

УДК 528.517

А. ОЛІЙНИК¹, О. ПРОКОПОВ¹, І. ТРЕВОГО²

¹ Національний науковий центр “Інститут метрології”, вул. Мироносицька, 42, Харків, 61002, Україна, тел. +380577003406, e-mail: alla.olijnyk@metrology.kharkov.ua

² Кафедра геодезії, Національний університет “Львівська політехніка”, вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013, Україна, тел. +380322582184, e-mail: itrevoho@gmail.com

РЕФРАКЦІЙНЕ ПОДОВЖЕННЯ ТРАЄКТОРІЇ ОПТИЧНОГО СИГНАЛУ НА ТРАНСАТМОСФЕРНІЙ ТРАСІ

Мета. Мета цієї роботи – підвищення точності методів визначення тропосферної затримки, спричиненої рефракційним подовженням траєкторії сигналу супутникового лазерного віддалеміра на трансатмосферній трасі. **Методика.** Одним із головних факторів, що знижують точність вимірювання відстаней до штучних супутників Землі за допомогою супутникових лазерних віддалемірів, є вплив неоднорідної тропосфери Землі на характеристики поширення сигналу віддалеміра. Цей вплив призводить до додаткової затримки сигналу на трасі, що вимірюється, по-перше, через відмінність швидкості його поширення в неоднорідному середовищі від швидкості світла у вакуумі, а по-друге, за рахунок рефракційного подовження траєкторії сигналу внаслідок ефекту рефракції, до якого призводить ця неоднорідність. Рефракційне подовження визначається як різниця між дійсною довжиною траєкторії сигналу, яка містить викривлену внаслідок рефракції в тропосфері частину, та відстанню від точки спостереження до супутника по прямій лінії. Розрахунки основані на використанні інтегральної форми променевого рівняння геометричної оптики, яку за допомогою відомих квадратурних формул зводять до системи алгебраїчних рівнянь, що пов’язують рефракційне подовження та довжину тропосферної частини траєкторії. Основна ідея нового методу полягає у відмові від поширеного сьогодні застосування спрощених аналітичних моделей тропосферного профілю під час обґрунтування співвідношення для подовження траєкторії сигналу. У запропонованому варіанті це співвідношення подано у вигляді функції інтегральних вздовж траєкторії величин, які враховують дійсний стан тропосферного профілю у момент вимірювань відстані до супутника. **Результати.** Отримано співвідношення для рефракційного подовження та довжини тропосферної частини траєкторії, які залежать від інтегральних вздовж траси вимірювань величин, а саме кутів земної та фотограмметричної рефракції. **Наукова новизна та практична значущість.** Запропоновані співвідношення дають змогу визначити рефракційне подовження через кути рефракції, які враховують реальний стан неоднорідного тропосферного шару для спостережуваного супутника Землі безпосередньо в момент вимірювань.

Ключові слова: супутниковий лазерний віддалемір; вплив земної тропосфери; кути рефракції; подовження траєкторії.

Вступ

Під час вирішення численних завдань, пов’язаних із побудовою геодезичних мереж, вивченням навколосферного космічного простору, забезпеченням функціонування глобальних навігаційних супутникових систем і систем передавання сигналів точного часу [Appleby *et al*, 2016; Sónica *et al*, 2015; Samain *et al*, 2018; Wilkinson *et al*, 2019] сьогодні широко використовують лазерні спостереження штучних супутників Землі (ШСЗ).

Точність вимірювання відстаней до ШСЗ за допомогою супутникових лазерних віддалемірів (СЛД) істотно залежить від впливу неоднорідної тропосфери Землі на характеристики поширення сигналу віддалеміра. Завдяки цьому впливу спостерігається додаткова затримка сигналу на трасі, що вимірюється, по-перше, через відмінність швидкості його поширення в неоднорідному середовищі від швидкості світла у вакуумі,

по-друге, внаслідок рефракційного подовження траєкторії сигналу, до якого призводить ця неоднорідність [Dach *et al*, 2015].

Вимоги до точності вимірювань за допомогою СЛД підвищились вже настільки, що без введення відповідних поправок, які враховують вплив земної тропосфери, забезпечити необхідну точність неможливо [Gurtner *et al*, 2015].

Внаслідок складної просторової структури і нестаціонарності тропосфери в останні роки продовжується активна робота, спрямована на створення і вдосконалення методів визначення зазначених поправок. Як результат, почали широко практично застосовувати методи обґрунтування формул, що враховують залежність швидкості поширення сигналу від стану тропосфери, на основі використання спрощених аналітичних моделей просторового профілю тропосфери [Abshire *et al*, 1985; Degnan, 1993; Dach *et al*, 2015].

Однак методи оцінювання рефракційного подовження розвинені ще недостатньо, тому розглянемо це питання.

У статті запропоновано новий метод визначення тропосферної затримки, спричиненої рефракційним подовженням траєкторії лазерного сигналу на трансатмосферній трасі. Основна ідея нового методу полягає у відмові від застосування спрощених аналітичних моделей тропосферного профілю або числового моделювання з метою обґрунтування співвідношення для подовження. Це співвідношення подається у вигляді функції інтегральних величин, які враховують дійсний стан тропосферного профілю у момент вимірювань. До таких величин належать кути земної та фотограмметричної рефракції для ШСЗ, що спостерігається безпосередньо в момент вимірювань. Подібний підхід успішно використано під час обґрунтування формул для оцінювання рефракційного подовження в разі віддалемірних вимірювань на навколосемних трасах [Prokhorov *et al*, 2017].

Методика та основні результати

Точне співвідношення для рефракційного подовження траєкторії ШСЗ в загальному випадку можна подати у вигляді:

$$\delta L = S + L_{\text{вак}} - L_{\text{дійсн}}, \quad (1)$$

де S – довжина тропосферної частини променевої траєкторії, викривленої внаслідок ефекту рефракції; $L_{\text{вак}}$ – довжина прямолінійної частини променевої траєкторії (від точки її перетину з верхньою межею тропосфери до ШСЗ); $L_{\text{дійсн}}$ – відстань від точки спостереження до ШСЗ по прямій лінії (див. рисунок).

Величини S , $L_{\text{вак}}$, $L_{\text{дійсн}}$ можна визначити з використанням променевого рівняння геометричної оптики:

$$\frac{d}{d\sigma}(n\vec{l}) = \nabla n \quad (2)$$

і точного співвідношення:

$$\int_0^S \vec{l} d\sigma + \vec{l}_L L_{\text{вак}} = \vec{l}_{\text{дійсн}} L_{\text{дійсн}} \quad (3)$$

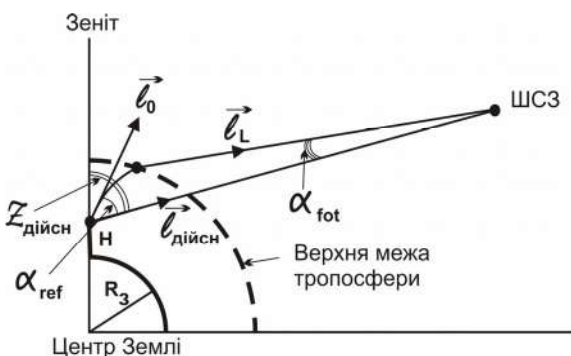


Схема поширення сигналу від точки спостереження до ШСЗ

В (2), (3) використано такі позначення: σ – променева координата; ∇ – оператор градієнта; \vec{l} – орт дотичної до променевої траєкторії (у точці спостереження $\vec{l} = \vec{l}_0$, у точці перетину з верхньою межею тропосфери $\vec{l} = \vec{l}_L$); n – фазовий показник заломлення повітря; $\vec{l}_{\text{дійсн}}$ – орт дійсного напрямку на ШСЗ.

Рівняння (2) можна записати в інтегральному вигляді:

$$\vec{l}_L - n_0 \vec{l}_0 = \int_0^S \nabla n d\sigma \quad (4)$$

За допомогою квадратурної формули Ейлера-Маклорена [Джеффрис Г. и др., 1970; Крылов В. И. и др., 1972] інтеграли в (3), (4) можна подати у вигляді суми доданків, пропорційних до значення S в степені, що дорівнює номеру доданка [Прокопов А. В., 1997]. Розглянемо випадок сферично-симетричної неоднорідної тропосфери (коли в точці спостереження $n = n_0$, $\nabla n = \nabla n_0$, $\vec{l}^{(1)} = \vec{l}_0^{(1)}$, а на верхній межі тропосфери $n_L = 1$, $\nabla n_L = 0$, $\vec{l}^{(1)} = \vec{l}_L^{(1)} = 0$). Тоді рівняння (3), (4) набудуть вигляду:

$$\frac{\vec{l}_0 + \vec{l}_L}{2} S - \frac{S^2}{12} [-\vec{l}_0^{(1)}] + \dots = \vec{l}_{\text{дійсн}} L_{\text{дійсн}} - \vec{l}_L L_{\text{вак}} \quad (5)$$

$$\frac{\nabla n_0}{2} S - \frac{S^2}{12} [-(\nabla n_0)^{(1)}] + \dots = \vec{l}_L - n_0 \vec{l}_0 \quad (6)$$

Знак $^{(1)}$ у показниках степенів величин, що входять до співвідношень (5), (6), позначає першу похідну за променевою координатою.

Точність цих співвідношень визначається кількістю членів із відповідними степенями S , що враховуються. Далі розглянуто випадок, коли враховано лише відображені в формулах (5), (6) лінійні та квадратичні за S доданки. За необхідності в цих формулах можна врахувати також доданки, пропорційні до вищих ступенів S .

Для спрощення співвідношень (5), (6) врахуємо, що відповідно до (2)

$$\vec{l}_0^{(1)} = \frac{1}{n_0} [\nabla n_0 - \vec{l}_0 (\vec{l}_0, \nabla n_0)] \quad (7)$$

а ∇n_0 у випадку сферично-симетричної тропосфери можна подати у вигляді

$$\nabla n_0 = -|g_0| \vec{l}_0, \quad (8)$$

де \vec{l}_0 – орт, спрямований в зеніт у точці спостереження; $|g_0|$ – модуль градієнта показника заломлення повітря у точці спостереження.

Враховуючи, що для сферично-симетричного середовища у довільній точці траєкторії $\nabla n = -|g| \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$,

де \vec{r} – радіус-вектор точки в системі координат з початком у центрі Землі, отримуємо:

$$\nabla n_0^{(1)} = (\vec{l}_0, \vec{i}_0) \vec{i}_0 \left[-\frac{d|g_0|}{dh} + \frac{|g_0|}{R_3+H} \right] - \frac{|g_0|}{R_3+H}, \quad (9)$$

де R_3 – радіус Землі; H – висота точки спостереження.

Враховуючи (7), (8), (9), рівняння (5), (6) подамо у вигляді

$$\frac{\vec{l}_0 + \vec{l}_L}{2} S - \frac{S^2 |g_0|}{12n_0} [-\vec{i}_0 + \vec{l}_0 (\vec{l}_0, \vec{i}_0)] = \vec{l}_{\text{оіісн}} L_{\text{оіісн}} - \vec{l}_L L_{\text{вак}} \quad (10)$$

$$\frac{-\vec{i}_0 |g_0|}{2} S + \frac{S^2}{12} [(\vec{l}_0, \vec{i}_0) \vec{i}_0 \left[\frac{|g_0|}{R_3+H} - \frac{d|g_0|}{dh} \right] - \frac{|g_0|}{R_3+H} \vec{l}_0] = \vec{l}_L - n_0 \vec{l}_0. \quad (11)$$

Щоб знайти $L_{\text{оіісн}}$ та $L_{\text{вак}}$, складемо систему двох рівнянь, помноживши вираз (10) почергово на $\vec{l}_{\text{оіісн}}$ та \vec{l}_L . Знайдені в результаті розв'язання цієї системи $L_{\text{оіісн}}$ та $L_{\text{вак}}$ підставимо в (1) та отримаємо

$$\delta L = S \frac{S [1 + (\vec{l}_0, \vec{l}_L) + (\vec{l}_0, \vec{l}_{\text{оіісн}}) + (\vec{l}_L, \vec{l}_{\text{оіісн}})]}{2 [1 + (\vec{l}_L, \vec{l}_{\text{оіісн}})]} - \frac{S^2 |g_0|}{12n_0} \frac{1}{1 + (\vec{l}_L, \vec{l}_{\text{оіісн}})} \cdot [-(\vec{l}_0, \vec{l}_{\text{оіісн}}) - (\vec{l}_0, \vec{l}_L) + (\vec{l}_0, \vec{l}_{\text{оіісн}})(\vec{l}_0, \vec{i}_0) + (\vec{l}_0, \vec{l}_L)(\vec{l}_0, \vec{i}_0)], \quad (12)$$

де довжина тропосферної частини траєкторії S повинна визначатися із співвідношення (11).

Перед тим, як перейти до розгляду рівняння для S , зауважимо, що скалярні добутки векторів у (12) виражаються через дійсний зенітний кут $z_{\text{оіісн}} = \arccos(\vec{l}_0, \vec{l}_{\text{оіісн}})$, кут земної рефракції $\alpha_{\text{ref}} = \arccos(\vec{l}_0, \vec{l}_{\text{оіісн}})$ та кут фотограмметричної рефракції $\alpha_{\text{for}} = \arccos(\vec{l}_L, \vec{l}_{\text{оіісн}})$. Якщо $z_{\text{оіісн}} = 0$, коли рефракція відсутня, співвідношення (12) дає очевидний результат – $\delta L = 0$. Якщо ж $\vec{l}_L = \vec{l}_{\text{оіісн}}$ (тобто коли $\alpha_{\text{for}} = 0$), формула (12) перетворюється на співвідношення:

$$\delta L = S \sin^2 \frac{\alpha_{\text{ref}}}{2} - \frac{S^2 |g_0|}{12n_0} \sin \alpha_{\text{ref}} \sin(z_{\text{оіісн}} - \alpha_{\text{ref}}) \quad (13)$$

що збігається з отриманим в [Прокопов А. В., 1997] співвідношенням для рефракційного подовження під час спостереження нескінченно віддаленого об'єкта.

Для визначення S помножимо (11) на \vec{i}_0 й одержимо квадратне рівняння для S :

$$\frac{-|g_0|S}{2} + \frac{S^2}{12} \left[-(\vec{l}_0, \vec{i}_0) \frac{d|g_0|}{dh} \right] = (\vec{l}_L, \vec{i}_0) - n_0 (\vec{l}_0, \vec{i}_0), \quad (14)$$

де $(\vec{l}_0, \vec{i}_0) = \cos(z_{\text{оіісн}} - \alpha_{\text{ref}})$; $(\vec{l}_L, \vec{i}_0) = \cos(z_{\text{оіісн}} + \alpha_{\text{for}})$.

Загальний розв'язок рівняння (14) має вигляд:

$$S = \frac{1}{\frac{1}{6} (\vec{l}_0, \vec{i}_0) \frac{d|g_0|}{dh}} \left(-\frac{|g_0|}{2} + \sqrt{\frac{|g_0|^2}{4} + \frac{1}{3} (\vec{l}_0, \vec{i}_0) \frac{d|g_0|}{dh} [n_0 (\vec{l}_0, \vec{i}_0) - (\vec{l}_L, \vec{i}_0)]} \right). \quad (15)$$

Для наближених оцінок використаємо той факт, що другий доданок під коренем у (15) зазвичай можна вважати малим, тому після відповідного розкладу в ряд отримаємо:

$$S = \frac{2}{|g_0|} [n_0 \cos(z_{\text{оіісн}} - \alpha_{\text{ref}}) - \cos(z_{\text{оіісн}} + \alpha_{\text{for}})]. \quad (16)$$

Для $z_{\text{оіісн}} = 0$, коли $\alpha_{\text{ref}} = \alpha_{\text{for}} = 0$ маємо:

$$S = \frac{2(n_0 - 1)}{|g_0|} \approx \frac{2 \cdot 3 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 10^{-5}} \approx 30 \text{ км.}$$

Для $z_{\text{оіісн}} = \frac{\pi}{2}$:

$$S = \frac{2}{|g_0|} (n_0 \sin \alpha_{\text{ref}} + \sin \alpha_{\text{for}}).$$

Якщо $\alpha_{\text{for}} = 0$ (нескінченно віддалений об'єкт)

$$S = \frac{2}{|g_0|} \alpha_{\text{ref}} \approx 10^5 \alpha_{\text{ref}},$$

де α_{ref} – у радіанах.

Біля горизонту для дійсного кута $z_{\text{оіісн}} = \frac{\pi}{2}$ заданими Пулковських таблиць рефракції кут α_{ref} оцінюється як $\alpha_{\text{ref}} \approx 1770''$. В радіанах це відповідно $\alpha_{\text{ref}} \approx 0.86 \cdot 10^{-2}$. Тому, якщо $z_{\text{оіісн}} = \frac{\pi}{2}$, довжина $S \approx 860$ км.

Для докладнішого аналізу точнісних можливостей отриманих співвідношень (12), (15) необхідно виконати числовий експеримент із використанням реальних або модельних даних про кути $z_{\text{оіісн}}$, α_{ref} , α_{for} та іншої інформації, яка використовується під час лазерних спостережень космічних об'єктів. Така робота повинна бути предметом окремого дослідження.

Висновки

Обґрунтовано нові співвідношення для визначення рефракційного подовження траєкторії сигналу супутникового лазерного віддалеміра на трансатмосферній трасі. Ці співвідношення виражені через інтегральні величини, які враховують дійсний стан неоднорідного тропосферного профілю для штучного супутника

Землі, що спостерігається, безпосередньо в момент вимірювань, а саме через кути земної та фотограмметричної рефракції.

Література

- Джеффрис Г., Свирлс Б. (1970). Методы математической физики. М.: Мир, 352 с.
- Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И. (1972). Вычислительные методы высшей математики. Т. 1. Минск: Вышш. школа, 584 с.
- Прокопов А. В. (1997). Метод интегрального лучевого приближения в теории электромагнитных волн и его приложения в астрономии и геодезии: дис.. д-ра физ.-мат. наук. Харьков, 343 с.
- Abshire J., Gardner C. (1985). Atmospheric refractivity corrections in satellite laser ranging. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 23(4): 414–425. URL: <https://doi.org/10.1109/tgrs.1985.289431>
- Appleby G., Rodríguez J., Altamimi Z. (2016) Assessment of the accuracy of global geodetic satellite laser ranging observations and estimated impact on ITRF scale: estimation of systematic errors in LAGEOS observations 1993–2014. *J Geod* 90(12):1371–1388. <https://doi.org/10.1007/s00190-016-0929-2>
- Dach R., Lutz S., Walser P., Fridez P. (eds) (2015). Bernese GNSS software, Version 5.2. Astronomical Institute, University of Bern, 858.
- Degnan J. J. (1993). Millimeter accuracy satellite laser ranging: a review. *Contrib Space Geod Geodyn Technol* 25:133–162. URL: <https://doi.org/10.1029/GD025p0133>
- Gurtner W., Noomen R., Pearlman M. R. (2005). The International Laser Ranging Service: current status and future developments. *Advances in Space Research, Vol. 36, Iss. 3*, 327–332. <https://doi.org/10.1016/j.asr.2004.12.012>
- Prokopov A., Trevoho I. (2017). To the theory of instrumental methods of accounting for refractive lengthening of the trajectories of electromagnetic waves in distance measurement on surface paths. *Modern achievements of geodesic science and industry, I(34)*: 85-87.
- Samain E., Rovera D. G., Torre J. M. et al. (2018). Time transfer by laser link (T2L2) in non common view between Europe and China. *IEEE Trans Ultrason Ferroelectr Freq Control* 99:1. <https://doi.org/10.1109/tuffc.2018.2804221>
- Sónnica K., Thaller D., Dach R. et al. (2015). Satellite laser ranging to GPS and GLONASS. *J. Geod* 89(7): 725–743. URL: <https://doi.org/10.1007/s00190-015-0810-8>
- Wilkinson M., Schreiber U., Procházka I. et al. (2019). The next generation of satellite laser ranging systems. *Journal Geodesique, 93*, 2227–2247. URL: <https://doi.org/10.1007/s00190-018-1196-1>

A. PROKOPOV, O. OLIJNYK, I. TREVOHO

¹ National Scientific Centre “Institute of Metrology”, 42, Mironositska str., Kharkiv, 61002, Ukraine, tel. +380577003406, e-mail: alla.olijnyk@metrology.kharkov.ua

² Department of Geodesy, Lviv Polytechnic National University, 12, S. Bandery str., Lviv, 79013, Ukraine, tel. +380322582184, e-mail: itrevoho@gmail.com

REFRACTIVE LENGTHENING OF SIGNAL TRAJECTORIES IN SATELLITE LASER RANGING

Aim. The aim of this work is to improve the accuracy of methods for calculating the tropospheric delay caused by the refractive lengthening of the satellite laser rangefinder signal trajectory on the transatmospheric path. **Method.** One of the main factors that reduce the accuracy of measuring the distance to artificial Earth satellites with satellite laser rangefinders is the influence of the inhomogeneous Earth troposphere on the rangefinder propagation characteristics. This effect leads to an additional signal delay on the measured path, firstly, due to the differences in its propagation speed in a non-uniform environment from the speed of light in vacuum, and secondly, due to the refractive lengthening of the signal trajectory due to the effect of refraction, which is a result of this inhomogeneity. The refractive lengthening is the difference between the real length of a signal trajectory (with the tropospheric part curved by the refraction) and the distance from the observation point to the satellite in a straight line. The calculations are based on use of the integral form of the geometric optics' ray equation. With the help of well-known quadrature formulas, this integral form is reduced to a system of algebraic equations connecting the elongation due to refraction and the length of the tropospheric part of the trajectory. The main idea of the new method is the refusal of the widespread use of simplified analytical models of the tropospheric profile when calculating the ratio for the signal trajectory lengthening. In the proposed variant, this ratio is given as an integrated function along the trajectory for values that take into account the actual state of the tropospheric profile at the time of measuring the distance to the satellite. **Results.** Relationships are obtained for the refractive lengthening and the length of the tropospheric part of the trajectory, which depend on the integral values along the path, namely, the

angles of the terrestrial and photogrammetric refraction. **Scientific novelty and practical importance.** The proposed relations make it possible to determine the refractive elongation through the angles of refraction, which take into account the actual state of the inhomogeneous tropospheric layer for the observed satellite of the Earth immediately at the time of measurements.

Key words: satellite laser rangefinder; the Earth's troposphere influence; refractive angles; the lengthening of the trajectory.

References

- Abshire J., Gardner C. (1985). Atmospheric refractivity corrections in satellite laser ranging. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 23(4): 414–425. <https://doi.org/10.1109/tgrs.1985.289431>
- Appleby G., Rodríguez J., Altamimi Z. (2016). Assessment of the accuracy of global geodetic satellite laser ranging observations and estimated impact on ITRF scale: estimation of systematic errors in LAGEOS observations 1993–2014. *J Geod*, 90(12):1371–1388. <https://doi.org/10.1007/s00190-016-0929-2>
- Dach R., Lutz S., Walser P., Fridez P. (eds) (2015). *Bernese GNSS software, Version 5.2*. Astronomical Institute, University of Bern, 858.
- Degnan J. J. (1993). Millimeter accuracy satellite laser ranging: a review. *Contrib Space Geod Geodyn Technol* 25:133–162. <https://doi.org/10.1029/GD025p0133>
- Gurtner W., Noomen R., Pearlman M. R. (2005). The International Laser Ranging Service: current status and future developments. *Advances in Space Research*, Vol. 36, Is. 3, 327–332. <https://doi.org/10.1016/j.asr.2004.12.012>
- Jeffreys H., Swirls B. (1970). *Methods of mathematical physics*. Issue 2. M.: Mir, 352. (in Russian).
- Krylov V. I., Bobkov V. V., Monastyrny P. I. (1972). *Computational methods of higher mathematics*. Vol. 1. Minsk: Izd. Vyssha Shkola, 584. (in Russian).
- Prokopov A. V. (1997). *The integral ray approximation method in the theory of electromagnetic waves and its applications in astronomy and geodesy: Dis. Dr. Sc. (Phys.-Math.)*. Kharkiv, 343. (in Russian)
- Prokopov A., Trevoho I. (2017). To the theory of instrumental methods of accounting for refractive lengthening of the trajectories of electromagnetic waves in distance measurement on surface paths. *Modern achievements of geodesic science and industry*, 1(34): 85–87.
- Samain E., Rovera D. G., Torre J. M. et al. (2018). Time transfer by laser link (T2L2) in non common view between Europe and China. *IEEE Trans Ultrason Ferroelectr Freq Control* 99:1. <https://doi.org/10.1109/tuffc.2018.2804221>
- Sósnička K., Thaller D., Dach R. et al. (2015). Satellite laser ranging to GPS and GLONASS. *J Geod* 89(7):725–743. <https://doi.org/10.1007/s00190-015-0810-8>
- Wilkinson M., Schreiber U., Procházka I. et al. (2019). The next generation of satellite laser ranging systems. *Journal Geodesique*, 93, 2227–2247. <https://doi.org/10.1007/s00190-018-1196-1>

