УДК 510.6:004

Д.Э. Ситников[1], П.Э. Ситникова[2], А.И. Коваленко[1]

[1] *Харьковская государственная академия культуры, Харьков*
[2] *Харьковский гуманитарный университет „Народная украинская академия", Харьков*

ОБ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ ЛОГИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕИЗВЕСТНЫМИ БИНАРНЫМИ ОТНОШЕНИЯМИ В ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЕ

В статье изложены некоторые аспекты поиска неизвестных отношений в интеллектуальных информационных системах. Ввиду сложности проблемы класс отношений ограничен бинарными предикатами, а множество допустимых операций – операциями булевой алгебры и дополнительной операцией перестановки переменных. Исследованы произвольные уравнения с бинарными отношениями и получены критерии существования решения таких уравнений. Полученные результаты могут быть использованы для построения логических выводов в интеллектуальных системах разнообразного назначения, а также для извлечения знаний в соответствии с заданными логическими критериями из баз данных и знаний.

Ключевые слова: *информационная система, алгебра конечных предикатов, параметрические уравнения, булева алгебра.*

Введение

Развитие процесса накопления знаний в настоящее время, использование компьютеров во всех сферах производства и научной деятельности требует дальнейшей разработки информационных систем разнообразного назначения.

Информационная система представляет собой набор технических, программных и информационных средств, служащих для хранения, обработки и отображения информации различного назначения. Представление знаний в такой системе связано с решением задач формализации знаний. Для этого разрабатываются специальные модели представления и языки описания знаний, выделяются их различные типы.

Цель разработчиков информационных систем заключается в создании принципиально новых технологий для их проектирования. Современные методы решения слабоструктурированных задач, данные которых описаны некоторыми признаками, основаны на методах искусственного интеллекта. Важную роль при разработке математического обеспечения информационных систем играют реляционные и логические способы представления знаний.

Одним из наиболее важных способов представления знаний является представление знаний средствами логики предикатов первого порядка. Этот способ является основой языка «Пролог». В основе такого представления лежит язык математической логики, позволяющий формально описывать понятия и связи между ними.

Универсальным математическим средством для описания конечных информационных массивов является алгебра конечных предикатов [1 – 3].

Цель статьи: исследование логических уравнений с неизвестными бинарными отношениями в информационной системе, а также определение критерия существования (и единственности) решения уравнения в общем виде.

Определение условий существования решения уравнений с бинарными конечными предикатами

Элементами булевой алгебры могут быть бинарные предикаты, однако алгебры бинарных предикатов помимо операций конъюнкции, дизъюнкции и отрицания могут содержать и другие операции, например, перестановку переменных, которую мы будем называть также операцией обращения. Если к предикату $X(x, y)$ применить операцию обращения, получим $X(y, x)$. В дальнейшем будем предполагать, что предикаты заданы на конечных множествах.

Рассмотрим уравнение вида

$$f(A_1, A_2, ..., A_m, X, X') = 1, \qquad (1)$$

где X – неизвестный бинарный предикат; f – булева форма (функция, представляющая собой суперпозицию операций конъюнкции, дизъюнкции и отрицания); «'» –операция обращения (перестановки переменных); $A_1, A_2, ..., A_m$ – известные бинарные предикаты, выступающие в роли параметров.

Уравнение (1) можно привести к виду

$$A_{11}XX' \vee A_{10}X\bar{X}' \vee A_{01}\bar{X}X' \vee A_{00}\bar{X}\ \bar{X}' = 1, \qquad (2)$$

где

$$A_{11} = f(A_1, A_2, ..., A_m, 1, 1),$$
$$A_{10} = f(A_1, A_2, ..., A_m, 1, 0),$$
$$A_{01} = f(A_1, A_2, ..., A_m, 0, 1),$$
$$A_{00} = f(A_1, A_2, ..., A_m, 0, 0).$$

Произведя операцию обращения над обеими частями равенства (1) и учитывая, что для любых бинарных предикатов A и B $(AB)' = A'B'$, $(A \vee B)' = A' \vee B'$, $(A')' = A$, $(\bar{A}') = \bar{A}'$, получим следующее уравнение:

$$A'_{11}XX' \vee A'_{01}X\bar{X}' \vee A'_{10}\bar{X}X' \vee A'_{00}\bar{X}\,\bar{X}' = 1. \quad (3)$$

Применив операцию конъюнкции к левым и правым частям уравнений (2) и (3), придем к уравнению

$$\begin{gathered} A_{11}A'_{11}XX' \vee A_{10}A'_{01}X\bar{X}' \vee \\ A_{01}A'_{10}\bar{X}X' \vee A_{00}A'_{00}\bar{X}\,\bar{X}' = 1. \end{gathered} \quad (4)$$

Уравнение (4) является следствием уравнений (2) и (3), а уравнения (2) и (3) являются следствиями (4), то есть (2), (3) и (4) равносильны. Действительно, пусть предикат X является решением уравнения (4). Тогда (4) обращается в тождество. Можно показать, что из $\bigvee_{i=1}^{n} a_i x$ следует $\bigvee_{i=1}^{n} a_i = 1$. Поэтому можно утверждать, что для данного X выполняются равенства (2) и (3). Мы показали, что любое решение уравнения (4) является также решением для (2) и (3). Из свойств операции обращения непосредственно следует равносильность уравнений (2) и (3). Но, так как (4) получено путем конъюнкции двух равносильных уравнений, то уравнения (2), (3) и (4) равносильны.

Если существует хотя бы одно решение уравнения (4), то, очевидно, выполняется условие

$$A_{11}A'_{11} \vee A_{10}A'_{01} \vee A_{01}A'_{10} \vee A_{00}A'_{00} = 1. \quad (5)$$

Отсюда, а также из равносильности (2) и (4), вытекает

Утверждение 1. Условие (5) является необходимым для существования решения уравнения (2).

От уравнений с конечными предикатами можно перейти к уравнениям характеристик. Тогда (2) можно переписать в виде системы уравнений:

$$\begin{gathered} a_{11}^{ij}x_{ij}x_{ji} \vee a_{10}^{ij}x_{ij}\bar{x}_{ji} \vee a_{01}^{ij}\bar{x}_{ij}x_{ji} \vee a_{00}^{ij}\bar{x}_{ij}\bar{x}_{ji} = 1, \\ i, j = 1, 2, .., p, \end{gathered} \quad (6)$$

где p – мощность множества, на котором заданы предикаты, $a_{11}^{ij} = A_{11}(a_i, a_j)$, $a_{10}^{ij} = A_{10}(a_i, a_j)$, $a_{01}^{ij} = A_{01}(a_i, a_j)$, $a_{00}^{ij} = A_{00}(a_i, a_j)$, $x_{ij} = X(a_i, a_j)$.

Если $i = j$, уравнение (6) будет выглядеть следующим образом:

$$a_{11}^{ii}x_{ii} \vee \bar{a}_{00}^{ii}\bar{x}_{ii} = 1, i = 1, 2, ..., p. \quad (7)$$

Если положить $i < j$, то остальные уравнения запишутся так:

$$\begin{gathered} a_{11}^{ij}x_{ij}x_{ji} \vee a_{10}^{ij}x_{ij}\bar{x}_{ji} \vee a_{01}^{ij}\bar{x}_{ij}x_{ji} \vee a_{00}^{ij}\bar{x}_{ij}\bar{x}_{ji} = 1, \\ a_{11}^{ji}x_{ij}x_{ji} \vee a_{10}^{ji}x_{ij}\bar{x}_{ji} \vee a_{01}^{ji}\bar{x}_{ij}x_{ji} \vee a_{00}^{ji}\bar{x}_{ij}\bar{x}_{ji} = 1, \\ i, j = 1, 2, .., p, \quad i < j. \end{gathered} \quad (8)$$

Очевидно, что для любых различных индексов i уравнения вида (7) независимы, то есть не содержат общих переменных. Также можно утверждать, что для любых различных пар индексов (i, j), где $i < j$, пары уравнений вида (8) независимы. Уравнения (7) и (8) при любых значениях индексов имеют одинаковую структуру. Поэтому их решение сводится к решению уравнений следующего вида:

$$\begin{gathered} a_{11}x_1x_2 \vee a_{10}x_1\bar{x}_2 \vee \\ \vee a_{01}\bar{x}_1x_2 \vee a_{00}\bar{x}_1\bar{x}_2 = 1, \\ a'_{11}x_1x_2 \vee a'_{01}x_1\bar{x}_2 \vee \\ \vee a'_{10}\bar{x}_1x_2 \vee a'_{00}\bar{x}_1\bar{x}_2 = 1, \end{gathered} \quad (9)$$

а также

$$a_{11}^0 x \vee a_{00}^0 \bar{x} = 1, \quad (10)$$

где $a_{11}, a_{10}, a_{01}, a_{00}, a_{11}^1, a_{01}^1, a_{00}^1, a_{11}^0, a_{00}^0$ – некоторые параметры, x_1, x_2, x – переменные.

Система (9) равносильна следующему уравнению:

$$\begin{gathered} a_{11}a'_{11}x_1x_2 \vee a_{10}a'_{01}x_1\bar{x}_2 \vee \\ a_{01}a'_{10}\bar{x}_1x_2 \vee a_{00}a'_{00}\bar{x}_1\bar{x}_2 = 1. \end{gathered} \quad (11)$$

Очевидно, что уравнения (10) и (11) независимы: переменные, входящие в одно из них, не входят в другое. Поэтому можно исследовать каждое из них в отдельности.

Прежде всего, нас будет интересовать вопрос о существовании решений уравнений (10) и (11). Рассмотрим уравнение (10). Решение (10) существует, если и только если

$$a_{11}^0 \vee a_{00}^0 = 1. \quad (12)$$

Решение уравнения (11), а значит и системы (9), существует, если и только если выполняется условие

$$a_{11}a'_{11} \vee a_{10}a'_{01} \vee a_{01}a'_{10} \vee a_{00}a'_{00} = 1. \quad (13)$$

Таким образом, критерий существования решения уравнения (2) можно записать в следующем виде:

если $x = y$, то

$$A_{11}(x, y) \vee A_{00}(x, y) = 1,$$

если $x \neq y$, то

$$\begin{gathered} A_{11}(x, y)A_{11}(y, x) \vee A_{10}(x, y)A_{01}(y, x) \vee \\ A_{01}(x, y)A_{10}(y, x) \vee A_{00}(x, y)A_{00}(y, x) = 1. \end{gathered}$$

Используя предикат равенства $D(x, y)$, этот критерий можно представить в виде двух логических формул:

$$\forall x \forall y (D(x, y) \to A_{11}(x, y) \vee A_{00}(x, y)), \quad (14)$$

$$\begin{gathered} \forall x \forall y (\neg D(x, y) \to A_{11}(x, y)A_{11}(y, x) \\ \vee A_{10}(x, y)A_{01}(y, x) \vee \\ \vee A_{01}(x, y)A_{10}(y, x) \vee A_{00}(x, y)A_{00}(y, x)). \end{gathered} \quad (15)$$

Нетрудно видеть, что данный критерий можно записать без использования предиката равенства:

$$\forall x(A_{11}(x,x) \vee A_{00}(x,x)), \qquad (16)$$

$$\forall x \forall y(A_{11}(x,y)A_{11}(y,x) \vee A_{10}(x,y)A_{01}(y,x) \vee \vee A_{01}(x,y)A_{10}(y,x) \vee A_{00}(x,y)A_{00}(y,x)). \qquad (17)$$

Действительно, условие (16) равносильно (14), а (17) следует из (14) и (15), кроме того, из (170 следует (15). Мы показали, что с одной стороны, 914) и (15) влечет (16) и (17), с другой стороны, (6) и (7) влечет (4) и (5). Значит (4) и (5) равносильно (6) и (7) Таким образом, справедливо

Утверждение 2. Решение уравнения (2) существует, если и только если выполняются условия (4), (5) или (6), (7).

Рассмотрим пример. Пусть бинарные предикаты заданы на конечном множестве $M = \{a, b\}$, причем

$$A_{11}(x,y) = x^a y^a, A_{10}(x,y) = x^a y^b,$$

$$A_{01}(x,y) = x^b y^a, A_{00}(x,y) = x^b y^b.$$

Требуется ответить на вопрос, имеет ли уравнение (2) хотя бы одно решение при данных значениях параметров $A_{11}, A_{10}, A_{01}, A_{00}$? Воспользуется критерием (6), (7) существования решения уравнения (2). Проверим выполнения условия (6). Так как $A_{11}(x,x) = x^a$, $A_{00}(x,x) = x^b$, то очевидно, для любого x $A_{11}(x,x) \vee A_{00}(x,x) = x^a \vee x^b = 1$. Остается проверить выполнение условия (7). Очевидно,

$$A_{11}(y,x) = A_{11}(x,y), A_{01}(y,x) = = A_{10}(x,y), A_{10}(y,x) = A_{01}(x,y), A_{00}(y,x) = = A_{00}(x,y).$$

Следовательно,

$$A_{11}(x,y)A_{11}(y,x) \vee A_{01}(x,y)A_{10}(y,x) \vee \vee A_{10}(x,y)A_{01}(y,x) \vee A_{00}(x,y)A_{00}(y,x) = = A_{11}(x,y) \vee A_{10}(x,y) \vee A_{01}(x,y) \vee A_{00}(x,y) = = x^a y^a \vee x^a y^b \vee x^b y^a \vee x^b y^b = 1.$$

Мы показали выполнение условий (6), (7) , значит, при данных значениях параметров A_{11}, A_{10}, A_{01}, A_{00} решение (2) существует. Однако даже незначительное изменение исходных данных может повлиять на выполнение критерия (6), (7) . Например, если положить

$$A_{11}(x,y) = x^a y^a, A_{10}(x,y) = x^b y^b,$$

$$A_{01}(x,y) = x^b y^a, A_{00}(x,y) = x^a y^b,$$

то подстановка предикатов $A_{11}(x,y)$ и $A_{oo}(x,y)$ в (2) даст

$$A_{11}(x,x) \vee A_{00}(x,x) = x^a \vee x^a x^b = x^a \neq 1.$$

Следовательно, в этом случае, уравнение (2) решений не имеет.

Выводы

В статье разработаны методы получения общего решения уравнений булевой алгебры с параметрами. Рассмотрены классы отношений, описанные бинарными предикатами, включающими операции булевой алгебры и операции перестановки переменных. Полученные результаты могут быть использованы для построения логических выводов в базах знаний и интеллектуальных информационных системах, а также при решении задач распознавания и классификации объектов.

Список литературы

1. *Шабанов-Кушнаренко Ю.П. Теория интеллекта. Математические средства / Ю.П. Шабанов-Кушнаренко. – Х.: Вища шк. Изд-во при Харьк. ун-те, 1984. – 144 с.*
2. *Шабанов-Кушнаренко Ю.П. Теория интеллекта. Технические средства / Ю.П. Шабанов-Кушнаренко. – Х.: Вища шк. 1986. – 134 с.*
3. *Шабанов-Кушнаренко Ю.П. Теория интеллекта. Проблемы и перспективы / Ю.П. Шабанов-Кушнаренко. – Х.: Вища шк., 1987. – 160 с.*

Поступила в редколлегию 7.12.2010

Рецензент: д-р техн. наук, проф. И.В. Гребенник, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.

ПРО УМОВИ ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛОГІЧНИХ РІВНЯНЬ ІЗ НЕВІДОМИМИ БІНАРНИМИ ВІДНОСИНАМИ

Д.Е. Ситніков, П.Е. Ситнікова, А.І. Коваленко

Досліджено логічні рівняння з невідомими бінарними відносинами в інформаційних системах зі складною логічною структурою. Виведено умови існування рішень параметричних рівнянь з невідомими відносинами в інформаційних системах. Отримані результати можуть бути використані для побудування логічних висновків в інтелектуальних системах та системах управління базами знань.

***Ключові слова:** інформаційна система, алгебра кінцевих предикатів, параметричні рівняння, булева алгебра.*

ON THE EXISTENCE OF SOLUTIONS TO LOGICAL EQUATIONS WITH UNKNOWN BINARY RELATIONS IN AN INFORMATION SYSTEM

D.E. Sitnikov, P.E.Sitnikova, A.I. Kovalenko

Logical equations with unknown binary relations in information systems having a complicated logic structure have been investigated. Conditions for the existence of solutions to parametric equations with unknown relations in information systems have been obtained. The results obtained can be used for building logic deductions in intelligent systems and database management systems.

***Keywords:** informative system, algebra of eventual predicates, self-reactance equalizations, Boolean algebra.*