УДК 519.81:621.372 DOI: 10.30748/soi.2020.161.07

А.А. Засядько

Черкаський навчально-науковий інститут ДВНЗ "Університет банківської справи", Київ

СПОСОБИ СПРОЩЕННЯ ЗАДАЧІ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ НА ОСНОВІ КЛАСИФІКАЦІЇ ОБМЕЖЕНЬ

В роботі наведені різні способи спрощення задачі нелінійного програмування. Компоненти початкової ЗНП, тобто її цільова функція і система обмежень розглядаються як частинні критерії в багатокритеріальній постановці ЗНП. Використання скалярної згортки у вигляді нелінійної схеми компромісів у якості класифікатора обмежень дозволяє звести розв'язування складної задачі нелінійного програмування до простішої, тим самим зменшивши обчислювальну складність. В цьому способі спрощення – це не спосіб розв'язання ЗНП, а спосіб спрощення ЗНП великої розмірності в ЗНП малої розмірності, яка вирішується відомими методами.

Ключові слова: *задача нелінійного програмування, обчислювальна складність, багатокритеріальна оптимізація, нелінійна схема компромісів.*

Вступ

Постановка проблеми у загальному вигляді. Перерахуємо властивості задач нелінійного програмування (ЗНП), які істотно ускладнюють процес їх рішення в порівнянні із задачами лінійного програмування (ЗЛП):

1. Множина допустимих розв'язків може мати дуже складну структуру (наприклад, бути неопуклою або незв'язною).
2. Глобальний оптимум може досягатися як усередині множини допустимих розв'язків, так і на її межах (де він, взагалі кажучи, не співпадатиме ні з одним з локальних екстремумів).
3. Цільова функція може бути такою, що не диференціюється, що утрудняє використання класичних методів математичного аналізу.

Розглянемо детальніше один з перерахованих вище чинників, що істотно ускладнює розв'язок ЗНП. При розв'язанні ЗНП великої розмірності для розв'язання задач широкого класу доводиться мати справу з проблемою багатоекстремальності цільової функції в області обмежень, або, іншими словами, "ефектом лабіринту". Щоб знайти глобальний екстремум цільової функції, необхідно за допомогою комбінаторного пошуку організувати повний перебір усіх екстремумів, що є обчислювально складною процедурою [5; 10–12].

У загальному випадку ЗНП є неопуклими, такими задачами, що важко розв'язуються, оскільки відбувається експоненціальне зростання складності обчислень від розмірності і рівня похибки. Проте опуклі ЗНП – задачі, що можуть бути легко вирішені існуючими методами, що сходяться зі швидкістю геометричної прогресії: наприклад, метод центрів тяжіння, в окремому випадку метод еліпсоїдів.

Огляд останніх досліджень і публікацій. Існуючими методами можливо звести неопуклі ЗНП до опуклих ЗНП. В [5] представлений спосіб зменшення обчислювальної складності ЗНП, що використовує багатокритеріальну оптимізацію. Розмірність ЗНП зменшується завдяки використанню багатокритеріальної моделі, де скалярний критерій побудований на основі нелінійної схеми компромісів (НСК) Вороніна, уведеної в [1]. У випадку опуклості частинних критеріїв скалярний критерій на основі НСК зводить ЗНП до опуклої ЗНП. Тому представлення ЗНП великої розмірності більш складною багатокритеріальною задачею виправдане зниженням обчислювальної складності задач ЗНП і зменшення її розмірності.

Багатокритеріальні методи оптимізації дозволяють ефективно вирішувати задачі досить широкого класу [1–9; 12–13]. Суттєвою відмінністю багатокритеріальних задач від однокритеріальних є те, що для багатокритеріальних задач є множина різних принципів компромісу та відповідних їм принципів оптимальності, які можуть призвести до різних оптимальних стратегій. На цей факт треба звернути увагу, оскільки в ЗНП також серед множини обмежень на допустиму обрасть розв'язків також можуть бути суттєві і несуттєві, які можна відкинути, що призведе до спрощення початкової постановки ЗНП. Щоб розв'язати багатокритеріальну задачу, необхідно визначити область Парето, нормалізувати критерії, врахувати приоритети, вибрати схему компромісів. Проте тільки процедура визначення області Парето має достатнє наукове підґрунтя та не залежить від суб'єктивних переваг. Решта проблем розв'язуються з залученням певних відомостей від особи, що приймає рішення (ОПР). Перед ОПР постає питання: згідно з яким принципом здійснювати вибір раціональної стратегії, "найкращої" з позиції усіх критеріїв якості. Вихід полягає в тому, щоб удатися до певної схеми компромісу критеріїв для досягнення поставленої цілі та дотримуватися його у виборі раціональної (компромісної) стратегії. Останній факт висуває серйозні вимоги щодо вибору принципу оптимальності.

При знаходженні компромісного багатокритеріального розв'язку використовують суб'єктивну інформацію. Потім обирають схему компромісів для того, щоб перейти від узагальненого векторного виразу до скалярної згортки частинних критеріїв. Схема компромісів визначає переваги отриманого багатокритеріального розв'язання перед іншими парето-оптимальними розв'язками. Наразі вибір схеми компромісів не визначається теорією, а здійснюється евристично, на основі індивідуальних переваг, професіонального досвіду розробника і відомостей при ситуації, в якій приймається багатокритериальне рішення. Можливість вирішення проблеми базується на гіпотезі існування деякої функції корисності [1–2; 6; 9], якої притримується ОПР при розв'язанні певної багатокритеріальної задачі. Можна стверджувати, що практично всі підходи до визначенні скалярної згортки критеріїв зводяться до побудови певної математичної моделі функції корисності ОПР.

У методах, заснованих на тому чи іншому вигляді компромісу, використовується принцип справедливого компромісу, відповідно до якого відносний рівень зниження якості по одному або декільком критеріям не повинний перевищувати відносного рівня підвищення якості за іншими критеріями [1–2; 7]. Для розв'язання задачі векторної оптимізації, заснованому на одному з даних методів, вибирають деяку схему компромісів, що дозволяє перейти від загального векторного виразу до скалярної функції або згортки частинних критеріїв.

Уперше проблема оптимізації векторного критерію була сформульована в 1896 р. у публікації економіста Парето. Основи для прийняття рішень у випадку декількох суперечливих критеріїв заклали фон Нейман і Моргенштерн [6]. В роботі [2] Лотфі Заде вперше порушив питання про проектування автономних систем, найкращих по декільком показникам якості. В. Нельсон звів проблему до задачі оптимізації одного обраного скалярного функціонала при ізопериметричних обмежених значеннях інших функціоналів. Також у роботі Нельсона висловлювалася ідея про оптимізацію деякого функціонала на розв'язаннях задачі оптимізації іншого функціонала, не зв'язаного з першим. Чанг [13] у загальній теорії оптимальних процесів знайшов необхідні умови існування неполіпшуваних (Парето) рішень у динамічних задачах багатокритеріальної оптимізації. Він використовував підхід скаляризації – тобто зведення задачі векторної оптимізації до сімейства задач оптимізації зі скалярними показниками якості. При цьому векторний критерій представляється лінійною комбінацією його компонентів зі строго позитивними дійсними коефіцієнтами. Парето-оптимальні розв'язки багатокритеріальних задач досліджувалися у [7]. Нельсон розвинув ідею про оптимізацію системи по заданому скалярному показнику якості на розв'язках, визначених з умови оптимізації іншого скалярного показника якості [6]. Такий підхід називається оптимізацією упорядкованої послідовності критеріїв. Фредерік Валтц [6] запропонував метод, заснований на принципі ієрархічного ранжування. Тут вибирається головний критерій системи методом оцінки виграшу і програшу різних показників якості, і в такий спосіб встановлюється ієрархічна підпорядкованість критеріїв. Однак даний метод ефективний у випадках, коли частинні критерії мають високу чутливість до оптимізуючого змінного і легко виявляється явна перевага одного критерію. В інших випадках вибір підпорядкованості критеріїв утруднений.

Особливе місце серед скалярних функцій частинних критеріїв займає НСК або згортка А.Н. Вороніна [1]. Вона являє собою скалярну функцію особливого вигляду, у який згортаються частинні критерії, і в багатокритеріальній оптимізації відіграє таку саму роль, що і цільова функція в ЗНП. Переваги використання НСК полягають у тому, що, по-перше, така модель ЗНП є досить простою по обчислювальних витратах і при цьому дозволяє одержати розв'язання з множині Парето з урахуванням обмежень за принципом "якомога далі від обмежень". По-друге, НСК у якості цільової функції отриманої ЗНП при опуклості частинних критеріїв, побудованих на основі обмежень і цільової функції початкової ЗНП має властивість унімодальності. Таким чином, початкова ЗНП стає одноекстремальною.

Також НСК має властивість безупинної адаптації до різних ситуацій, у яких потрібно прийняти багатокритеріальний розв'язок. Тому необхідно дослідити всі можливості спрощення ЗНП на основі отриманих результатів в [5].

Мета даної роботи – розробити різні способи спрощення задачі нелінійного програмування на основі нелінійної схеми компромісів (НСК) Вороніна.

Виклад основного матеріалу

Розглянемо різні скалярні згортки частинних критеріїв і проаналізуємо їх можливості в спрощенні ЗНП. Приділимо увагу механізму взаємної компенсації конфліктних частинних критеріїв, яка відбувається між ними в процесі оптимізації скалярної згортки. Частинні критерії в багатокритеріальній постановці ЗНП – це компоненти початкової ЗНП: її цільова функція і система обмежень.

В загальному випадку функція корисності ОПР може бути представлена як $\Phi[i(y),r]$, де $y=\{y_i\}_{i=1}^{n}\in Y$ – вектор можливих рішень, $i=\{i_k\}_{k=1}^{s}\in\Omega$ – вектор частинних критеріїв, що визначаються в припустимій області $\Omega=\{i\mid 0\le i_k(y)\le A_k, k\in[1,s]\}$, $A_k=\sup\limits_{y\in\Gamma_y} i_k(y)$, $k=\overline{1,s}$, $r\in R$ – вектор зовнішніх умов, що визначається на множині можливих факторів R. Проблема полягає в коректній апроксимації функції корисності та побудови адекватної даній ситуації змістовної математичної моделі (скалярної згортки) для розв'язання різноманітних багатокритеріальних задач.

Зазвичай при розв'язанні багатокритеріальних задач припускають, що вектор r фіксований та заданий: $r=r_0$. Тоді функція корисності ОПР може бути представлена скалярною згорткою критеріїв

$$\Phi\left[i(y),r\right]_{|r=r^{\circ}}=I\left[i(y)\right]^{o}, \qquad (1)$$

де $I\left[i(y)\right]^{o}$ – скалярна згортка, побудована по схемі компромісів, адекватній заданій ситуації.

Скалярна згортка $I\left[i(y)\right]^{o}$ застосовується, якщо вектор критеріїв $\boldsymbol{i(y)}$ пронормований вектором обмежень $\boldsymbol{A}_k$. Компоненти вектора $\boldsymbol{i(y)}$ повинні бути піддані нормалізації, оскільки розв'язок задачі визначається на множині ефективних точок (області Парето) тільки за умови приведення всіх частинних критеріїв до єдиної розмірності або безрозмірної форми. У [10] представлений об'єктивний спосіб нормалізації, у результаті якого не порушується рівноправність жодного з частинних критеріїв, і який не залежить від масштабу. Нормалізований вектор ефективності: $i_{0k}=i_k(y)/A_k$.

В залежності від наявності і виду апріорної інформації, підходи до розв'язання багатокритеріальних задач можуть бути різними. При відсутності такої інформації обмежуються знаходженням будь–якого вектора розв'язку y^*, що забезпечує тільки виконання умови $\Omega=\{i\mid 0\le i_k(y)\le A_k, k\in[1,s]\}$ по обмеженнях [10]:

$$\begin{aligned} &I^*\in\Omega=\{I\mid 0\le I_k(y^*)\le A_k,\\ &k\in[1,s]\}, y^*\in Y=Y^k\cup Y^C, \end{aligned} \qquad (2)$$

де $y^*\in Y^k\cup Y^C$ – розв'язок належить двом областям: області компромісів (області Парето) Y^k і області згоди Y^C.

При такому способі знаходження оптимального розв'язку він часто виявляється грубим. На практиці часто використовують метод головного критерію (МГК), коли для оптимізації із сукупності I_j, $j\in[1,s]$ вибирається як критерій тільки один (наприклад, перший), а інші критерії переводяться в розряд обмежень, тобто вихідна багатокритеріальна задача штучно замінюється однокритеріальною з обмеженнями:

$$y^*=\arg\min_{y\in Y} I_1(y), 0\le I_k(y)\le A_k, k\in[1,s]. \qquad (3)$$

Метод оптимізації ієрархічної послідовності критеріїв якості [2] заснований на визначенні порядку переваги тих або інших критеріїв. Уводиться порядок переваги скалярних критеріїв $i_1(y)$, $i_2(y)$,…, $i_s(y)$. Розв'язок $y^0\in Y$ визначається при виконанні наступних співвідношень: $i_1(y^0)=\min\limits_{y\in Y_0\subset Y} i_1(y)$, …, $i_s(y^0)=\min\limits_{y\in Y_{s-1}\subset Y_{s-2}} i_s(y)$, де множини $Y_i\subset Y_{k-1}$, $k=\overline{1,s-1}$ визначені як $Y_i=\{y: i_k(y)=\min\limits_{y\in Y_{k-1}} i_k(y)\}$. Даний метод малоефективний, оскільки оптимізація по першому, найбільш важливому критерію вже призводить до єдиного оптимального розв'язку й усе зводиться до оптимізації тільки за першим критерієм.

У багатокритеріальних задачах часто виникають протиріччя між деякими критеріями. У методі визначення множини неполіпшуваних точок використовується той факт, що область Y припустимих розв'язків багатокритеріальної задачі складається з двох непересічних підобластей: області згоди Y^C і області компромісів Y^K. В області згоди протиріч між критеріями немає, а тому є можливість щодо поліпшення якості стратегії одночасно згідно з усіма критеріями або, в крайньому випадку, без погіршення (зниження) рівня будь-якого критерію. В області компромісу існують протиріччя між деякими критеріями, а тому поліпшення якості розв'язку згідно з одними критеріями призводить до погіршення його якості згідно з іншими. Очевидно, що оптимальний розв'язок може належати тільки області компромісу, оскільки в області згоди розв'язок може і має поліпшуватися згідно з усіма критеріями. А тому пошук оптимального розв'язку необхідно здійснювати лише в області компромісу, яку треба виділити з області Ω.

Виділення області компромісу, як правило, є першим етапом розв'язання багатокритеріальних задач. Важливий практичний результат цього етапу – це звуження множини компромісних розв'язків і цим самим поліпшення їх якості.

При критеріях, що мінімізуються, область компромісів має вигляд [7]:

$$Y^K=\{y'\mid y'\in Y^K; \forall y\in Y^K: i_k(y')\le i_k(y),\ k=\overline{1,s}\},$$

причому хоча б одна з нерівностей строга. Шуканий розв'язок задачі векторної оптимізації y^* належить області компромісів Y^K (тобто є Парето-оптимальним), оскільки розв'язок, який можна поліпшити одночасно за всіма критеріями, не є оптимальним.

У більшості випадків при розв'язанні багатокритеріальних задач обмежуються лінеаризованою моделлю

$$I\left[i_0(y)\right]^o = \sum_{k=1}^{s} \alpha_k^\circ i_0(y), \quad (4)$$

де α_k° – вагові коефіцієнти, що задовольняють умовам $\alpha_k^\circ \geq 0; \sum_{k=1}^{s} \alpha_k^\circ = 1$. Такий підхід має ряд недоліків, притаманних методу лінеаризації. Так, лінійна модель призводить до правильних результатів лише в малих околах робочої точки, і її знаходження залежить від ситуації прийняття багатокритеріального розв'язку. Будь-яка зміна початкових умов призводить до необхідності нового визначення вагових коефіцієнтів моделі.

Х. Юттлер [6] запропонував визначення оптимального розв'язку відповідно до мінімізації суми $\alpha_1 i_1(y) + \ldots + \alpha_s i_s(y)$, у якій вагові коефіцієнти $\alpha_1,\ldots, \alpha_s$ вибираються попередньо у вигляді $\alpha_1 = 1/i_{10}, \ldots, \alpha_s = 1/i_{s0}$, де i_{k0} – значення критерію $i_k(y)$, $k = \overline{1,s}$, отримане при оптимізації лише його одного.

Салуквадзе М.Е. запропонував підхід [10], заснований на ідеї визначення ідеальної (утопічної) точки в просторі критеріїв якості і введенні норми в цьому просторі. Координати утопічної точки визначаються як розв'язки s задач оптимізації для кожного частинного критерію $i_k(y)$, $k = \overline{1,s}$, узятого окремо: $I^* = \{i_1(y_1^*), i_2(y_2^*), \ldots, i_s(y_s^*)\}$, і шукається мінімальна відстань від цієї точки до області Парето:

$$\begin{aligned} \min_{y \in Y} R(y) &= \min_{y \in Y} \left\| I(y) - I^*(y) \right\|^2 = \\ &= \min_{y \in Y} \sum_{k=1}^{s} \left[i_k(y) - i_k(y_k^*) \right]^2, \end{aligned} \quad (5)$$

де $R(y)$ – квадрат евклідової норми.

Отриманий в такий спосіб компромісний розв'язок є Парето-оптимальним і забезпечує максимальну близькість критеріїв якості до своїх найкращих значень.

Однак істотним недоліком даного методу є відсутність обмежень на вектор частинних критеріїв, що може привести до того, що знайдений розв'язок буде знаходитися за межами цих обмежень. Також метод досить трудомісткий, оскільки вимагає розв'язання декількох задач оптимізації – по знаходженні координат утопічної точки і далі при мінімізації відстані від неї до області Парето. У методі, заснованому на ідеї утопічної точки, також використовується більш загальна норма, ніж квадратична [10].

Скалярна згортка або функція частинних критеріїв $I[i_0(y)]$ в задачі оптимізації має зміст цільової функції. В результаті її екстремізації отримують компромісно-оптимальний вектор аргументів y^*. Нижче розглянемо задачу оптимізації, в якій всі критерії $i_0(y)$ мінімізуються. Тоді математично задача векторної оптимізації набуде вигляду

$$y^* = \arg\min_{y \in Y} I[i_0(y)]. \quad (6)$$

В [1] уведене поняття напруженості ситуації, як міри близькості відносних частинних критеріїв якості до свого граничного значення (одиниці):

$$\zeta_k = 1 - y_{0k}, \zeta_k \in [0,1]. \quad (7)$$

Якщо багатокритеріальний розв'язок приймається в напруженій ситуації, то це значить, що в заданих умовах один або кілька частинних критеріїв у результаті розв'язання можуть виявитися в небезпечній близькості до своїх граничних розв'язків ($\zeta_k \approx 0$). Ця подія не компенсується можливим малим рівнем інших критеріїв якості. У цій ситуації необхідно всіляко перешкоджати небезпечному зростанню найбільш напруженого (тобто найбільш близького до своєї межі) частинного критерію, не звертаючи увагу на поведінку інших в даний момент. Отже, адекватним виразом схеми компромісів у випадку напруженої ситуації є мінімаксна модель

$$y^* = \arg\min_{y \in Y} \max_{k \in [1,k]} i_{ok}(y). \quad (8)$$

Ця схема (чебишевська модель) змушує мінімізувати гірший (найбільший) з відносних критеріїв якості, зводячи його до рівня інших, коли відбувається вирівнювання всіх частинних критеріїв.

У менш напружених ситуаціях необхідно досягати одночасного використання й інших критеріїв, враховуючи суперечливу єдність всіх інтересів і конфліктуючих цілей системи. Зі зменшенням напруженості ситуації переваги окремих критеріїв вирівнюються. У проміжних випадках необхідно вибирати схеми компромісів, які дають різні степені часткового вирівнювання частинних критеріїв.

В другому, полярному випадку ($\zeta_k \approx 1$), ситуація спокійна, частинні критерії малі і не виникає ніякої загрози порушення обмежень. Можна вважати, що одиниця погіршення одного з частинних критеріїв компенсується рівнозначною одиницею поліпшення будь-якого з інших. Цьому випадкові відповідає економічна схема компромісів, яка забезпечує мінімальні для заданих умов сумарні втрати за частинними критеріями. Така схема виражається моделлю інтегральної оптимальності

$$y^* = \arg\min_{y \in Y} \sum_{k=1}^{s} \alpha_k i_{ok}(y). \quad (9)$$

Модель інтегральної оптимальності (9) забезпечує мінімальний сумарний рівень частинних критеріїв. Загальним недоліком цієї схеми є можливість різкої диференціації рівня окремих критеріїв, тому розв'язання на основі (9) за допомогою комп'ютерних програм, як безумовної задачі оптимізації, дає неприйнятні результати за межами допустимої області розв'язку задачі. Тому необхідно вводити додаткові обмеження на частинні критерії yk(x) для компенсації цієї диференціації.

На практиці часто зустрічається ситуація, коли в процесі оптимізації вектора ефективності $I\left[i(y)\right]$ частинні критерії $i(y)$ оптимізуються нерівномірно, причому один частинний критерій може змінюватися повільно, у той час, як інші – дуже швидко. У такому випадку отриманий розв'язок може виявитися нестійким і неоптимальним, тобто буде лежати поза областю Парето. Тому ОПР обирає між моделлю інтегральної оптимальності в спокійних ситуаціях і мінімаксною моделлю в напружених ситуаціях. В проміжкових випадках ОПР вибирає схеми компромісів, що призводять до різних степенів врахування окремих критеріїв відповідно до своїх індивідуальних переваг, але з врахуванням заданої ситуації.

Для спрощення вибору між скалярними згортками $I(i_0)$, що реалізують різну напруженість ζ_k (або різні принципи оптимальності) навіть в межах одної розв'язуваної багатокритеріальної задачі, але з іншими початковими умовами, варто використовувати деяку одну скалярну згортку частинних критеріїв.

Отже, універсальна згортка повинна бути виразом адаптаційної схеми компромісів, що є головною змістовною сутністю дослідження багатокритеріальних систем. Скалярна згортка в явному вигляді повинна також вміщувати характеристики напруженості ситуації ζ.

Для формалізації вибору схеми компромісів в [1] запропонована концепція НСК. З можливих функцій, що задовольняють перерахованим вимогам, розглянута найпростіша:

$$I(\alpha, i_o) = \sum_{k=1}^{s} \alpha_k \left[1 - i_{ok}(y)\right]^{-1}, \ \alpha_k \geq 0, \sum_{k=1}^{S} \alpha_k = 1, \quad (10)$$

де a_k = const – формальні параметри, які мають подвійну інтерпретацію. З одного боку – це коефіцієнти, які виражають пріоритет критеріїв. З іншого боку – коефіцієнти регресії змістовної регресивної моделі, побудованої на основі концепції нелінійної схеми компромісів.

Нелінійна схема компромісів (10) враховує як поведінку моделі інтегральної оптимальності (9) у спокійних ситуаціях, так і мінімаксної моделі (8) у напружених. Вона, в явному вигляді, залежна від характеристик напруженості ситуації (7):

$$y^* = \arg\min_{y \in Y} \sum_{k=1}^{s} \alpha_k \left[1 - i_{0k}(y)\right]^{-1}. \quad (11)$$

З виразу (11) видно, що якщо який-небудь з відносних частинних критеріїв, наприклад $i_{0k}(y)$, почне близько наближатися до своєї межі (одиниці), тобто ситуація стане напруженою, то відповідний член $I_k = 1/\alpha_k\left[1 - i_{0k}(y)\right]$ у сумі, яку мінімізуємо, зросте настільки, що проблема мінімізації всієї суми зведеться до мінімізації тільки даного найгіршого члена, тобто, в остаточному результаті, критерію $i_{0k}(y)$. Це еквівалентно дії мінімаксної моделі (8). Якщо ж відносні частинні критерії далекі від одиниці, тобто ситуація спокійна, то модель (11) діє еквівалентно моделі інтегральної оптимальності (9). У проміжних ситуаціях виходять різні степені часткового вирівнювання критеріїв. Для унеможливлювання ділення на нуль в напружених ситуаціях при оптимізації по формулі (11) використовують умову: якщо $i_{0k}(y) \geq 0{,}95$, то приймають $i_{0k}(y) = 0{,}95$. Отже, НСК (10) адаптується до різних ситуацій в процесі багатокритеріального рішення. Тут адаптація здійснюється неперервно, в той же час як традиційний вибір схеми компромісів відбувається дискретно і в результаті до суб'єктивних помилок додаються помилки, пов'язані з квантуванням схем компромісів.

В [1] показано, що коли $i_0(y)$, $i = \overline{1,m}$ – неперервні і строго опуклі на паралелепіпеді $\mathit{\Pi}_y = \{y \in E^n \mid a_i \leq y_i \leq b_i, i = \overline{1,n}\}$ функції, то скалярна згортка за НСК $\mathit{\Phi}(y) = \sum_{k=1}^{s} \alpha_k \left(1 - i_{0k}(y)\right)^{-1}$, $y \in \mathit{\Gamma}_y$, при нормованих частинних критеріях має єдиний мінімум на паралелепіпеді $\mathit{\Pi}_x$, тобто функція $\mathit{\Phi}(y)$ є унімодальною. Отже, для частинних критеріїв підбираються строго опуклі функції, щоб задача оптимізації за схемою (11) мала єдиний розв'язок.

Переваги НСК полягають у тому, що, по-перше, її використання є досить простою по обчислювальних витратах і при цьому дозволяє одержати розв'язок з множини Парето з урахуванням обмежень за принципом "якомога далі від обмежень". По-друге, скалярна згортка (10) при опуклості частинних критеріїв має властивість унімодальності (тобто задача стає одноекстремальною). Також НСК має властивість безупинної адаптації до різних ситуацій, у яких потрібно прийняти багатокритеріальний розв'язок. У напружених ситуаціях (коли один або декілька частинних критеріїв знаходяться в небезпечній близькості від обмежень) вона діє еквівалентно мінімаксної моделі, у досить спокійних ситуаціях згортка в (10) діє еквівалентно моделі інтегральної оптимальності (тобто економічній схемі компромісів). У проміжку між обома полюсами нелінійна згортка дає різні ступені вирівнювання частинних критеріїв. При цьому застосування нелінійної схеми компромісів дозволяє підвищити точність розв’язання завдяки безперервності адаптації.

Постановка ЗНП. Нехай R^n – n-мірний простір векторів $y=(y_1, y_2,\dots,y_n)$, $g(y)$ і $\varphi(y)$ – задані вектори-функції, визначені на R^n:

$\mathbf{y}=(y_1, y_2,\dots,y_n)$,

$g(y)=\{g_1(y), g_2(y),\dots,g_m(y)\}=0$

– обмеження у формі рівностей,

$\varphi(y) = \{\varphi_1(y), \varphi_2(y),\dots,\varphi_r(y)\}\ge 0$

– обмеження у формі нерівностей, (12)

де $g_i(y)$ і $\varphi_i(y)$ – скалярні функції.

Позначимо через G множину векторів у простору $\boldsymbol{R}^n$, для яких $g(y)=0$ і $\varphi(y)\ge 0$, тобто

$G\equiv\{y;\ g(y)=0;\ \varphi(y)\ge 0\}$.

Нехай $F(y)$ – задана скалярна функція. ЗНП полягає у знаходженні вектора $\tilde{y}$ на $\boldsymbol{R}^n$, мінімізуючого функцію $F(y)$ на множині G, тобто такого, що

$$F(\tilde{y}) = \min_{y\in G} F(y). \qquad (13)$$

Функція $F(y)$ називається цільовою функцією задачі (12).

Якщо в ЗНП функції $F(y)$, $g(y)$ і $\varphi(y)$ – лінійні, то вона називається задачею лінійного програмування (ЗЛП).

Усунення багатоекстремальності ЗНП.

Наведемо багатокритеріальну модель ЗНП, оскільки нас цікавить кожний компонент ЗНП: і цільова функція, і система обмежень у якості частинних критеріїв, притаманних багатокритеріальним задачам. Щоб подолати багатоекстремальність або “ефект лабіринту” ЗНП, необхідно використати НСК, яка зводить ЗНП до опуклої ЗНП (в разі опуклості частинних критеріїв). Спрощену модель ЗНП можна вирішувати відомими методами.

В роботі [5] автором була представлена багатокритеріальна модель ЗНП, проте є можливість спростити представлену там постановку цієї моделі, що і буде показано нижче.

Нехай задана множина можливих розв’язків Y, яка складається з векторів $y = \{y_i\}_{i=1}^{n}$ n-мірного евклідового простору. Якість розв’язку оцінюється по сукупності суперечливих частинних критеріїв, що утворюють s-мірний вектор $I(y) = \{I_k(y)\}_{k=1}^{S} \subset F$, який визначений на множині Y, і який належить класові F допустимих векторів ефективності. Вектор частинних критеріїв обмежений допустимою областю: $I\in M$.

Для обмежень, що утворюють допустиму область M у формі рівностей $g(y)=0$, складемо частинні критерії суми квадратів нев’язок

$$I_{рівн\,i} = g_i^2(y) \le m\varepsilon_1^2, i = \overline{1,m}\,. \qquad (14)$$

Для обмежень у формі нерівностей $\varphi(y)\ge 0$ перетворимо обмеження у вигляді нерівностей у рівності за допомогою введення нової змінної v_i, що має розмірність r:

$$\varphi_i(y) - v_i^2 = 0\,. \qquad (15)$$

Такий підхід використовується для методу множників Лагранжа, при перетворенні умовної задачі оптимізації в безумовну. Для методу множників Лагранжа це перетворення запишемо як

$$I(y,\lambda,v) = F(x) + \sum_{i=1}^{r}\lambda_i\left[\varphi_i(y) - v_i^2\right] + \sum_{j=r+1}^{r+m}\lambda_j g_j(y);\ \ j=\overline{1,r+m};\ i=\overline{1,n}, \qquad (16)$$

де задача мінімізації зведеться до розв’язання системи нелінійних рівнянь (СНР) розмірності $2r+m+n$ рівнянь:

$$\frac{\partial I(y)}{\partial\lambda_j} = 0\,;\ \frac{\partial I(y)}{\partial y_i} = 0\,;\ \frac{\partial I(y)}{\partial v_l} = 0\,,$$

$$j=\overline{1,r+m},\ \ i=\overline{1,n},\ \ l=\overline{1,r}\,. \qquad (17)$$

Для обмежень у формі нерівностей $\varphi(y)\ge 0$ складемо частинні критерії суми квадратів нев’язок

$$I_{нерівн\,l} = \left[\varphi_l(y) - v_l^2\right]^2 \le \varepsilon_2^2, l=\overline{1,r}\,. \qquad (18)$$

Отже, набір частинних критеріїв багатокритеріальної задачі для ЗНП (12) запишеться в такий спосіб:

$$\begin{cases} \min I_1 = F(y);\ \ 0 \le I_1 \le I_{1\max}; \\ при\ \ g_i(y)=0,\ i=\overline{1,m} \\ \min I_{рівн_i} = g_i^2(y), 0 \le I_{рівн_i} \le I_{рівн\,i\max} \\ I_{рівн_{i\max}} = \varepsilon_i\,; \\ при\ \ \varphi_l(y) \ge 0, l=\overline{1,r}, \\ \min I_{нерівн_l} = \left[\varphi_l(y) - v_i^2\right]^2 \\ 0 \le I_{нерівн_l} \le I_{нерівн_l\max}\,,\ \ I_{нерівн\,l\max} = \varepsilon_l\,. \end{cases} \qquad (19)$$

$$I^* = \sum_{j=1}^{m+r+1}\frac{1}{\left(1-\dfrac{I_j}{I_{j\max}}\right)^2}\,.$$

Для векторного критерію I, компонентами якого є частинні критерії, кількість змінних: $r+m+n$, n – розмірність змінних $y_1, y_2, \dots y_n$; m – кількість обмежень вигляду рівностей; r – кількість обмежень вигляду нерівностей.

Багатокритеріальна задача (19) зводиться до розв’язання однієї задачі оптимізації за НСК:

$$y^* = \arg\min I^* \qquad (20)$$

при обмеженнях з (10).

Необхідні умови мінімуму скалярного критерію I* дають систему кінцевих рівнянь низької розмірності

$$\frac{\partial I^*}{\partial y_i} = 0, i = \overline{1, n}, \qquad (21)$$

яка зводиться, наприклад, з використанням методу Ньютона до СЛАР.

У роботі [5] показано, що багатокритеріальна модель (20) забезпечує вибір точки розв'язку на множині рішень, оптимальних по Парето, з урахуванням заданих обмежень на припустиму область зміни векторного критерію, якщо множина Парето належить цієї області. Тому для розв'язання багатокритеріальних задач, у яких задані обмеження з формули (19) на компоненти векторного критерію, варто рекомендувати модель (20).

Вкажемо недоліки НСК (20), яка складається з частинних критеріїв (19):

- громіздкість рівнянь при великій розмірності;
- якщо розв'язок знаходиться на обмеженні, то він буде знайдений з похибкою, хоча і меншою за її граничне значення. За допомогою формули (20) неможливо досягнути принципово точного розв'язку, інакше знаменники доданків будуть обертатися в нуль.
- наближений розв'язок скалярного критерію.

Переваги НСК:

- Система нелінійних рівнянь для НСК має розмірність r+m+n рівнянь, у той час як для методу невизначених множників Лагранжу – $2r+m+n$.
- Унімодальність згорнутого критерію. Нелінійна схема компромісів при опуклих частинних критеріях гарантує один дійсний корінь у межах обмежень.
- Нелінійна схема компромісів зводить задачу (13) з обмеженнями (10) до опуклої ЗНП, якщо частинні критерії – опуклі.

Після застосування формули (20) ЗНП (13) можна розв'язувати також як і безумовну задачу оптимізації, але знайти всі розв'язки $\tilde{y}$, при яких $F(\tilde{y}) = \min_{y \in G} F(y)$ і вибрати з них тільки той розв'язок, який задовольняє обмеженням на частинні критерії. Загальні методи безумовної оптимізації, реалізовані програмно, в даному випадку неприйнятні, тому що знаходять локальні мінімуми поза обмеженнями, тому краще користуватися загальними методами і програмами розв'язку ЗНП.

Сортування обмежень ЗНП за значущістю за допомогою багатокритеріальної постановки ЗНП.

Використаємо переваги НСК в багатокритеріальній оптимізації для гнучкої адаптації до напруженості критеріїв при спрощенні ЗНП.

В роботі [3] запропонована методика, в якій використовується НСК для гнучкої адаптації у відповідності до напруженості критеріїв, тобто коли $I_i \to I_{im}$. Ця методика дозволяє виявити конфліктні критерії, відсортувати критерії за ступенем конфліктності і в подальшому використовувати тільки конфліктні критерії. Неконфліктні критерії можна не враховувати як такі, що не впливають на результати розв'язку. Тому такий підхід можна використати також для додаткового спрощення початкової задачі (13) з обмеженнями (10). По аналогії з розглянутими в [3] багатокритеріальними задачами можна стверджувати, що НСК може слугувати для класифікації обмежень (10) за ступенем конфліктності. Неконфліктні обмеження не враховуються в подальшому розв'язку задачі (13).

Нехай, наперед відомо, що серед критеріїв, тобто обмежень ЗНП $I_k(y)$ є напружені $I_н(y)$, але невідомо, які саме. Це випливає через нерівномірність зміни кожного частинного критерію в процесі оптимізації. Чим швидше змінюється критерій, тим більший ризик його наближення до свого граничного значення. Тоді схема (11) у цій ситуації реалізує дію Чебишевського (мінімаксного) оператора по цьому частинному критерію (або критеріях). Інші (або спокійні) критерії y_c при оптимізації будуть ігноруватися, хоча це не говорить про те, що вони не важливі для ОПР, який включив їх у вектор $i(y)$. Через присутність напружених критеріїв, розв'язок виходить нестійким і незбалансованим, через невиконання вимог по інших частинних критеріях, і тому є незадовільним. Тому, щоб збалансувати процес оптимізації в задачі (11), необхідно вводити обмеження за спокійними критеріями. Якість розв'язку при цьому може бути значно поліпшеною, однак задача істотно ускладнюється, оскільки не враховується одна з головних переваг НСК (11) (за умови строгої опуклості $i(y)$) – відсутність обмежень, що вже закладені в її структурі в якості нормуючого вектора обмежень. Усі частинні критерії рівні між собою для схеми інтегральної оптимальності (9), як говорилося раніше, тільки в спокійній ситуації.

Виходячи з викладеного, можна запропонувати багатокритеріальну модель ЗНП на основі (19), (20), яка враховувала би як наявність напружених частинних критеріїв і адаптацію до поточної ситуації за схемою (11), так і спокійних, враховуючих властивості схеми (9).

На першому етапі здійснюється оптимізація за НСК (11) для виявлення серед усіх частинних критеріїв напружених $y_н$ і подальшого сортування їх по напруженості.

На другому етапі вирішується задача знаходження оптимального розв'язку y* за допомогою формули

$$y^* = \arg\min_{y \in Y} \left(\sum_{k=1}^{s_н} \left[1 - i_k(y) \right]^{-1} + \sum_{k=1}^{m+r-1-s_н} i_{ok}(y) \right), \quad (22)$$

де $s_н$ – кількість напружених критеріїв.

Тут перша сума адаптується до напруженої ситуації, а друга – збільшує внесок у вектор $i(y)$ звичайних, "спокійних" критеріїв. Як видно, запропонована формула пов'язує у собі переваги як нелінійної схеми компромісів (11), так і схеми інтегральної оптимальності (9).

Необхідно використати наближений розв'язок, отриманий за допомогою НСК за формулами (20) або (22), як початкове наближення і вирішувати відомими методами спрощену задачу.

Таким чином, на основі результатів, отриманих в [3], для спрощення початкової ЗНП, її можна представити у вигляді скалярного критерію (22). При чисельній реалізації ЗНП за цією схемою не потрібно вводити додаткові обмеження за спокійними критеріями, які є неминучими при наявності напружених критеріїв, тобто задача оптимізації за запропонованою схемою є безумовною, що показали дослідження за допомогою моделювання.

Розв'язання спрощеної ЗНП як безумовної задачі багатокритеріальної оптимізації.

Після застосування НСК вже спрощену ЗНП з малою кількістю обмежень на частинні критерії на основі (20) в силу унімодального мінімуму скалярного критерію можна вирішувати як безумовну задачу оптимізації, але знайти всі мінімуми і вибрати один, що задовольняє обмеженням на частинні критерії. Загальні методи і програми безумовної оптимізації тут не працюють, тому що знаходять локальні мінімуми поза обмеженнями, тому краще користуватися загальними методами і програмами рішення ЗНП.

В даному випадку спрощення – зниження розмірності за допомогою відкидання обмежень, від яких наближене рішення знаходиться далеко.

Аналогічні труднощі виникають при чисельній реалізації безумовної оптимізації за допомогою стандартних програм, які можуть не працювати, оскільки вони шукають мінімум поза області визначення частинних критеріїв. Використовувати такі програми можна тільки для умовної оптимізації із зазначенням обмежень на частинні критерії. Тому безумовну оптимізацію ЗНП необхідно проводити класичним методом – методом множників Лагранжа: отримати систему кінцевих рівнянь, знайти частинні похідні, що є необхідною умовою оптимуму функцій декількох змінних і прирівняти до нуля. Знайти відомими чисельними методами розв'язок всередині обмежень на частинні критерії. Розв'язки поза обмежень відкинути.

Крім того, НСК вимагає визначення обмежень на саму цільову функцію, оскільки вона є рівноправним частинним критерієм, також як і критерії, сформовані з обмежень ЗНП. Потрібно знайти обмеження на компоненти вектора змінних $0 \le I_i \le I_{imax}$, які визначаються з технічного завдання або з фізичних рамок існування рішень. Для цього необхідно вирішити або задачу визначення максимального значення цільової функції (без інших обмежень), або лінійні (лінійно-квадратичні) випадки обчислення цільової функції при максимальних значеннях компонент вектора змінних y_i (тільки в окремому випадку).

Наведемо основні особливості НСК. Багатокритеріальна модель ЗНП на основі НСК по суті – ЗНП: умовна оптимізація скалярного критерію (min I) при обмеженнях на частинні критерії ($0 \le I_i \le I_{imax}$). Допускається рішення ЗНП за допомогою НСК як безумовної задачі оптимізації у відкритій області $\frac{\partial I}{\partial y} = 0$. Після визначення всіх локальних екстремумів, що є рішенням безумовної задачі оптимізації, необхідно відкинути всі корені за межами $0 \le I_i(y) \le I_{imax}$ обмежень на частинні критерії. Отримані розв'язки перевірити на виконання умов $\varphi_i(y) \le 0$ і залишити тільки ті, які не виконуються. Вирішити спрощену задачу і знову перевірити рішення для відкинутих обмежень, якщо ці обмеження не виконуються, то включити їх в систему обмежень $\varphi_i(y) \le 0$ і т.д.

Алгоритм сортування обмежень ЗНП за значущістю за допомогою НСК.

Дана ЗНП, що складається з m обмежень:

$I(y) = \min F(y)$,

$\varphi_i(y) \le c_i$. $i = \overline{1, m}$.

Алгоритм сортування обмежень ЗНП складається з етапів:

1. Розщепити на m ЗНП, де m – кількість обмежень-нерівностей:

$$\begin{aligned} & i_1(y) = \min F(y), \\ & \varphi_1(y) \le c_1; \\ & \ldots \\ & i_m(y) = \min F(y), \\ & \varphi_m(y) \le c_m; \end{aligned} \quad (23)$$

2. Вирішити за допомогою звичайних методів m ЗНП, що містять по одному обмеженню. Отримати розв'язки $\tilde{y}_1$, ..., $\tilde{y}_m$.

3. Обчислити значення частинних критеріїв по отриманим розв'язкам $\tilde{y}_1$, ..., $\tilde{y}_m$. Це дозволить виявити напружені і спокійні критерії або обмеження. НСК використовується як класифікатор обмежень і частинних критеріїв для кожної з m ЗНП з п.(1):

$$I_1 = 1 / \left(1 - F(\tilde{y}_1) / F_{\max}\right);$$

$$I_2 = 1 / \left(1 - \varphi_1(\tilde{y}_1) / \varphi_{1_{\max}}\right);$$

$$\ldots$$

$$I_{m+1} = 1 / \left(1 - \varphi_m(\tilde{y}_m) / \varphi_{m_{\max}}\right).$$

4. Відібрати групу конфліктних обмежень типу нерівностей по відношенню до цільової функції, що представлена I_1. Ці нерівності увійдуть в нову спрощену ЗНП.

5. Відкинути спокійні критерії або обмеження і вирішити методом Лагранжа ЗНП тільки з напруженими або значущими критеріями.

6. За потребою розв'язати спрощену ЗНП за допомогою багатокритеріальної моделі на основі НСК.

На простому прикладі покажемо алгоритм, на основі якого ЗНП спрощується класифікатором обмежень на основі НСК.

Приклад 1. Знайти мінімум цільової функції $F(y)$ при обмеженнях $\varphi(y)$:

$$\min F(y) = y_1^2 + y_2^2\ ;$$
$$\varphi_1(y)=(y_1-2)^2+(y_2-2)^2\le 2; \qquad (24)$$
$$\varphi_2(y)=-y_1-2y_2\le -4;$$
$$\varphi_3(y)=y_1-2y_2\le -1.$$

Дана задача має два невідомих, три обмеження і тому легко розв'язується за допомогою методу невизначених множників Лагранжа. Знайдений цим методом розв'язок $\tilde{y}$ =(0,8; 1,6). Однак у загальному випадку (наприклад, при великій розмірності) застосування НСК може виявитися необхідним з висловлених раніше міркувань.

Знаходимо F_{max}, $\varphi_{1\text{-}3max}$. Необхідно знайти F_{max} у заданих межах зміни її аргументів, відкидаючи всю систему обмежень типу рівностей і нерівностей. З нерівності $(y_1-2)^2+(y_2-2)^2\le 2$ можна визначити область припустимих значень (ОПЗ) аргументів $0\le y_1\le 3$, $0\le y_2\le 3$. У загальному випадку ОПЗ аргументів визначається з технічного завдання реальних ЗНП.

Нехай нерівності $\varphi_{1\text{-}3}$ будуть обчислюватися з заданою похибкою, оскільки $\varphi_{1\text{-}3max}\ne 0$, бо знаходиться в знаменнику виразу (24). Отже, ЗНП (24) має вигляд:

$$F(y) = y_1^2 + y_2^2\ ;\ F_{max}=9;$$
$$\varphi_1(y) = (y_1-2)^2+(y_2-2)^2-2;\ \varphi_{1max}=10^{-2};$$
$$\varphi_2(y)= -y_1-2y_2+4;\ \varphi_{2max}=10^{-2}; \qquad (25)$$
$$\varphi_3(y)= y_1-2y_2+1;\ \varphi_{3max}=10^{-2}.$$

Знаходимо наближений розв'язок задачі (25). Наприклад, замість вже отриманих точних значень $\tilde{y}$ =(0,8; 1,6) методом невизначених множників Лагранжа, за допомогою оптимізаційних програм в середовищі Mathcad можна одержати

$$\tilde{y}=(0{,}799993259;\ 1{,}60000337).$$

Якщо важлива точність, то отриманий розв'язок можна взяти як початкове наближення й уточнити відомими методами. Зазначимо, що оптимізаційні програми для розв'язання ЗНП, як правило, самі одержують наближений розв'язок $\tilde{y}$.

Сформуємо з усіх компонент ЗНП (24) частинні критерії для НСК, і обчислимо їх значення згідно отриманого розв'язку $\tilde{y}$ =(0,8; 1,6):

$$I_1 = \frac{1}{\left(1-\dfrac{F(\tilde{y})}{F_{max}}\right)^2} = \frac{1}{1-\left(\dfrac{\tilde{y}_1^2+\tilde{y}_2^2}{F_{max}}\right)^2} = 6{,}429\ ;$$

$$I_2 = \frac{1}{\left(1-\dfrac{\varphi_1(\tilde{y})}{\varphi_{1\max}}\right)} = \frac{1}{1-\left(\dfrac{(y_1-2)^2+(y_2-2)^2-2}{10^{-2}}\right)^2} = 81{,}857;$$

$$I_3 = \frac{1}{\left(1-\dfrac{\varphi_2(\tilde{y})}{\varphi_{2\max}}\right)} = \frac{1}{1-\left(\dfrac{-y_1-2y_2+4}{10^{-2}}\right)^2} = -499{,}75\ ; \qquad (26)$$

$$I_4 = \frac{1}{\left(1-\dfrac{\varphi_3(\tilde{y})}{\varphi_{3\max}}\right)} = \frac{1}{1-\left(\dfrac{y_1-2y_2+1}{10^{-2}}\right)^2} = -7{,}523\times 10^{-5}.$$

ЗНП (24) розбиваємо на три ЗНП, знаходимо для кожної задачі розв'язки $\tilde{y}_1-\tilde{y}_3$ і згідно цих отриманих розв'язків значення критеріїв I_1-I_4 для НСК, що містять в знаменниках напруженість:

$$\min F(y) = y_1^2 + y_2^2\ ;$$
$$(y_1-2)^2+(y_2-2)^2-2\le\varphi_{1\max}; \qquad (27,\ а)$$
$$\tilde{y}_1=(0{,}997;\ 0{,}998);\ I_1=1{,}786\ ;\ I_2=-384{,}366.$$

$$\min F(y) = y_1^2 + y_2^2\ ;$$
$$y_1+2y_2-4\le\varphi_{2\max}. \qquad (27,\ б)$$
$$\tilde{y}_2=(0{,}798;\ 1{,}596);\ I_1=1{,}04\ ;\ I_3=2{,}346\times 10^{13}.$$

$$\min F(y) = y_1^2 + y_2^2\ ;$$
$$y_1+2y_2-1\le\varphi_{3\max}. \qquad (27,\ в)$$
$$\tilde{y}_3=(0;\ 0);\ I_1=1;\ I_4=1\times 10^{-4}.$$

Для ЗНП (27, а) $|I_2| >> I_1$, отже, нерівність $\varphi_1(y)$ – "напружена", або конфліктна, її відкинути не можна. Це саме можна сказати за нерівність $\varphi_2(y)$ в (27, б), оскільки $|I_3| >> I_1$, проте для нерівності $\varphi_3(y)$ в (27, в) вже $|I_4| >> I_1$ "спокійна" і ніяк не впливає на результат розв'язку ЗНП (24).

Отже, ЗНП (24) спрощується до вигляду:

$$\min F(y) = y_1^2 + y_2^2\ ;$$

$\varphi_1(y) = (y_1\text{-}2)^2\text{+}(y_2\text{-}2)^2\le 2;$ (28)

$\varphi_2(y)\text{=-} y_1\text{-}2y_2\le\text{-}4.$

Змінимо умову-нерівність $\varphi_3(y)= y_1\text{-}y_2 \le\text{-}1$ таким чином, щоб вона стала значущою в ЗНП (24).

Приклад 2. Знайти мінімум цільової функції $F(y)$ при обмеженнях $\varphi(y)$:

$\min F(y) = y_1^2 + y_2^2$;

$\varphi_1(y) = (y_1\text{-}2)^2\text{+}(y_2\text{-}2)^2\le 2;$ (29)

$\varphi_2(y)\text{=-}y_1\text{-}2y_2\le\text{-}4;$

$\varphi_3(y)= y_1\text{-}y_2 \le\text{-}1.$

Знайдений методом невизначених множників Лагранжа розв'язок $\tilde{y}$ =(2; 1).

Сформуємо з усіх компонент ЗНП (29) частинні критерії для НСК, і обчислимо їх значення згідно отриманого розв'язку $\tilde{y}$:

$$I_1 = \frac{1}{1-\left(\dfrac{y_1^2+y_2^2}{F_{max}}\right)^2} = 0,191\,;$$

$$I_2 = \frac{1}{1-\left(\dfrac{(y_1-2)^2+(y_2-2)^2-2}{10^{-2}}\right)^2} =$$

$$= -1\times 10^{-4};$$

$$I_3 = \frac{1}{1-\left(\dfrac{-y_1-2y_2+4}{10^{-2}}\right)^2} = 1,01\,; \quad (30)$$

$$I_4 = \frac{1}{1-\left(\dfrac{-y_1+y_2+1}{10^{-2}}\right)^2} = 1,01.$$

ЗНП (29) розбиваємо на три ЗНП, знаходимо для кожної задачі розв'язки $\tilde{y}_1$ - $\tilde{y}_3$ і згідно цих отриманих розв'язків значення критеріїв I_1-I_4 для НСК. Для ЗНП з $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$ результат співпадає з (27, а), (27, б) відповідно, для ЗНП з $\varphi_3(y)$:

$\min F(y) = y_1^2 + y_2^2$;

$\text{-}y_1\text{+}y_2\text{+}1\le\varphi_{3max}.$ (31)

$\tilde{y}_3$ =(0,495; -0,495);

$I_1 = 1,064$; $I_4 = -5,629\times 10^{14}$.

Для ЗНП (29) $|I_{3,4}| >> I_2$, отже, нерівність $\varphi_1(y)$ можна відкинути, бо ніяк не впливає на результат розв'язку ЗНП (29).

Отже, ЗНП (29) спрощується до вигляду:

$\min F(y) = y_1^2 + y_2^2$;

$\varphi_2(y)\text{=-}y_1\text{-}2y_2\le\text{-}4;$

$\varphi_3(y)= y_1\text{-}y_2 \le\text{-}1.$

Наведемо переваги алгоритму сортування обмежень ЗНП, що здійснюється на основі класифікатора НСК:

1. Обмеження ЗНП сортуються за ступенем конфліктності з їх поділом на напружені і спокійні.

2. Початкова ЗНП спрощується, бо містить тільки обмеження, що конфліктують з цільовою функцією, що і показано в наведених прикладах.

Висновки

В роботі наведені різні способи спрощення задачі нелінійного програмування. В цих задачах серед множини обмежень на допустиму область розв'язків можуть бути суттєві і несуттєві обмеження, які можна відкинути, що призведе до спрощення початкової постановки ЗНП. Компоненти початкової ЗНП, тобто її цільова функція і система обмежень розглядаються як частинні критерії в багатокритеріальній постановці ЗНП. Розглянуті різні скалярні згортки частинних критеріїв і проаналізовані їх можливості в спрощенні ЗНП. Приділено увагу механізму взаємної компенсації конфліктних частинних критеріїв, яка відбувається між ними в процесі оптимізації скалярної згортки.

Використання скалярної згортки у вигляді нелінійної схеми компромісів у якості класифікатора обмежень дозволяє звести розв'язування складної задачі нелінійного програмування до простішої, тим самим зменшивши обчислювальну складність. В цьому способі спрощення використання скалярної згортки у вигляді нелінійної схеми компромісів – це не спосіб розв'язання ЗНП, а спосіб спрощення ЗНП великої розмірності в ЗНП малої розмірності, яка вирішується відомими методами. В даному випадку спрощення – зниження розмірності за допомогою відкидання обмежень, від яких наближений розв'язок знаходиться далеко.

Була додатково спрощена вже існуюча багатокритеріальна модель ЗНП. Представлення ЗНП великої розмірності більш складною багатокритеріальною задачею виправдане зниженням обчислювальної складності задач ЗНП. Здійснюється редукція ЗНП великої розмірності в ЗНП меншої розмірності, яку можна розв'язувати звичайними оптимізаційними методами. На відміну від інших скалярних критеріїв, нелінійна схема компромісів дозволяє знайти неполіпшуваний або оптимальний по Парето розв'язок, а у випадку опуклих частинних критеріїв – унімодальний (єдиний) розв'язок. Складна задача представляється простішою моделлю, вираженою системою рівнянь невеликої розмірності.

Список літератури

1. Векторная оптимизация динамических систем /А.Н. Воронин, Ю.К. Зиатдинов, О.И. Козлов, В.С. Чабанюк; под ред. А.Н. Воронина. – К.: Техніка, 1999. – 284 с.

2. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений / Л. Заде. – М.: Мир, 1976. – 165 с.

3. Засядько А.А. Два этапа методики гибкой адаптации в задачах многокритериальной оптимизации / А.А. Засядько // Вісник ЧДТУ. – 2002. – № 2. – С.14 -17.

4. Засядько А.А. Решение задачи восстановления параметров объектов информационного обеспечения автоматизированных систем управления / А.А. Засядько // Системи обробки інформації. – 2016. – № 4(141). – С. 35-40.

5. Засядько А.А. Зниження обчислювальної складності в задачі нелінійного програмування великої розмірності / А.А. Засядько // Вісник УБС. – 2016. – № 2(21). – С. 158-162.

6. Нейман Дж. Теория игр и экономическое поведение: Пер. с англ./ Дж. Нейман, О. Моргенштерн. – М.: Наука, 1970. – 707 с.

7. Подиновский В.В. Парето–оптимальные решения многокритериальных задач / В.В. Подиновский, В.Д.Ногин. – М.: Наука, 1982. – 256 с.

8. Резанова В.Г. Перетворення задачі оптимізації при дослідженні чотирикомпонентних сумішей полімерів / В.Г. Резанова // Вісник КНУТД. – 2016. – № 2(96). – С. 40-47.

9. Салуквадзе М.Е. Задачи векторной оптимизации в теории управления / М.Е. Салуквадзе. – Тбилиси: Мецниереба, 1975. – 201 с.

10. Albayrak Inci. A New Successive Linearization Approach for Solving Nonlinear Programming Problems / Inci Albayrak, Mustafa Sivri, Gizem Temelcan // Appl. Appl. Math. – 2019. – Vol. 14, Issue 1. – P. 437-451.

11. Hamiden Abdelwahed Khalifa. An Interactive Approach for Solving Multi-Objective Nonlinear Programming and its Application to Cooperative Continuous Static Games / Hamiden Abdelwahed Khalifa // J. Appl. Res. Ind. Eng. – 2018. –Vol. 5, No. 4. – P. 296-305.

12. Jun Ye ID. Neutrosophic Number Nonlinear Programming Problems and Their General Solution Methods under Neutrosophic Number Environments / Jun Ye ID, Wenhua Cui, Zhikang Lu // Axioms. – 2018. – Vol. 7, 13. – P. 1-9.

13. Chung D.H. Optimal systems with multiple cost functionals / D.H. Chung // SIAM J. Control. – 1967. – Vol. 5, No. 3. – P. 345-350.

References

1. Voronin, A.M., Ziatdinov, Yu.K., Kozlov, O.I and Chabanyuk, V.S. (1999), "*Vektornaja optimizatsija dinamicheskich system*" [*Vectorial optimization of the dynamic systems*], Technic, Kyiv, 284 p.

2. Zade, L. (1976), "*Ponyatiye lingvisticheskoy peremennoy i yego primeneniye k prinyatiyu priblizhennykh resheniy*" [*The concept of a linguistic variable and its application to making approximate solutions*], Peace, Moscow, 165 p.

3. Zasjadko, A.A. (2002), "Dva etapa metodiki gibkoy adaptatsii v zadachakh mnogokriterial'noy optimizatsii" [Two stages of flexible adaptation techniques in multicriteria optimization problems], *News of CHDTU*, No. 2, pp. 14 -17.

4. Zasjadko, A.A. (2016), "Rechenije zadachi vosstanovlenija parametrov objeckov informatsionnogo obespechenija dlja avtomatizirovannich system upravlenija" [The solving incorrect problem of restoring of automated control objects for automated control systems], *Information Processing Systems*, No. 4(141), pp. 35-40.

5. Zasjadko, A.A. (2016), "Znishennja obchislyuvalnoji skladnosti v zadachi nelinijnogo programmuvannja" [Decreasing in computing complexity of high-order problem of nonlinear programming], *News of UBS*, No. 2 (21), pp. 158-162.

6. Neumann, J. and Morgenstern, O. (1970), "*Teoriya igr i ekonomicheskoye povedeniye*" [*Game Theory and Economic Behavior*], Science, Moscow, 707 p.

7. Podinovsky, V.V. and Nogin, V.D. (1982), "*Pareto–optimal'nyye resheniya mnogokriterial'nykh zadach*" [*Pareto – optimal solutions of multicriteria problems*], Science, Moscow, 256 p.

8. Rezanova, V.G. (2016), "Peretvorennya zadachi optymizatsiyi pry doslidzhenni chotyrykomponentnykh sumishey polimeriv" [Transformation of Optimization Problem in the Study of Four-Component Polymer Mixture], *Anouncer of Kyiv National University of Technology and Design*, No. 2(96), pp. 40-47.

9. Salukvadze, M.E. (1975), "*Zadachi vektornoy optimizatsii v teorii upravleniya*" [*Vectorial optimization problems in control theory*], Metsniereba, Tbilisi, 201 p.

10. Albayrak, Inci, Sivri, Mustafa and Temelcan, Gizem (2019), A New Successive Linearization Approach for Solving Nonlinear Programming Problems, *Appl. Appl. Math.* Vol. 14, No. 1, pp. 437-451.

11. Hamiden Abdelwahed Khalifa (2018), An Interactive Approach for Solving Multi-Objective Nonlinear Programming and its Application to Cooperative Continuous Static Games, *J. Appl. Res. Ind. Eng.*, Vol. 5, No. 4, pp. 296-305.

12. Jun Ye ID, Wenhua Cui and Zhikang Lu (2018), Neutrosophic Number Nonlinear Programming Problems and Their General Solution Methods under Neutrosophic Number Environments, *Axioms*, Vol. 7, 13, pp. 1-9.

13. Chung, D.H. (1967), Optimal systems with multiple cost functionals, *SIAM J. Control*., Vol. 5, No. 3, pp. 345-350.

Надійшла до редколегії 19.02.2020
Схвалена до друку 14.04.2020

Відомості про автора:

Засядько Аліна Анатоліївна
доктор технічних наук професор
Черкаського навчально-наукового інституту
ДВНЗ "Університет банківської справи",
Черкаси, Україна
https://orcid.org/0000-0002-1640-7580

Information about the author:

Alina Zasjadko
Doctor of Technical Sciences Professor
of Cherkasy Institute of Banking
of the University of banking,
Cherkasy, Ukraine
https://orcid.org/0000-0002-1640-7580

СПОСОБЫ УПРОЩЕНИЯ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ НА ОСНОВЕ КЛАССИФИКАЦИИ ОГРАНИЧЕНИЙ

А.А. Засядько

В работе приведены различные способы упрощения задачи нелинейного программирования. В этих задачах среди множества ограничений на допустимую область решений могут быть существенные и несущественные ограничения, которые можно отбросить, что приведет к упрощению первоначальной постановке ЗНП. Компоненты начальной ЗНП, то есть ее целевая функция и система ограничений рассматриваются как частные критерии в многокритериальной постановке ЗНП. Рассмотрены различные скалярные свертки частных критериев и проанализированы их возможности в упрощении ЗНП. Уделено внимание механизму взаимной компенсации конфликтных частных критериев, которая происходит между ними в процессе оптимизации скалярной свертки.

Использование скалярной свертки в виде нелинейной схемы компромиссов в качестве классификатора ограничений позволяет свести решение сложной задачи нелинейного программирования к простой, тем самым уменьшив вычислительную сложность. В этом способе упрощение – это не способ решения ЗНП, а способ упрощения ЗНП большой размерности в ЗНП малой размерности, которая решается известными методами.

Была дополнительно упрощена уже существующая многокритериальная модель ЗНП. Представление ЗНП большой размерности более сложной многокритериальной задачей оправдано снижением вычислительной сложности задач ЗНП. Осуществляется редукция ЗНП большой размерности в ЗНП меньшей размерности, которую можно решать обычными оптимизационными методами. В отличие от других скалярных критериев, нелинейная схема компромиссов позволяет найти неулучшаемое или оптимальное по Парето решение, а в случае выпуклых частных критериев – унимодальное (единственное) решение. Сложная задача представляется простой моделью, выраженной системой уравнений небольшой размерности.

Ключевые слова: *задача нелинейного программирования, вычислительная сложность, многокритериальная оптимизация, нелинейная схема компромиссов.*

METHODS OF SIMPLIFYING THE PROBLEM OF NONLINEAR PROGRAMMING ON THE BASIS OF CLASSIFICATION OF LIMITATIONS

A. Zasjadko

The paper presents various ways to simplify the problem of nonlinear programming (PNP). In these tasks, among the many constraints on the admissible area of solution, there can be significant and insignificant restrictions that can be thrown away, which will simplify the initial formulation of the PNP. The components of the initial PNP, and its target function and constraint system, are considered as partial criteria in the multi-criteria PNP formulation. Various scalar convolutions of partial criteria are considered and their possibilities in PNP simplification are analyzed. The mechanism of mutual compensation of conflicting partial criteria that occurs between them in the process of scalar convolution optimization is given attention.

Using a scalar convolution as a nonlinear scheme of tradeoffs as a constraint classifier reduces the complexity of nonlinear programming to simpler, thereby reducing computational complexity. In this method of simplifying the use of a scalar convolution in the form of a nonlinear compromise scheme, it is not a method of deciding a PNP, but a method of simplifying a large dimension PNP in a small dimension PNP, which is solved by known methods. The existing multi-criteria PNP model has been further simplified. The representation of a large dimension PNP by a more complex multicriteria task is justified by the reduction in the computational complexity of the PNP tasks. Large-size PNP are reduced to smaller-sized PNP, which can be solved using conventional optimization methods. Unlike other scalar criteria, a nonlinear scheme of trade-offs allows us to find a Pareto optimal solution, and in the case of convex partial criteria, a unimodal (single) solution. The complex problem is represented by a simpler model, expressed by a system of equations of small dimension.

Keywords: *nonlinear programming problem, computational complexity, multicriteria optimization, nonlinear compromise scheme.*