УДК 534.1

В. С. ЛОВЕЙКІН, докт. техн. наук, Ю. В. ЧОВНЮК, канд. техн. наук,
Національний університет біоресурсів і природокористування України

К. І. ПОЧКА, канд. техн. наук
Київський національний університет будівництва і архітектури

ХВИЛЬОВІ ЕФЕКТИ У ПРУЖНИХ СИСТЕМАХ ПІДЙОМНО-ТРАНСПОРТНИХ МАШИН ТА МЕХАНІЗМІВ

Постановка проблеми. Низка широко відомих у фізиці хвильових ефектів практично не враховується при аналізі динамічної поведінки пружних систем підйомно-транспортних машин (ПТМ) та механізмів. Частково це пояснюється тим, що особливості прояву хвильових ефектів у ситуаціях, типових для динаміки ПТМ, залишаються невивченими. Іншими словами, відсутня культура знань про хвилі у задачах машинознавства і динаміки ПТМ та механізмів.

Вимушені коливання пружних систем ПТМ та механізмів досить детально вивчені тільки для тих випадків, коли джерела нерухомі. Якщо вони рухаються, що характерно для багатьох задач динаміки пружних елементів ПТМ, механізмів і конструкцій, то, як правило, всі хвильові ефекти, викликані рухом джерел (ефект Доплера, ефекти гальмівного та перехідного випромінювань і т.д.), ігнорувались. Одна з причин такого положення полягає у тому, ці ефекти не були відомі фахівцям з динаміки пружних систем ПТМ та механізмів, а інша – у неадекватності методів розв'язку відповідних задач, притаманних таким системам.

Дослідження, які проведені у вказаному напрямку, не тільки поглибили розуміння багатьох явищ, але й дозволили побачити шляхи вирішення ряду актуальних проблем. Наприклад, виявилось, що рух об'єктів вподовж направляючих, взагалі кажучи, супроводжується хвилеутворенням. Посередником перетворення енергії поступального руху об'єкту (ПТМ) у енергію випромінювання є сила тиску пружних хвиль, котра, як з'ясувалось, у багатьох випадках справляє значний вплив у результуючу силу опору рухові. При цьому вказаний вплив може бути як додатнім, так і від'ємним.

Аналіз публікацій по темі дослідження. У роботах [1, 2, 4] виведені закони зміни енергії та імпульсу для одновимірних систем із рухомими закріпленнями та навантаженнями, а також досліджене випромінювання пружних хвиль у вказаних системах рівномірно рухомими джерелами. Вимушені коливання екіпажу, який рухається вподовж пружної направляючої, досліджені у [3], а сили опору, що виникають для руху постійних навантажень, вивчені у [5]. Коливання деформованих систем при імпульсних та рухомих навантаженнях вивчались у [6-8, 10], а автори [9] виявили особливості прояву ефекту Доплера у одновимірних пружних системах з дисперсією. Результати вказаних вище робіт та досліджень будуть використані при аналізі хвильових ефектів у пружних системах ПТМ та механізмів.

Мета даної роботи полягає у встановленні основних закономірностей хвилеутворень у пружних системах ПТМ та механізмів, які виникають у результаті руху самого джерела коливань/вібрацій.

Основна частина. Ефект Доплера та його динамічні наслідки. Частоти коливань пружної системи ПТМ та механізмів, які вимушені рівномірно рухомим ($x = v \cdot t$) гармонічним джерелом, зміщені по відношенню до частоти джерела Ω. Зміщення частоти знаходиться з кінематичного інваріанту:

$$\omega - v \cdot k = \Omega, \tag{1}$$

де ω – кругова частота, k – хвильовий вектор збуджених у системі хвиль, v – швидкість руху джерела. Вираз (1) описує рівність фаз збуджених хвиль фазі джерела коливань. Дисперсійне співвідношення типу:

$$f(\omega,\ k) = 0, \tag{2}$$

зв'язує частоти ω і хвильові числа k можливих у системі хвиль.

У необмежених системах з усіх розв'язків (1) та (2) реалізуються тільки ті, що задовольняють вимозі обмеженості зміщень на нескінченності ($x \to \pm\infty$):

$$\operatorname{Im} k > 0 \quad \text{при} \quad x < v \cdot t, \qquad \operatorname{Im} k < 0 \quad \text{при} \quad x > v \cdot t \tag{3}$$

та умовам випромінювання Мандельштамма [11]:

$$\frac{d\omega}{dk} < v, \quad x < v \cdot t; \qquad \frac{d\omega}{dk} > v, \quad x > v \cdot t, \tag{4}$$

де $\frac{d\omega}{dk}$ – групова швидкість виникаючих у деформованих/пружних системах ПТМ та механізмів хвиль.

За відсутності дисперсії, як це має місце для поперечних хвиль у струні, крутних та поздовжніх хвиль у стрижні (моделі гнучких пружних елементів ПТМ та механізмів – канатів), коли динамічний процес описується хвильовим рівнянням типу $\omega^2 - c_0^2 \cdot k^2 = 0$, де $c_0 = \frac{d\omega}{dk} = v_{гр}$, всі хвильові числа приймають дійсні значення і швидкості перенесення хвильової енергії $v_{гр} = \pm c_0$. У цьому випадку задача кінематики (1)-(4) у залежності від швидкості v руху джерела має якісно різні розв'язки.

При $v < c_0$ рухоме джерело частоти Ω випромінює одну хвилю перед собою (у $+x$ напрямку) з $\omega = \frac{\Omega}{(1-\beta)}$ та одну хвилю позаду (у $-x$ напрямку) з $\omega = \frac{\Omega}{(1+\beta)}$, де $\beta = {}^{v}\!/_{c_0}$.

При $v > c_0$ вперед випромінювання немає. Обидві хвилі з вказаними частотами збуджуються за джерелом. Причому хвиля з $\omega = \frac{\Omega}{(\beta-1)}$ біжить по слідам джерела, що рухається.

Динамічні наслідки ефекту Доплера можна з'ясувати на прикладі нескінченої струни (модель гнучкого канату вантажопідйомного механізму ПТМ) з рухомою вподовж неї зосередженою масою m, до якої прикладені поперечна $F(t) = F_0 \cdot \sin \Omega t$ та поздовжня $T_g(t)$ сили. Відповідні хвильові рівняння й умови на рухомій границі $x = l(t)$ записуються у виді [1] $u_{tt} - c_0^2 \cdot u_{xx} = 0$ ($c_0 = \sqrt{{}^{N}\!/_{\rho_0}}$):

$$\begin{cases} u(l(t)+0,\, t) = u(l(t)-0,\, t) = u^0(t), \\ m \cdot \ddot{u}^0 = \left[N \cdot u_x + \dot{l} \cdot \rho_0 \cdot u_t\right] + F(t), \\ m \cdot \ddot{l} = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left[\rho_0 \cdot u_t^2 + N \cdot u_x^2 + 2 \cdot \rho_0 \cdot \dot{l} \cdot u_x \cdot u_t\right] + T_g(t). \end{cases} \tag{5}$$

Тут $u(x,\, t)$ – поперечне відхилення струни; квадратні дужки – різниця величин, що стоять у них з правої та лівої сторін від рухомої границі; N – натяг; ρ_0 – питома (на одиницю довжини канату) щільність струни.

Вважаємо, що рух маси вподовж струни рівномірний: $l(t) = v \cdot t$, де $v = \text{const}$, t – час. У такому випадку з рівняння руху маси вподовж струни знаходимо вираз для зовнішньої сили, що забезпечує рівномірний рух, тобто для сили тиску хвилі:

$$T_g = \frac{1}{2} \cdot \left[\rho_0 \cdot u_t^2 + N \cdot u_x^2 + 2 \cdot v \cdot \rho_0 \cdot u_x \cdot u_t\right]. \tag{6}$$

При докритичних швидкостях ($v < c_0$), згідно (3)-(5),

$$u(x,\, t) = \begin{cases} A \cdot \sin(\omega_1 \cdot t + k_1 \cdot x + \varphi), & x < v \cdot t, \\ A \cdot \sin(\omega_2 \cdot t + k_2 \cdot x + \varphi), & x > v \cdot t, \end{cases} \tag{7}$$

де

$$A = \frac{c_0}{2 \cdot \Omega} \cdot \frac{\left({}^{F_0}\!/_{N}\right)}{\sqrt{1 + a_0^2}}; \quad \omega_1 = \frac{\Omega}{(1+\beta)}; \quad \omega_2 = \frac{\Omega}{(1-\beta)}; \quad k_{1,2} = \frac{\omega_{1,2}}{c_0};$$

$$\varphi = -2 \cdot \text{arctg}\left(a_0 + \sqrt{1 + a_0^2}\right); \quad a_0 = \frac{m \cdot c_0 \cdot \Omega}{2 \cdot N}; \quad \beta = {}^{v}\!/_{c_0}.$$

Підставляючи отриманий розв'язок у (6), знаходимо силу опору рухові, яка є наслідком хвилеутворення:

$$T_g = \frac{\beta}{\left(1-\beta^2\right)} \cdot \frac{\left(F_0^2 / N\right)}{\left(1+a_0^2\right)} \cdot \cos^2 \Omega \cdot t \,. \tag{8}$$

Звідси видно, що при русі зі швидкостями, які близькі до критичної ($\beta \to 1$), сила опору рухові може бути наскільки завгодно великою.

При закритичних швидкостях ($v > c_0$), згідно (3)-(5),

$$u(x,\, t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta} \cdot \dfrac{\Omega}{2 \cdot c_0} \cdot \left(F_0 / N\right) \cdot \left\{\cos\left(\omega_1 \cdot t + k_1 \cdot x\right) - \cos\left(\omega_2 \cdot t + k_2 \cdot x\right)\right\}, & x < v \cdot t, \\ 0, & x > v \cdot t, \end{cases} \tag{9}$$

$$T_g = \frac{\left(F_0^2 / N\right)}{\beta^2 \cdot \left(-1+\beta^2\right)} \cdot \cos^2 \Omega \cdot t \,. \tag{10}$$

У цьому випадку розв'язок не залежить від маси m, що є зрозумілим, оскільки $u^0(t) = 0$.

З виразів (8) та (10) видно, що сила опору рухові, яка є наслідком хвилеутворення, має дві складові, постійну та змінну у часі t на частоті 2Ω:

а) $v < c_0$

$$T_g = \frac{\beta}{\left(1-\beta^2\right)} \cdot \frac{\left(F_0^2 / N\right)}{\left(1+a_0^2\right)} \cdot \frac{\left(1+\cos 2\Omega \cdot t\right)}{2} \,; \tag{11}$$

б) $v > c_0$

$$T_g = \frac{\left(F_0^2 / N\right)}{\beta^2 \cdot \left(-1+\beta^2\right)} \cdot \frac{\left(1+\cos 2\Omega \cdot t\right)}{2} \,. \tag{12}$$

У системах з дисперсією ефект Доплера проявляє себе більш складним чином. Так, у випадку балки моделі Бернуллі-Ейлера дисперсійне рівняння (2) записується у виді:

$$\omega^2 - \alpha \cdot k^4 = 0\,, \tag{13}$$

де $\alpha = \sqrt{\left(E \cdot I\right) / \left(\rho \cdot F\right)}$; F – площа поперечного перерізу балки; I – момент інерції його повороту; ρ – питома щільність матеріалу; E – модуль пружності. Розв'язуючи (13) разом з (1), знаходимо наступний розв'язок задачі кінематики хвиль, який задовольняє умовам (3) та (4).

При докритичних швидкостях, коли $|v| < v_{кр} = 2 \cdot \sqrt{\alpha \cdot \Omega}$, рухоме джерело частоти Ω (вантажний візок мостового крану) випромінює одну гармонічну хвилю попереду себе (у $+x$ напрямку) з частотою (ω) і хвильовим вектором (k):

$$\omega = \frac{\left(v + \sqrt{v_{кр}^2 + v^2}\right)^2}{4 \cdot \alpha}, \quad k = \frac{\left(v + \sqrt{v_{кр}^2 + v^2}\right)}{2 \cdot \alpha} \tag{14}$$

і одну гармонічну хвилю позаду (у $-x$ напрямку) з частотою (ω) і хвильовим вектором (k):

$$\omega = \frac{\left(v - \sqrt{v_{кр}^2 + v^2}\right)^2}{4 \cdot \alpha}, \quad k = \frac{\left(v - \sqrt{v_{кр}^2 + v^2}\right)}{2 \cdot \alpha}. \tag{15}$$

Крім того зліва й справа від рухомого візка (джерела) виникають просторово неоднорідні хвилі: у області $x > v \cdot t$ з:

$$\omega = -\frac{\left(v + i \cdot \sqrt{v_{кр}^2 - v^2}\right)^2}{4 \cdot \alpha}, \quad k = -\frac{\left(v + i \cdot \sqrt{v_{кр}^2 - v^2}\right)}{2 \cdot \alpha}, \quad i^2 = -1, \tag{16}$$

а у області $x < v \cdot t$ з:

$$\omega = -\frac{\left(-v + i \cdot \sqrt{v_{кр}^2 - v^2}\right)^2}{4 \cdot \alpha}, \quad k = \frac{\left(-v + i \cdot \sqrt{v_{кр}^2 - v^2}\right)}{2 \cdot \alpha}. \tag{17}$$

Огинаючі цих хвиль експоненційно спадають при віддаленні від рухомого джерела (візка).

При закритичних швидкостях, коли $v > v_{кр}$, по кожну сторону від джерела (візка крану) збуджуються по дві хвилі. Замість супроводжуючих джерело неоднорідних хвиль виникають ті, які відводять від нього енергію (однорідні хвилі) з:

$$\omega = -\frac{\left(v + \sqrt{v^2 - v_{кр}^2}\right)^2}{4 \cdot \alpha}, \quad k = -\frac{\left(v + \sqrt{v^2 - v_{кр}^2}\right)}{2 \cdot \alpha} \tag{18}$$

у областях, де $x > v \cdot t$, та:

$$\omega = -\frac{\left(-v + \sqrt{v^2 - v_{кр}^2}\right)^2}{4 \cdot \alpha}, \quad k = -\frac{\left(-v + \sqrt{v^2 - v_{кр}^2}\right)}{2 \cdot \alpha} \tag{19}$$

у області $x < v \cdot t$.

Аналіз низки динамічних наслідків ефекту Доплера у балці моделі Бернуллі-Ейлера проведений у роботах [2-5].

Висновки. 1. Рухоме джерело постійної частоти (вантажний візок мостового крану), що рухається вподовж рейкового шляху (модель балки Бернуллі-Ейлера), збуджує у направляючій (тобто безпосередньо у балках рейкового шляху) коливання одночасно на кількох частотах, котрі можуть досить суттєво відрізнятись між собою. Звідси стає зрозумілим, чому широко відомий метод розрахунку динаміки систем (ПТМ) з рухливими навантаженнями, заснований на представленні розв'язку у вигляді ряду за власними формами коливань відповідної однорідної задачі [6, 7], має, взагалі кажучи, погану збіжність. Адже структура шуканого розв'язку не адекватна істинному процесу. 2. Для спрощення й одночасного підвищення точності інженерних розрахунків необхідно при конструюванні вимушених розв'язків закладати у їх структуру інформацію про зсув частот, отриману з попереднього розв'язку задачі кінематики хвиль. 3. Доцільно розраховувати величину сил тиску хвиль на об'єкт, що є носієм рухомого джерела (візка), тобто на рейковий шлях (балки) мостового крану. Це дозволить у стадії проектування точніше прогнозувати результуючу сил опору у рухомих контактах (візка з рейками). 4. Отримані у роботі результати можуть у подальшому слугувати для вдосконалення та уточнення існуючих інженерних методів розрахунку пружних систем ПТМ та механізмів як на стадіях їх проектування/конструювання, так і у режимах реальної експлуатації.

ЛІТЕРАТУРА

7. Весницкий А.И. Законы изменения энергии и импульса для одномерных систем с движущимися закреплениями и нагрузками / А.И. Весницкий, Л.Э. Каплан, Г.А. Уткин // Прикладная математика и механика. – 1983. – Т. 47, № 5. – С. 863-866.

8. Весницкий А.И. Излучение упругих волн в одномерных системах равномерно движущимися источниками / А.И. Весницкий, С.В. Крысов, С.А. Сьянов, Г.А. Уткин. – Горький, 1982. – (Препринт/НИРФИ; № 160). – 17 с.

9. Сьянов С.А. Вынужденные колебания экипажа, движущегося вдоль упругой направляющей / С.А. Сьянов // Проблемы машиностроения. – 1985. – Вып. 23. – С. 12-14.

10. Крысов С.В. Излучение упругих волн в одномерных системах движущимся источником / С.В. Крысов, С.А. Сьянов // Прикладная математика и техническая физика. – 1983. – № 1. – С. 150-153.

11. Крысов С.В. Силы сопротивления движению постоянных нагрузок вдоль упругих направляющих // С.В. Крысов, В.В. Холуев // Динамика систем: межвузовский сборник. – Горький: ГГУ, 1985. – С. 142-149.

12. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем / А.П. Филиппов. – М.: Машиностроение, 1970. – 734 с.

13. Кохманюк С.С. Колебания деформируемых систем при импульсных и подвижных нагрузках / С.С. Кохманюк, Е.Г. Янютин, Л.Г. Романенко. – К.: Наукова думка, 1980. – 232 с.

14. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний / В.Л. Бидерман. – М.: Высшая школа, 1980. – 408 с.

15. Весницкий А.И. Особенности проявления эффекта Доплера в одномерных упругих системах с дисперсией / А.И. Весницкий, С.В. Крысов // Волны и дифракции. – 1981. – Т. 2. – С. 291.

16. Весницкий А.И. Возбуждение колебаний в движущихся элементах конструкций / А.И. Весницкий, С.В. Крысов // Машиноведение. – 1983. – № 1. – С. 16, 17.

17. Мандельштамм Л.И. Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике: Сб. трудов / Л.И. Мандельштамм. – М.: Изд-во АН СССР. – 1947. – Т. 2. – 372 с.

УДК 621.867.133

В. С. ЛОВЕЙКІН, докт. техн. наук, О. Ю. ТКАЧЕНКО, асист.

Національний університет біоресурсів і природокористування України

АНАЛІЗ ДИНАМІКИ РУХУ СКРЕБКОВОГО КОНВЕЄРА З ДИНАМІЧНОЮ МЕХАНІЧНОЮ ХАРАКТЕРИСТИКОЮ ЕЛЕКТРОДВИГУНА

Постановка проблеми. В попередніх дослідженнях динаміки руху скребкового конвеєра опис роботи асинхронного двигуна проводився з використанням статичної механічної характеристики, яка описується рівнянням Клосса [3].

Динамічна механічна характеристика на відміну від статичної відображає зв'язок між миттєвими значеннями моменту і швидкості асинхронного двигуна в процесі переходу електроприводу з одного рівноважного стану в інший. Статична механічна характеристика виражає зв'язок між середніми значеннями моменту і швидкості в сталих режимах і є всього лише геометричним місцем точок рівноваги системи двигун – навантаження [7]. Тому важливо визначити, яку характеристику електродвигуна доцільніше використовувати при розрахунку динаміки руху скребкового конвеєра.

Аналіз публікацій. Моделювання електроприводу з використанням статичної механічної характеристики, яка описується рівнянням Клосса, описано у праці [6].