 OCTOBER
www.intergeo.de