УДК 624.012

СОЗДАНИЕ ВЫСОКОТЕХНОЛОГИЧНОГО КОМПЛЕКСНОГО РАСЧЕТА НА ОСНОВЕ СТАЛЬНОГО КАРКАСА С АНАЛИЗОМ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЛЬНЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ И УЧЕТОМ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИАГРАММЫ ДЕФОРМИРОВАНИЯ МАТЕРИАЛА

д.т.н., доц. Лапенко А.И., студ. Сокур И.А.
Национальный авиационный университет, Киев

В большинстве современных конечно-элементных программ, предназначенных для расчета строительных конструкций, анализ устойчивости проводится в предположении о линейно-упругой работе материала.

Напомним, что в работе [1], на основе использования концепции Шенли, был предложен алгоритм корректировки модулей (АКМ), позволяющий свести задачу физически-нелинейной устойчивости конструкции к последовательному решению задач обычной линейной устойчивости с корректировкой на каждом шаге модулей упругости. Для корректировки модулей в [1] предлагалось использовать следующую формулу:

$$E_k = \frac{N_{k-1}^{sh}}{N_{k-1}^{lin}} E_{k-1} \quad (1)$$

Где E_{k-1} –модуль упругости на $(k-1)$-й итерации;E_kмодуль упру-гости на k -й итерации; N_{k-1}^{lin} – значение усилия в рассматриваемом элементе, соответствующее критической нагрузке для системы, полученной из решения линейно-упругой задачи устойчивости на$(k-1)$-й итерации;N_{k-1}^{sh}–значение критического усилия, определяемое на основе концепции Шенли о касательном модуле для рассматриваемого элемента на$(k-1)$-й итерации. Итерационный процесс завершается при сходимости значений собственных чисел и значений модулей упругости. Данный подход хорошо описывает устойчивость конструкций из центрально-сжатых стержней, но не учитывает влияния изгибающих моментов (или эксцентриситетов приложения нагрузки) приводящего к снижению значений критических параметров нагрузки. В реальной инженерной практике при анализе устойчивости сложных строительных конструкций случай строго центрального сжатия встречается редко.

В [2] предложено для расчета устойчивости систем со сжато-изогнутыми стержнями, работающими за пределом упругости, модифицировать АКМ. В формуле (1) вместо предельного усилия для центрально-сжатого стержня предлагается использовать значение предельного усилия для сжато-изогнутого стержня, определяемое по критерию «нулевой отпорности» [3] (т.е. по условию достижения сжимающим усилием в элементе своего максимального значения). Тогда получим:

$$E_k = \frac{N_{k-1}^{m}}{N_{k-1}^{lin}} E_{k-1} \quad (2)$$

Где N_{k-1}^{m} – предельное значение, определяемое из решения задачи о «нулевой отпорности» сжато-изгибаемого стержня с учетом пластичности на $(k-1)$-й итерации.

Рассмотрим подробнее алгоритм корректировки модулей с использованием критерия «нулевой отпорности».

1. На предварительном этапе (нулевая итерация) решается задача статики для системы, материал которой считается линейно-упругим. Затем решается задача устойчивости и определяется параметр критической нагрузкиp_0.

2. Для итераций$k = 1, 2, ..n$ для каждого конечного элемента определяется усилиеN_{k-1}^{lin}, соответствующее критической нагрузке для системы ($N_{k-1}^{lin} = p_{k-1}N^s$ где N^s – усилие в элементе, определяемое из статического расчета системы на нулевой итерации). Если напряжения в элементе превышают предел пропорциональности, то решается Рис. 1задача о «нулевой отпорности» и определяется По формуле (2) определяется новое значение модуля упругости для элементаE_k.

3. Решается задачи устойчивости для всей системы, определение параметра критической нагрузкиp_k.

4. Проверяются критерии сходимости итерационного алгоритма по параметру критической нагрузки$|p_k - p_{k-1}| \leq \Delta_p$ и $\max_m|E_{m,k-1} - E_{m,k}| \leq \Delta_p$где m пробегает повсем конечным элементам системы. Если критерии выполняются, то расчет завершается, иначе алгоритм повторяется, начиная с шага 2.

Рассмотрим задачу о «нулевой отпорности» для отдельного элемента на-й итерации. Для этого перейдем к задаче о шарнирно опертом стержне, сжатом силой P, приложенной с эксцентриситетом e (рис. 1).

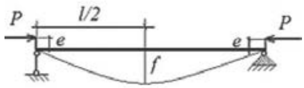

Рис. 1. Расчетная схема стержня , сжатым силой P, приложенной с эксцентриситетом e

Подобная задача решается в [3] путем интегрирования дифференциальных уравнений нелинейного деформирования стержня. В связи с тем, что такой подход требует значительного времени на вычисления, а решать задачу требуется для каждого конечного элемента, используем упрощенный подход. Следуя [4] допустим, что изогнутая линия стержня представляет собой полуволну синусоиды:

$$\vartheta = f sin\frac{\pi \cdot z}{l} \quad (3)$$

где z– координата, отсчитываемая вдоль оси стержня;l– расчетная длина стержня;f– прогиб в центральном сечении. С учетом этого предположения для определения критической нагрузки достаточно будет рассматривать равновесие центрального сечения стержня.

Расчетную длину стержня для $-й$ итерации получим из формулы Эйлера при известном значении усилия и значении модуля упругости E_kдля элемента на предыдущей итерации:

$$l_k = \pi\sqrt{E_k I / N_k^{lin}},\ \lambda_k = \frac{l_k}{i} = \pi\sqrt{E_k F / N_k^{lin}}, \tag{4}$$

где l_kи λ_k– расчетная длина и гибкость стержня наk -й итерации;I,i,F– соответственно момент инерции, радиус инерции и площадь сечения.

Введем систему координат, ось которой проходит через центр тяжести сечения и направлена вдоль одной из его главных осей. Координата u отсчитывается от левого края сечения. Пустьh– размер сечения;δ– длина участка упругого сжатия или растяжения;x– положение нейтральной линии; $\sigma_{пц}$– предел пропорциональности материала; $\varepsilon_{пц}$– соответствующая ему деформация.

Рассмотрим геометрическую сторону задачи.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\varepsilon_{пц}}{\delta} = \frac{\sigma_{пц}}{E_0\delta} \tag{5}$$

ЗдесьE_0=E– истинный модуль упругости материала, совпадающий с модулем упругости на нулевой итерации. Выражение для кривизныxизогнутой оси стержня с учетом допущения о малости прогибов имеет вид:

$$x = \mp\frac{d^2\vartheta}{dz^2} \tag{6}$$

Тогда с учетом (3) при$z = l/2$получим:

$$\frac{1}{\rho} = f\frac{\pi^2}{l^2} \tag{7}$$

Далее приняв во внимание (5) получим связь между прогибом f и параметром эпюрыδ:

$$f = \frac{\sigma_{пц}}{E_0\delta}\cdot\frac{l^2}{\pi^2} = \left(\frac{l}{i}\right)^2\left(\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\sigma_{пц}}{E_0}}\right)^2\frac{i^2}{\delta} \tag{8}$$

Обозначим через $\overline{\lambda_k}$ и f_kприведенную гибкость и прогиб для k-й итерации соответственно, тогда с учетом (4) и (8) получим:

$$\overline{\lambda_k} = \lambda_k\left(\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\sigma_{пц}}{E_0}}\right) = \sqrt{\frac{\sigma_{пц}E_k F}{N_k^{lin}E_0}},\ f_k = \frac{i_k^2\overline{\lambda_k}^2}{\delta} \tag{9}$$

Для моделирования нелинейного материала будем пользоваться диаграммой Прандтля:

$$\sigma(\varepsilon) = \begin{cases} sing(\varepsilon)\sigma_T, & |\varepsilon| \geq \varepsilon_T \\ E\varepsilon, & |\varepsilon| < \varepsilon_T \end{cases} \tag{10}$$

Здесьσ–напряжение;ε–деформация;σ_T–предел текучести (совпадает с пределом пропорциональности),$(\varepsilon_T - \sigma_T)\ /\ E$.

Также для стальных элементов будем использовать унифицированную диаграмму строительных сталей П.Д. Одесского и Г.Е. Бельского [5] с аппроксимацией по формуле, предложенной в [3]:

$$\sigma(\varepsilon)=\begin{cases}\sigma_T sing(\varepsilon)\left\{0{,}8+k\times arktg\left[\frac{(|\varepsilon|-0{,}8\varepsilon_T)}{k\varepsilon_T}\right]\right\}, & |\varepsilon|>0{,}8\varepsilon_T\\ \sigma_T\varepsilon/\varepsilon_T, & |\varepsilon|\le 0{,}8\varepsilon_T\end{cases} \tag{11}$$

Здесь безразмерный коэффициентk = 0,1413.

Введем безразмерные величины:$\hat{x}=x/h$, $\hat{u}=u/h$, $\hat{f}=f/h$, $\hat{\delta}=\delta/h$, $\hat{\sigma}=\sigma/h$и составим уравнения равновесия для сечения стержня (в безразмерном виде):

$$\begin{cases}\widehat{N}-\int_0^1\hat{\sigma}\,(\hat{u})d\widehat{F}=0\\ \widehat{N}\left(\hat{e}+\hat{x}_c+\hat{f}\right)-\int_0^1\hat{u}\cdot\hat{\sigma}\,(\hat{u})d\widehat{F}=0,\ \widehat{N}=N/(\sigma_T h^2),\end{cases} \tag{12}$$

где$\hat{e}$и$\hat{x}_c$–безразмерные эксцентриситет и координата центра тяжести сечения соответственно.

Введем обозначения для безразмерных силы и момента в сечении относительно левого края (в зависимости от характеристик эпюры$\hat{x}$и $\hat{\delta}$):

$$\widehat{N}\left(\hat{x},\hat{\delta}\right)=\int_0^1\hat{\sigma}\left(\hat{u},\hat{x},\hat{\delta}\right)d\widehat{F},\ \widehat{M}\left(\hat{x},\hat{\delta}\right)=\int_0^1\hat{u}\cdot\hat{\sigma}\left(\hat{u},\hat{x},\hat{\delta}\right)d\widehat{F} \tag{13}$$

Задача определения критической силы для сжатого изгибаемого стержня в безразмерном виде для -й итерации с учетом (9), (12), (13) имеет следующий вид:

$$\begin{cases}\widehat{N}_k^m=\max_f\widehat{N}\left(\hat{x},\hat{\delta}\right)\\ \widehat{N}\left(\hat{x},\hat{\delta}\right)\cdot\left(\hat{e}_k+\hat{x}_c+\hat{f}\right)-\widehat{M}\left(\hat{x},\hat{\delta}\right)=0\\ \hat{\delta}=(\hat{\imath}^2\sigma_{пц}E_kF)/(N_k^{lin}E_0\,\hat{f})\end{cases} \tag{14}$$

Необходимо отметить, что предложенный способ решения задачи о «нулевой отпорности» накладывает ограничение на диапазон значений эксцентриситета силы e, а именно$e\geq e_{\text{мin}}>0$. Тогда в случае нулевых моментов значение e можно, например, положить равнымl /750 + i /20, что соответствует требованиям к конструктивным расчетам, изложенным в Пособии к СНиП 11-23-81*, и, таким образом, уже на этапе общих расчетов позволяет начать учитывать требования норм.

Анализ результатов показывает, что критическая нагрузка, полученная по критерию «нулевой отпорности» в 1,26 раза меньше нагрузки полученной по концепции Шенли и в 2,09 раза меньше критической нагрузки без учета физической нелинейности. Также весьма важным является то, что формы потери устойчивости, полученные с использованием концепции Шенли и критерия «нулевой отпорности», существенно отличаются. Это означает, что расчетные длины элементов, необходимые для дальнейших нормативных расчетов, также будут различны. Такое существенное различие в результатах с использованием концепции Шенли и критерия «нулевой отпорности» связано с тем, что концепция Шенли не учитывает эпюру изгибающих моментов, которые существенны для верхнего пояса(рис. 2).

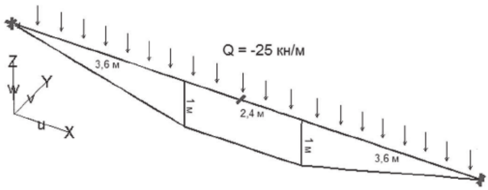

Рис. 2. Схема фермы

Для иллюстрации применимости критерия «нулевой отпорности» в условиях отсутствия моментов и других несовершенств рассмотрим еще одну задачу. В [6] приведены результаты испытаний устойчивости пространственной рамы, нагруженной одинаковыми узловыми нагрузками, действующими на узлы рамы. Здесь важным являлось то, что верхние узлы и ригели рамы полностью контактировали с прессом (т.е., удерживались от горизонтальных смещений и поворотов).

Решение данной задачи на устойчивость в линейно упругой постановке приводит к завышению полной нагрузки почти в 6 раз.

Таким образомпереход в алгоритме корректировке модулей от использования концепции Шенли к критерию «нулевой отпорности» позволяет учесть влияние эксцентриситетов силы и моментов, что делает предложенный алгоритм применимым к расчету не только отдельных элементов, но и сложных строительных конструкций.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Улитин В.В.* Физически нелинейный анализ устойчивости конструкций.— СПб.: ГИОРД, 2007. — 96 с.
2. *Солдатов А.Ю., Лебедев В.Л., Семенов В.А.* Анализ устойчивости строительных конструкций с учетом физической нелинейности методом конечных элементов // Строительная механика и расчет сооружений.
3. *Грудев И.Д.* Устойчивость стержневых элементов в составе стальных конструкций. — М.: МИК, 2005. — 320 с.
4. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. — М.: Наука, 1967. — 984 с.
5. *Одесский П.Д, Бельский Г.Е.* О едином подходе к использованию диаграмм работы строительных сталей // Промышленное строительство, 1980, № 7. С. 4—6.
6. *Сон М.П.* Экспериментально-теоретическое исследование устойчивости пространственных рамных систем и разработка инженерной методики определения критической силы с учетом нелинейности. Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук. — М., 2010.
7. *Стороженко Л.І., Лапенко О.І.* Залізобетонні конструкції в незнімній опалубці. – Полтава: АСМІ, 2008. – 312 с.