53.088.23

Ю.С. Курской

Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков

ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕРВАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ОЦЕНКИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ В СЛОЖНЫХ СИСТЕМАХ

В статье получила развитие теоретическая основа нелинейной метрологии. Рассмотрена задача определения энтропии Шеннона и энтропийного интервала неопределенности результатов измерения динамических переменных нелинейных динамических систем. Показано, что корректность решение этой задачи зависит от правильности определения плотности распределения вероятности измеряемой величины, меняющейся по сложному нелинейному закону. Для определения плотности распределения предложено использовать методы интервального математического анализа, в частности метод гистограммного распределения. Описаны принципы и выражения для определения плотности вероятности, энтропии и энтропийного интервала неопределенности результатов измерения.

Ключевые слова: *неопределенность измерения, энтропия Шеннона, нелинейные динамические системы, интервальный анализ.*

Вступление

Применение существующих метрологических методов для измерения характеристик сложных систем требует ответа на вопрос о соответствии математических и физических основ классической метрологии процессам, происходящим в сложных системах.

Исследования показали, что Руководство по выражению неопределенности измерений [1] имеет ограниченное применение, например, в том случае, если объект измерения динамичен, а его динамика имеет сложный характер [2]. К таким объектам можно отнести электрические сети, лазеры, биологические и социальные системы, живые организмы. Несмотря на различное происхождение, эти объекты имеют ярко выраженные общие свойства, позволяющие использовать при их исследовании единые подходы. Их характеристики классифицируются как динамические переменные (ДП), меняющиеся по нелинейному закону. Эти объекты являются открытыми системами, на состояние которых влияет окружающая среда даже шумы. Прогнозировать значения подобных ДП с заданной точностью крайне сложно или невозможно вовсе.

Такие объекты можно отнести к нелинейным динамическим системам (НДС). Для их изучения применяют междисциплинарные теории, такие как теория динамического хаоса, теория информации, теория открытых систем и теория фракталов. Очевидна обоснованность выбора базисных принципов этих теорий для создания новых метрологических подходов для проведения измерений ДП НДС. Новые метрологические подходы могут стать основой целого направления нелинейной метрологии.

В развитие этой темы уже разработаны модели измерения [3] и анализа результатов измерений [4] ДП НДС. Предложены фрактальные, временные и энтропийные шкалы как инструмент оценки состояния НДС [5, 6].

Разработана модель измерения состояния здоровья человека, как открытой НДС с функцией самоорганизации [8].

Измерения в НДС требуют выбора подходящего математического аппарата. Традиционно динамические системы изучались с использованием классического математического анализа, аппарата дифференциальных уравнений в обыкновенных и частных производных.

В случае НДС этот математический нструментарий эффективен не всегда. Например, классический анализ предполагает, что производные имеют порядки, выражаемые целыми числами. При этом измерение ДП ряда НДС показывает наличие степенных зависимостей от времени и частоты с нецелыми показателями степеней [8, 9].

Для исследования структур с дробным порядком применяют фрактальный и интервальный методы анализа. Фрактальный анализ усрешно применяется для анализа временный рядов пезультатов измерения [10]. Основная идея интервального анализа состоит в замене арифметических операций и вещественных функций интервальными операциями и функциями, преобразующими интервалы, содержащие эти числа. Ценность интервальных решений заключается в том, что они содержат точные решения исходных задач [9]

Цель работы заключается в применении методов интервального анализа для оценки неопределенности измерений ДП НДС.

Результаты исследования

Ключевым понятием для оценки результатов измерения является доверительная вероятность α, значение которой назначают исходя из закона распределения:

$\alpha = 1$ –для равномерного распределения;

$\alpha = 0,95$ –для нормального распределения;

$\alpha = 0,9$ –для распределения Лапласа;

$\alpha = 0,8$ –для распределения Коши [11].

Чем более сложна динамика объекта измерения, тем меньшее значение назначается для α. При измерениях в сложных системах с неизвестным законом распределения ДП волевое назначение доверительной вероятности неприемлемо.

Для оценки неопределенности измерения в таких системах может быть применен информационный подход [11].

Основополагающим понятием теории информации и информационного подхода является энтропия Шеннона H. Она является функцией состояния системы, ее величина характеризует качество измерительного эксперимента и меру неопределенности значения X ДП. Для систем, которые могут находиться в состояниях X с плотностью распределения вероятност $p = p(X)$, энтропия Шеннона определяется выражением [12, 13]:

$$H = -\sum_i p(X_i)\ln p(X_i) \qquad (1)$$

Из (1) следует, что энтропия Шеннона принимает тем большие значения, чем меньшие значения принимает плотность распределения $p = p(X)$, при $p(X) \to 1 \quad H \to 0$. Согласно информационному подходу задача измерительного эксперимента сводится к уменьшению значения энтропии, то есть к уменьшению неопределенности знания об измеряемой величине.

Формальным определением энтропийного значения результата измерения есть выражение:

$$H = \ln u_H,$$

где u_H –энтропийный интервал неопределенности, Отсюда получим выражение:

$$u_H = \exp H. \qquad (2)$$

Энтропийное значение неопределенности связано со среднеквадратическим отклонением σ выражением $k = u_H / 2\sigma$, из которого, зная σ, можно определить значения для u_H и H:

$$u_H = 2ks, \quad H = \ln 2ks;$$

$$u_H = 2ku_A, \quad H = \ln 2ku_A,$$

где k –энтропийный коэффициент распределения; u_A –неопределенность измерения по типу «А» [1].

Размер энтропийного интервала неопределенности u_H может быть вычислен строго математически, без необходимости назначения доверительной вероятности α, что повышает доверие к результатам измерения. Его определение требует определения энтропии.

Энтропия Шеннона (1) рассматривается как ключевой элемент моделей измерения и анализа результатов измерения ДП НДС [3, 4]. Она является интегральной характеристикой, содержащей информацию о степени отклонения НДС от состояния равновесия. Основной трудностью при ее определении является определение закона распределения изучаемой величины. Для решения этой задачи предлагается использовать подходы интервального анализа, а именно гистограммную арифметику [9].

Пусть в результате измерения ДП X_i получены вещественные значения в интервале $\left[X_i^{min}, X_i^{max}\right]$, то есть X_i является интервальным числом. Плотность распределения его значений задается кусочно-постоянной функцией $p_i(x)$: результаты измерений X_i образуют интервалы постоянных значений функции $p_i(x)$. Такие случайные величины называются гистограммными числами (гистограммы). Требуется определить функцию плотности вероятности p_X величины X_i с заданной точностью в классе кусочно-постоянных функций – гистограмм.

Использование гистограммного выражения ДП позволяет определить наиболее вероятные участки попадания неизвестных X_i [9].

Интервал значений $\left[X_i^{min}, X_i^{max}\right]$ разобьем на *K* частей размера $d_k, k = 1,...,K$. Разбиение выполняется таким образом, что бы на отдельном участке $\left[d_k, d_{k+1}\right]$ значения результатов измерения имели равномерное распределение. Тогда плотность вероятности попадания X_i в интервал $\left[d_k, d_{k+1}\right]$ определяется выражением:

$$p_{Xk} = \frac{1}{d_{k+1} - d_k}\int_{d_k}^{d_{k+1}} p(x)dx. \qquad (3)$$

Совокупность из *K* значений, полученных согласно (3) представляет собой гистограмму плотностей вероятностей разной протяженности по оси X_i.

Для каждого из интервалов $\left[d_k, d_{k+1}\right]$ может быть найдена энтропия H_k по формуле:

$$H_k = -\ln p_{Xk}.$$

Воспользовавшись свойством аддитивности энтропии независимых величин [13] с учетом выражения (3), получим выражение для энтропийного интервала неопределенности измерения:

$$u_H = \exp\left(\sum_k^K H_k\right).$$

Таким образом, использование методов интервальной математики позволяет определить энтропию Шеннона и энтропийный интервал неопределенности при обработке результатов измерений динамических переменных сложных систем.

Выводы

Получили развитие принципы и инструменты нелинейной метрологии.

Рассмотрена задача определения энтропии Шеннона и энтропийного интервала неопределенности результата измерения динамических переменных нелинейных динамических систем.

Показано, что решение этой задачи требует составления выражения плотности распределения величины, меняющейся по сложному нелинейному закону.

Для определения плотности распределения предложено использовать методы интервального математического анализа, в частности метод гистограммного распределения.

Описаны принципы и выражения для проведения расчетов энтропии и энтропийного интервала неопределенности результатов измерения.

Список литературы

1. РМГ 43-2001. Рекомендации по межгосударственной стандартизации. Государственная система обеспечения единства измерений. применение "Руководства по выражению неопределенности измерений". Дата введения 2003-07-01.

2. Machekhin Yu. Physical models for analysis of measurement results / Yu. Machekhin // Measurement Techniques, Springer New York. – 2005. – Vol. 48, № 6. – P. 555-561.

3. Мачехин Ю.П. Модель измерения параметров нелинейных динамических систем / Ю.П. Мачехин, Ю.С. Курской // Системи обробки інформації. – Х. : ХУПС, 2012. – Вип. 1 (99). –С. 169-175.

4. Мачехин Ю.П. Анализ результатов измерений в нелинейных динамических системах / Ю.П. Мачехин, Ю.С. Курской // Системи обробки інформації. – Х. : ХУПС, 2012. – Вип. 7 (105). – С. 117-122.

5. Мачехин Ю. Фрактальная шкала для временных рядов результатов измерений / Ю. Мачехин // Измерительная техника. – 2008. – Вып. 08. – С. 40–43.

6. Мачехин Ю. Фрактально-энтропийный анализ результатов измерений в нелинейных динамических системах / Ю. Мачехин, Ю. Курской // Измерительная техника. – 2014. – Вып. 06. – С. 18-21.

7. Мачехин Ю. Модель измерения здоровья человека. Метрологический подход / Ю. Мачехин, Ю. Курской // Метрологія та прилади. – 2014. – Вып. 02 (46). – С. 40-44.

8. Васильев В.В. Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем. Научное изд. / В.В. Васильев, Л.А. Симак. – К., НАН Украины, 2008. – 256 с.

9. Добронец Б.С. Интервальная математика: Учеб. пос. / Б.С. Добронец. – Красноярск, 2007. – 287 с.

10. Мачехин Ю.П. Фрактальная шкала для временных рядов результатов измерений / Ю.П. Мачехин // Измерительная техника. – 2009. – № 8. – С. 40-43.

11. Новицкий П.В. Оценка погрешностей результатов измерений. 2-е изд., перераб. и доп. / П.В. Новицкий, И.А. Зограф. –Ленинград: Изд. Энергоатомиздат. Ленингр. отделение, 1991. – 304 с.

12. Климонтович Ю.Л. Введение в физику открытых систем / Ю.Л. Климонтович. – М.: Янус-К, 2002. – 284 с.

13. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: учеб. для вузов. 7-е изд. стер. / Е.С. Вентцель. – М.: Высш. шк., 2001.–575 с.

Поступила в редколлегию 26.12.2014

Рецензент: д-р техн. наук, проф. И.,В. Руженцев, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.

ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕРВАЛЬНОГО АНАЛІЗУ ДЛЯ ОЦІНКИ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ВИМІРЮВАНЬ В СКЛАДНИХ СИСТЕМАХ

Ю.С. Курський

У статті отримала розвиток теоретична основа нелінійної метрології. Розглянута задача визначення ентропії Шеннона та ентропійного інтервалу невизначеності результатів вимірювання динамічних змінних нелінійних динамічних систем. Показано, що коректність рішення цієї задачі залежить від правильності визначення щільності розподілу вимірюваної величини, яка змінюється по складному нелінійному закону. Для визначення щільності розподілу запропоновано використовувати методи інтервального математичного аналізу, зокрема метод гістограмного розподілу. Наведені принципи і вирази для визначення щільності ймовірності, ентропії та ентропійного інтервалу невизначеності результатів вимірювання.

Ключові слова: *невизначеність вимірювання, ентропія Шеннона, нелінійні динамічні системи, інтервальний аналіз.*

APPLICATION OF INTERVAL ANALYSIS FOR EVALUATION OF MEASUREMENT UNCERTAINTY IN COMPLEX SYSTEMS

Yu. S. Kurskoy

The theoretical framework of nonlinear metrology is he developed in the article. The problem of definition of Shannon entropy and entropic uncertainty interval for measurement results of dynamic variables of nonlinear dynamic systems. It is shown that the correctness of this problem solution depends on the correct determination of the density distribution of the measured values. It is proposed to use interval methods of mathematical analysis, in particular, the histogram distribution for determination of probability density. The principles and formulas of determination the probability density, entropy and entropic uncertainty interval are described.

Keywords: *measurement uncertainty, Shannon entropy, nonlinear dynamical systems, interval analysis.*