БУДІВНИЦТВО

УДК 539.3

Бараненко В.О.
ДВНЗ «Придніпровська державна академія будівництва та архітектури»

Волчок Д.Л.
ДВНЗ «Придніпровська державна академія будівництва та архітектури»

НЕТИПОВА ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТУВАННЯ ПРУЖНІХ БАЛОК В УМОВАХ НЕЧІТКОЇ ІНФОРМАЦІЇ

У статті розглянуто нетипову задачу оптимального проектування пружної балки в умовах нечіткого завдання цілі проектування й навантаження. Під час вирішення задачі використано апарат нечітких множин і графоаналітичний підхід. Наводяться два приклади, які ілюструють пропоновану процедуру розв'язання. Така постановка задачі може виникати на етапі концептуального проектування конструкції. Вона розширює різноманітність видів задач, що є в оптимальному проектуванні конструкцій.

Ключові слова: *оптимальне проектування, нечіткі множини, графоаналітичній підхід, принцип злиття, функція належності, балка.*

Постановка проблеми. У реальних задачах проектування та дослідження несучих конструкцій інформація про вихідні дані, умови, критерії тощо може бути повною або неповною. У першому випадку маємо справу з детермінованими задачами, у другому – із задачами в умовах невизначеності. Детермінованість пов'язана з категорією «чіткого» – повного знання про параметри, силові впливи на конструкцію тощо. Невизначеність же обумовлена, як правило, дефіцитом і незнанням, а також недостатньою надійністю інформації про силові фактори, їх місце прикладення, про механічні та геометричні характеристики, крайові умови, структуру тощо. У принципі з часом дефіцит інформації може бути зменшений і навіть зведений до нуля.

У теорії проектування конструкцій, у тому числі й оптимального, поряд із детермінованими постановками становить інтерес розгляд більш загальних задач, у яких були бураховані інформаційні ситуації, що володіють тим або іншим ступенем невизначеності щодо вихідних даних, поведінки середовища, цілей, обмежень тощо. Для їх формулювання й розв'язання потрібен відповідний математичний апарат, який апріорно включав би в себе можливість урахування тієї чи іншої невизначеності. Таким апаратом у механіці конструкцій при урахуванні випадкових факторів є теорія ймовірностей. У більшості робіт, у яких розглядається ймовірнісна природа завдань оптимального проектування й дослідження несучої здатності конструкцій, апріорно передбачаються відомими й достовірними статистичні описи випадкових параметрів завдання. Оцінки параметрів у цьому випадку отримують, як правило, в результаті обробки великої статистичної вибірки. У випадку малої статистичної вибірки доводиться приймати рішення про відносні оцінки вихідних даних в умовах обмеженої, суб'єктивної, нечіткої, розмитої інформації про можливі реалізації того чи іншого фактора, цілі, обмеження тощо.

Постановка завдання. У роботі розглядається нетипова задача оптимального проектування пружної балки в умовах нечіткого завдання цілі проектування й навантаження. До розв'язання задачі залучено апарат нечітких множин [1; 2] і графоаналітичний підхід.

Виклад основного матеріалу дослідження. Об'єкт оптимізації. Для пружної балки, що знаходиться під дією зосередженого навантаження , прикладеного на відстані від лівої опори (рис. 1), необхідно визначити такі характеристики

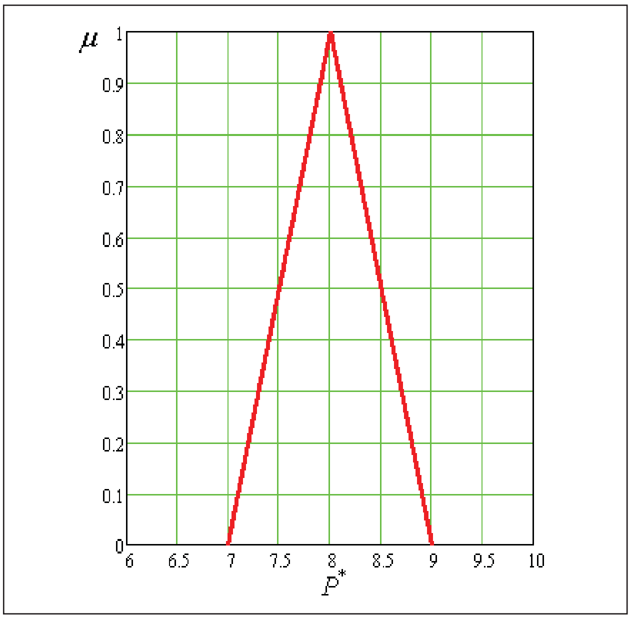

Рис. 2. Функція належності *P (P=P*·10⁴N)*

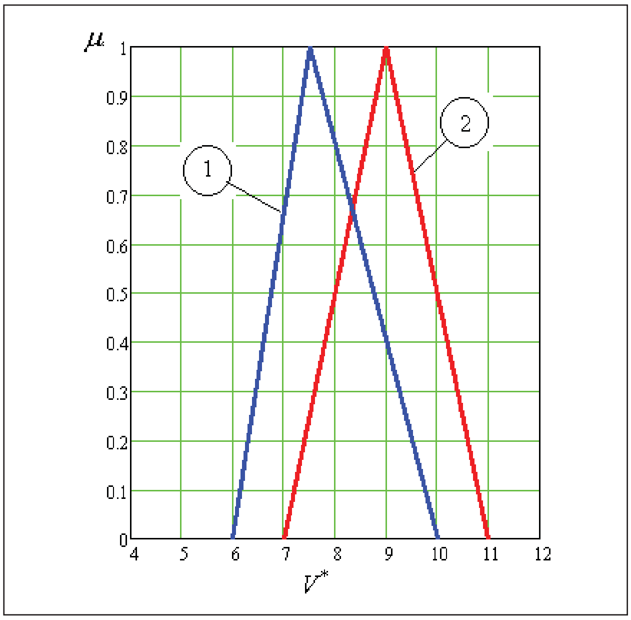

Рис. 3. Функція належності *V (V=V*·10⁴см³)*

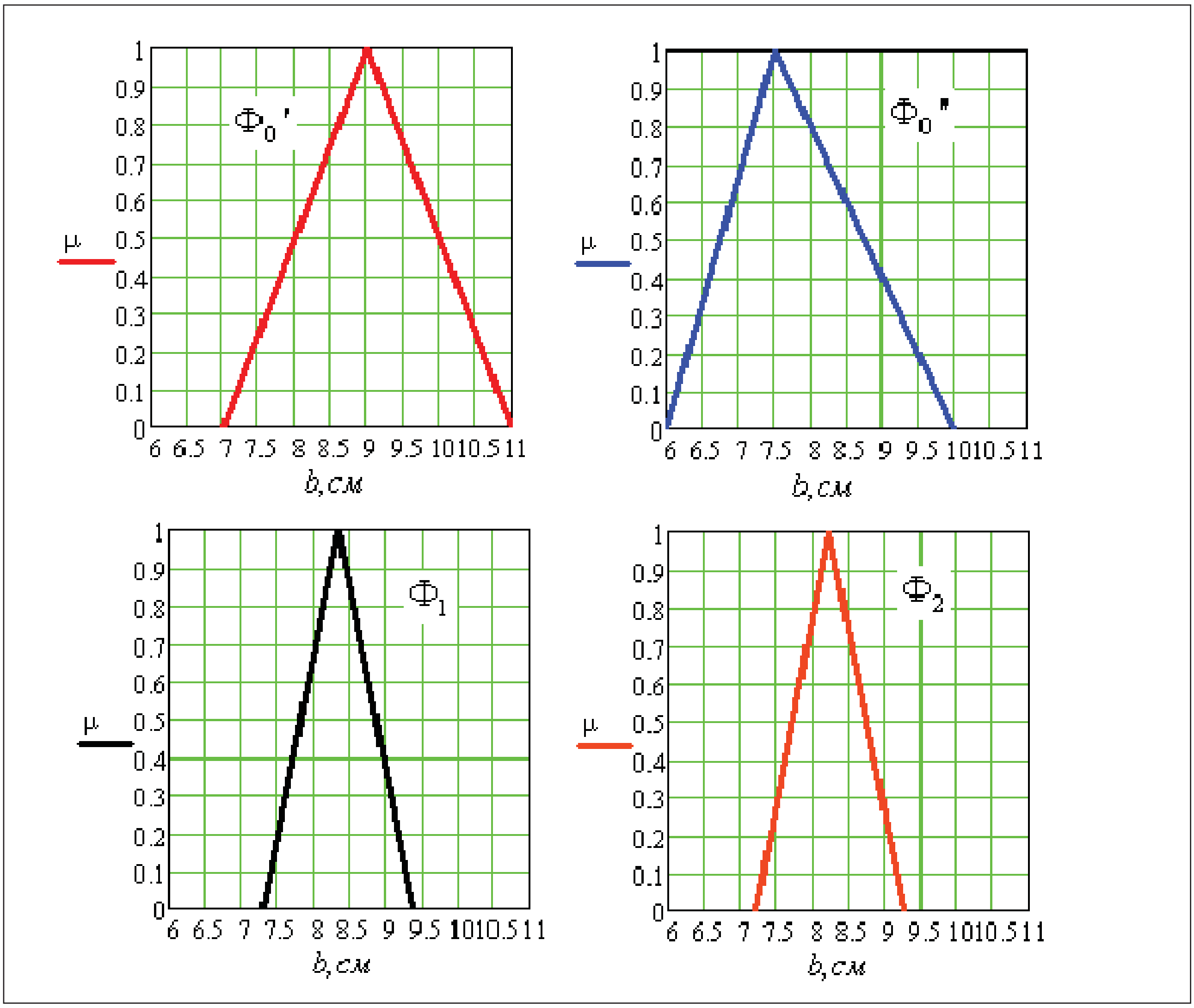

Рис. 4. Графічні зображення множини $Ф_0$, $Ф_1$, $Ф_2$

перетину, які задовольняли б умовам міцності, жорсткості й забезпечили завдання її обсягу *V*.

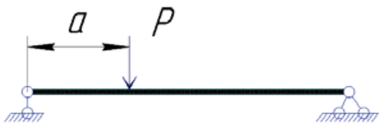

Рис. 1. Розрахункова схема балки

Передбачається, що навантаження P та обсяг V задаються нечітко: величина P «близька до числа P_0», «бажано, щоб величина обсягу V балки приблизно дорівнювала V_0». Нехай для визначеності розглядається балка прямокутного перетину ($b \times h$). Характеристики проекту: довжина l, відстань a, висота h, допустимі величини напружень $[\sigma]$ і максимальних переміщень $[y]$, модуль пружності E – детерміновані й задані.

Для такої конструкції запишемо умову міцності [3]

$$\sigma^{\max} \le [\sigma], \qquad (1)$$

де

$$\sigma^{\max} = \frac{6Pl\alpha\beta}{bh^2}; \quad a = \alpha l; \quad \beta = 1 - \alpha. \qquad (2)$$

Умова жорсткості – обмежені максимальні переміщення

$$y^{\max} \le [y], \qquad (3)$$

де

$$y^{\max} = \frac{Pl^3(\alpha\beta)^2}{3EI}. \qquad (4)$$

Потрібно знайти таке значення b, при якому виконувались би обмеження (1), (3), а цільова функція об'єму V максимально досягала б нечіткої величини V_0.

Фазифікація даних. За умовою, задача проектування має величини P і V нечіткими, тобто вони задаються за допомогою функцій належності. У теорії нечітких множин для опису таких інформаційних ситуацій: «приблизно», «близько», «близько до», «трохи більше», «трохи менше ніж» тощо – пропонується використовувати функцію належності трикутного, трапецієвидного й гауссова типу.

У роботі для реалізації проекту для опису сили $P(a_P, m_P, b_P)$ та обсягу $V(a_V, m_V, b_V)$ взяті функції належності трикутного виду

$$\mu_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{x - a_\xi}{m_\xi - a_\xi}, \ для \ a_\xi \le x < m_\xi \\ \dfrac{b_\xi - x}{b_\xi - m_\xi}, \ для \ m_\xi < x \le b_\xi \\ 1, \ для \ x = m_\xi \\ 0, \ для \ інших \ x \in R^+ \end{cases}, \qquad (5)$$

де ξ – нечітка множина; R^+ – множина додатних чисел.

Метод розв'язання. З визначення обсягу балки $V = bhl$ випливає

$$\Phi_0(V) = b = V / hl. \qquad (6)$$

Умова міцності (1) – (2) в граничному випадку дає

$$\Phi_1(P) = b = \frac{6Pl\alpha\beta}{h^2[\sigma]}. \qquad (7)$$

З умови жорсткості (3) – (4) для граничного випадку випливає, що

$$\Phi_2(P) = b = \frac{4Pl^3(\alpha\beta)^2}{Eh^3[y]}. \qquad (8)$$

Величини Φ_0, Φ_1, Φ_2 є числовими функціями нечітких параметрів V і P і, відповідно, утворюють нечіткі множини з функціями належності

$$\mu_{\Phi 0}(x), \ \mu_{\Phi 1}(x), \ \mu_{\Phi 2}(x). \qquad (9)$$

Для побудови нечітких множин Φ_0, Φ_1, Φ_2 з використанням функції належності скористаємося α – рівневим підходом теорії нечітких множин. Множини Φ_0, Φ_1, Φ_2, що отримані на основі (6), (7), (8), є опуклими множинами [2], оскільки задані $\mu_{\xi=P}(x)$ і $\mu_{\xi=V}(x)$ є опуклі.

На основі вищесказаного сформулюємо таку математичну модель оптимізації:

$$\mu^* = \arg\left\{\sup_x Q\right\}, \qquad (10)$$

де множина Q є

$$Q = (\Phi_0 \cap \Phi_1) \cup (\Phi_0 \cap \Phi_2) \qquad (11)$$

або в розгорнутому вигляді

$$\mu_Q^* = \max_{x \in X}\left(\min\left(\mu_{\Phi 0}(x); \mu_{\Phi 1}(x)\right); \min\left(\mu_{\Phi 0}(x); \mu_{\Phi 2}(x)\right)\right). \qquad (12)$$

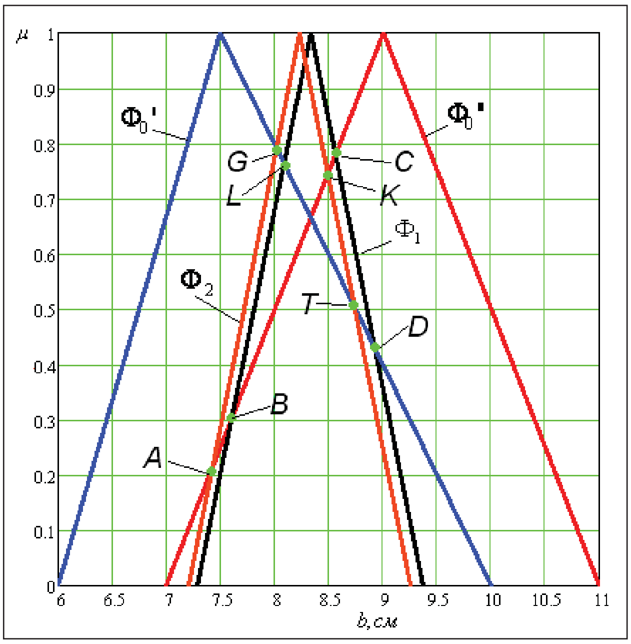

Рис. 5. Розв'язання задачі для двох прикладів

Нечітка субнормальна множина Q є множина точок K, в яких відбувся перетин (11). І тоді вихідна задача оптимізації зводиться до моделі

$$\mu^* = \max \mu_Q(x)\ ;\ x \in K; \qquad (13)$$

Ілюстрація методу розв'язання. Ураховуючи невелику вимірність задачі, пропонований тут підхід реалізовано графічним способом при таких даних:

$l = 500$ см; $h = 20$ см; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $[\sigma] = 160$ МПа; $[y] = 1.5$ см; $a = l / 3$.

Приклад 1. Нехай задано: $\tilde{\tilde{P}} = 8 \cdot 10^4$ Н, $\tilde{\tilde{V}} = 7.5 \cdot 10^4\ см^3$ тобто $a_P = 7 \cdot 10^4$, $b_p = 9 \cdot 10^4$ і $a_v = 6 \cdot 10^4$. $m_v = 7.5 \cdot 10^4$, $b_v = 10 \cdot 10^4$. Фазифікацію цих даних виконаємо відповідно до визначення (5). Графічні ілюстрації функції належності величин $\tilde{\tilde{P}}$ і $\tilde{\tilde{V}}$ (для першого і другого прикладів) подано на рисунках 2 і 3.

За допомогою співвідношень (6)–(8) побудуємо множини Φ_0, Φ_1, Φ_2, графічні зображення яких подано на рисунку 4.

Злиття множин Φ_0, Φ_1, Φ_2. Множини є опуклими, і тому множина Q є також опуклою. У цьому випадку має місце «злиття» цілі та обмежень, які входять в (11) однаковим чином, що доводить твердження про тотожність цілі та обмежень у задачі прийняття рішень у розпливчатих умовах [1].

Графічне зображення злиття множин Φ_0, Φ_1, Φ_2 показано на рисунку 5.

Із цього рисунка видно, які точки утворюються в результаті перетину множин.

Точки є точками перетину множин нечіткої цілі й обмеження (3), тобто , для яких

Точки *(G, T)* є точками перетину нечітких множин цілей та обмежень (1), тобто $(G, T) = \Phi'_0 \cap \Phi_1$, для яких $\mu_D = 0.43$; $\mu_L = 0.76$.

Визначимо $\min(\mu_G; \mu_T) = 0.52$; $\min(\mu_D; \mu_L) = 0.43$; на основі (13) маємо $\mu^* = \max(0.52; 0.43) = 0.52$. Значенню $\mu^* = 0.52$ на рисунку 5 відповідає точка T перетину множин $\Phi'_0 \cap \Phi_2$ і $b = 8.7 см$.

На рисунку 2 значенню $\mu^* = 0.52$ відповідає: а) $P^* = 76 кН$, а на рисунку 3 відповідає $V^* = 6.8 \cdot 10^4 см^3$; б) $P^* = 84 кН$ і $V^* = 8.8 \cdot 10^4 см^3$

У результаті маємо два розв'язки:

а) $b = 8.7 см$; $P^* = 76 кН$; $V^* = 6.9 \cdot 10^4 см^3$;

б) $b = 8.7 см$; $P^* = 84 кН$; $V^* = 8.8 \cdot 10^4 см^3$.

Аналіз розв'язків. Виконуючи аналіз отриманих результатів, бачимо, що підстановка $b = 8.7 см$ і $P^* = 76 кН$ в умови (1) – (4) не порушує їх: $\sigma = 145.6 < 160 МПа$; $y = 1,35 < 1.5$ см.

Якщо підставити другий розв'язок $b = 8.7 см$; $P^* = 84 кН$ в умови (1)–(4), то видно, що порушується умова міцності $\sigma = 160.9 > 160 МПа$; а умова жорсткості $y = 1,49 < 1.5$ см не порушується.

Отже, в результаті маємо розв'язок поставленої задачі: дійсні значення $b = 8.7 см$; $P^* = 76 кН$; $V^* = 6.9 \cdot 10^4 см^3$.

Приклад 2. У цьому прикладі припускається, що $\tilde{\tilde{V}} = 9 \cdot 10^4\ см^3$ з $a_V = 7 \cdot 10^4$, $m_V = 9 \cdot 10^4$, $b_V = 11 \cdot 10^4$. Останні числові дані такі, як у першому прикладі. У цьому випадку множина цільової функції на рисунках 4 і 5 позначено через Φ''_0.

За аналогією першого числового експерименту маємо:

$(A, K) = \Phi''_0 \cap \Phi_2$, для яких $\mu_A = 0.22$; $\mu_K = 0.75$, а $\min(\mu_A; \mu_K) = 0.22$.

Точки (B, C) є результатом перетину множин, тобто $(B, C) = \Phi''_0 \cap \Phi_1$, для яких $\mu_B = 0.31$; $\mu_C = 0.78$. Тоді $\min(\mu_B; \mu_C) = 0.31$.

Величина $\mu^* = \max(0.31, 0.22) = 0.31$.

Із рисунку 5 для $\mu^* = 0.31$ маємо $b = 7.75\ см$.

а) $P^* = 73.8 кН$; $V^* = 7.85 \cdot 10^4 см^3$; б) $P^* = 86.2 кН$; $V^* = 10,15 \cdot 10^4 см^3$;

Аналіз результатів. Випадок «а» дає $\sigma^{\max} = 158.7 < 160 МПа$ й $y = 1,47 < 1.5$. Умови задачі не порушуються. У випадку «б» маємо $\sigma^{\max} = 185.4 > 160 МПа$ й $y = 1,72 > 1.5$. Умови міцності й жорсткості тут порушуються. Отже, шуканий результат у другому прикладі є $b = 7.75 см$; $P^* = 73.8 кН$; $V^* = 7.85 \cdot 10^4 см^3$.

Висновки. Оптимізаційна задача, яка надана в роботі, є нетиповою, тому що в класичних задачах задається min чи max деякої фізичної характеристики конструкції. Інформаційна ситуація щодо вихідних даних: навантаження та обсяг матеріалу – задається нечітко. Розв'язання такої задачі отримано в межах теорії нечітких множин. За допомогою пропонованого підходу можливий аналіз вихідних даних і їх впливу на остаточний результат. Постановка задачі може виникати на етапі концептуального проектування. Вона розширює різноманітність видів задач, що є в оптимальному проектуванні конструкцій.

Список літератури:

1. Bellman R.E., Zadeh L.A. Decision – Making in Fuzzy Environment. Management Science. 1970. V. 17. № 4. P. 141–164.

2. D. Rutkowska, M. Pilinski, L. Rutkowski Science neurowe, algorytmy genetyczne i system rozmyte. Warsaw: Widawnictwo Naukowe PWN, 1999. 410 p.

3. Тимошенко С. Сопротивление материалов. Москва: Физматгиз, 1960. Т. 1. 379 с.

НЕТИПИЧНАЯ ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ УПРУГИХ БАЛОК В УСЛОВИЯХ НЕЧЕТКОЙ ИНФОРМАЦИИ

В статье рассмотрена нетипичная задача оптимального проектирования упругой балки в условиях нечёткого задания цели проектирования и нагрузки. К решению задачи привлечён аппарат нечётких множеств и графоаналитический подход. Приводится два примера, иллюстрирующие предлагаемую процедуру решения. Такая постановка задачи может возникать на этапе концептуального проектирования конструкции. Она расширяет разнообразие видов задач, имеющихся в оптимальном проектировании конструкций.

Ключевые слова: *оптимальное проектирование, нечеткие множества, графоаналитический подход, принцип слияния, функция принадлежности, балка.*

ATYPICAL PROBLEM OF OPTIMAL DESIGN OF ELASTIC BEAMS UNDER CONDITIONS OF FUZZY INFORMATION

An atypical problem of optimal design of an elastic beam under conditions of a fuzzy specification of the design goal and load is considered. The apparatus of fuzzy sets and the graph-analytical approach are involved in solving the problem. Two examples which illustrate the proposed decision procedure are given. This formulation of the problem can arise at the stage of conceptual design. There is expanded the variety of types of tasks available in the optimal design of structures.

Key words: *optimal design, fuzzy sets, graph-analytic approach, merge principle, membership function, beam.*