УДК 623.54:62.50

В.І. Грабчак, Є.Г. Іваник, С.А. Цибуля

Академія Сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного, Львів

ОСНОВНІ АСПЕКТИ ОПИСУ ЗАДАЧІ ПРО ОПТИМАЛЬНУ ШВИДКОДІЮ КЕРУВАННЯ РУХОМ РАКЕТИ

Викладено постановку і процедуру реалізації оптимального польоту ракети сталої потужності. Побудовано оптимальне керування переходом системи з початкового стану в задане кінцеве положення на основі узагальнення принципу максимуму, сформоване у вигляді задачі оптимальної корекції.

Ключові слова: *рух ракети, задача оптимального керування, функціонал, система диференціальних рівнянь руху, функція Гамільтона.*

Вступ

Постановка проблеми в загальному вигляді та аналіз літератури. В багатьох областях сучасної техніки виникає задача приведення об'єкта керування в заданий стан у визначений момент часу або у фіксовану точку (область) простору. З даної постановки проблеми та враховуючи сутність тактичної (оперативно-тактичної) ракетної зброї з високоточним наведенням стає зрозумілим тісний взаємозв'язок між загальнонауковими підходами розв'язку теоретичних задач теорії оптимального керування та різноманітних стадій розробки і створення нових зразків ракетних систем. На сьогодні відома велика кількість джерел, на основі матеріалів яких можна розвивати математичні методи аналізу результатів вимірювань, спробувати виділити з загальних результатів вплив окремих з багаточисельної сукупності факторів, які так чи інакше впливають на перебіг розглядуваного явища [1 – 4].

Розкриттю змісту математичного моделювання польоту ракет на різних стадіях траєкторії та розвитку математичних моделей руху в умовах програмованого маневру присвячено значну кількість досліджень, відображених в працях [1, 5 – 8]. Незважаючи на те, що задачі, які стосуються розрахунку траєкторій польоту ракет, мають давню історію, однак загальний підхід і специфічні методи їх розв'язування, які відповідають особливостям їх фізичного змісту і математичного опису, неперервно розвиваються паралельно з розвитком теорії оптимального керування.

За функціональним призначенням системи керування ракетами підрозділяються на системи наведення і системи стабілізації ракети [9].

В процесі наведення система керування ракети вирішує задачу формування потрібного руху центру маси ракети і визначає умови для завершення дії керування, при виконанні яких забезпечується влучання ракети в ціль. Система стабілізації під час польоту ракети забезпечує дійсний рух ракети в максимальній близькості до програмного.

Системи наведення і стабілізації знаходяться в тісній взаємодії: система наведення визначає потрібний рух ракети, а система стабілізації його реалізує. Так, прилади системи стабілізації вимірюють відхилення поточних параметрів, які визначають рух ракети, від їх програмних значень і формують такі керуючі впливи органів керування, які зводять ці відхилення до нуля. Один із важливих етапів створення системи керування наведенням полягає у виборі алгоритму прогнозування кінцевого стану польоту ракети. При цьому слід брати до уваги обмеження, що випливають з практичних можливостей.

Планування багатоетапного процесу слід виконувати з огляду перебігу всього процесу і його раціонального (у визначеному сенсі) завершення в цілому, тобто приймаючи рішення на окремому етапі завжди необхідно мати на увазі кінцеву мету.

Якщо в загальному випадку стан системи описується m параметрами $x_i \left(i = 1, 2, ..., m \right)$, то областю можливих станів є m - вимірний простір, а керування відображається переміщенням точки з деякої початкової області $\tilde{S}_0$ в кінцеву $\tilde{S}_k$ по деякій траєкторії цього простору.

Отже, геометрично інтерпретація задачі динамічного програмування полягає в наступному: з усіх траєкторій, які належать області можливих станів системи і сполучають області $\tilde{S}_0$ і $\tilde{S}_k$, необхідно вибрати таку, на якій визначений критерій приймає оптимальне значення [9–12]. При виведенні ракети в деяку визначену точку ділянки траєкторії термінальний момент час відповідає виведенню її в заданий кінцевий стан і основні вимоги з якості і надійності керування стосуються цього моменту [12, 13].

Основною метою статті є визначення систематизованого підходу до опису послідовності стадій, які характерні для задачі про оптимальну швидкодію керування з вибором програми руху ракети на різних ділянках траєкторії, а також розробка математичного апарату та інструментарію вирішення даної проблеми.

Основна частина

Поставимо задачу оптимального керування ракетою, стан якої у кожний момент часу характеризується скінченим набором координат $x_1, x_2, ..., x_m$, де $m > 2$. Стан такої системи можна характеризувати також точкою в m - мірному фазовому просторі цієї системи.

Якщо розглядати модель руху ракети як жорсткого і твердого тіла, тобто в рамках моделі абсолютно твердого тіла, то основний вплив на систему керування виявляють вагові і моментні характеристики ракети, вигляд розрахункової траєкторії, комплекс збурень, які діють на ракету, а також її аеродинамічні параметри і характеристики виконуючих органів.

Створення математичної моделі ракети передбачає якнайповніший опис її динаміки в збуреному стані, характеристики зовнішніх впливів, способи ідентифікації про місцезнаходження ракети. Згідно припущень, висловлених у праці [12], основним завданням системи керування є забезпечення стійкого польоту ракети в околі номінальної незбуреної розрахункової траєкторії.

Наприклад, стан ракети, що рухається у просторі під дією реактивної сили і сили тяжіння Землі, при найпростішому розгляді (якщо вважати ракету за матеріальну точку) може бути описаним трьома координатами положення, відносно вибраної системи координат $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$, і трьома складовими його вектора швидкості $\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dot{x}_3(t)$.

Керування виведенням відбувається, в основному, внаслідок зміни вектора тяги, яка створюється двигуном ракети. Фактично система керування наведенням має вирішувати навігаційну задачу для визначення поточного вектора стану ракети (вектора місцеположення), прогнозувати координати кінцевого стану і формувати керуючі впливи, які забезпечують досягнення заданих термінальних умов.

Основний підхід в теорії термінального керування рухом ракети передбачає прогнозування майбутнього руху системи від поточного моменту t впритул до термінального моменту часу T і формування за результатами цього прогнозу процесу зміни керуючого впливу на інтервалі $[t;T]$, який приводить систему в заданий кінцевий стан.

Нехай рух ракети з врахуванням нестабільності її властивостей описується нелінійним диференціальним рівнянням у векторно-матричній формі

$$\dot{x} = F(x, u, f, t),\ x(t_0) = x_{10},\ t \in [t_0; T], \qquad (1)$$

де x – шестивимірний вектор стану; u – тривимірний вектор керування; a – вектор змінних параметрів ракети; f – шестивимірний вектор збурень.

При керуванні рухом ракети відносно номінальної (опорної) траєкторії природним є намагання сформувати керування, яке є, у визначеному сенсі, оптимальним. Стосовно нестаціонарних і нелінійних об'єктів, яким в загальному випадку є ракета, вимоги, які висуваються до процесів керування, найприродніше формулювати у вигляді деякого функціоналу. В загальному випадку задача оптимального керування, відома в літературі як задача Лагранжа [10], формулюється таким чином: знайти мінімум деякого інтеграла

$$\int L(t, X(t), u(t))dt, \qquad (2)$$

для певного класу кривих $X(t) = \{x_1(t), ..., x_m(t)\}$ і параметрів u(t), які задовольняють відповідним рівнянням стану. Припускається, що u(t) – вектор, який змінюється в деякій множині U. Тому вектор u(t), визначений відповідною сукупністю компонент, які називають керуючими параметрами або керуваннями, є вектором керування.

Фізичний сенс наведеного функціоналу визначається змістом задачі оптимального керування. Його величина залежить від лагранжіана, з допомогою якого можна оцінювати відхилення ракети від запрограмованої траєкторії, витрати палива для керування, тощо. Слід визнати, що на даний час загальноприйнятої обґрунтованої інженерної методики задання показників на основі технічних вимог до систем керування не сформульовано.

Найбільш важливим з точки зору практичного застосування є випадок знаходження мінімуму інтеграла (2) для траєкторій $X(t) = \{x_1(t), ..., x_m(t)\}$ і відповідних керувань u(t) таких, що кінцеві значення трубки траєкторій X(t) задовольняють заданим граничним умовам. Головною метою слід вважати вироблення алгоритму, яким треба користуватись для виявлення сукупності оптимальних траєкторій. Внаслідок цього розв'язок поставленої конкретної задачі слід розбивати на етапи [9, 11]:

а) знаходження сімейства близьких до оптимальних траєкторій і керувань;

б) доведення того, що вони насправді дають шуканий мінімум.

Локальний пучок сімейства траєкторій, визначених на заданому часовому інтервалі [t_0, T], утворює центральне поле, яке містить пучок кривих – всіх можливих траєкторій руху ракети. Оскільки вказане центральне поле утворене сімейством екстремалей відповідно сформульованої варіаційної задачі, то маємо поле екстремалей. У випадку руху ракети маємо випадок пучка кривих з вершинами в спільному початку (місце старту).

Сформулюємо тепер задачу в термінах фазового простору даної системи. У шестивимірному просторі задано дві точки x^0 і x^1. У початковий момент часу система знаходиться у початковій точці з координатами (x_1^0, x_2^0, x_3^0) (точка старту). Складові вектора швидкості $\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dot{x}_3(t)$, будемо позначати для уніфікації x_4, x_5, x_6 відповідно. Треба знайти таку програму зміни керованих впливів у часі або залежно від фазових координат, щоб зображуюча точка перейшла по деякій траєкторії з початкової точки x^0 у задану точку x^1 з координатами $\left(x_1^1, x_2^1, x_3^1\right)$, за умови, що певним чином заданий функціонал досягає свого мінімального значення [14 – 18].

Конкретизуємо загальну модель, виражену залежностями (1, 2). Розглянемо рух ракети, який описується у векторно-матричній формі лінійним рівнянням виду

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{3}$$

де A – матриця стану, розміром $(n \times n)$, а B – матриця керування типу $(n \times r)$, причому число n визначає кількість змінних стану (фазові змінні), а число r – керуючих параметрів або просто керувань; в даному конкретному випадку матриця стану є типу (6×6), а матриця керування – типу (6×3).

Тоді $\{x(t), u(t)\}$ – оптимальний процес, який переводить ракету з початкового фазового x^0 стану в кінцевий стан x^1 і, $t_0 \le t \le T$ – відрізок часу, протягом якого відбувається досліджуваний оптимальний рух (причому значення T може бути як фіксованим, так і вільно варіюватись). Граничними умовами задачі є

$$x(t_0) = x^0, \; x(T) = x^1. \tag{4}$$

Поставимо задачу оптимальної корекції [19]: визначити систему векторів $\{x(t), u(t)\}$, які надають екстремуму функціоналу

$$I = \int_{t_0}^{T} F\big(x(t), u(t)\big)dt, \tag{5}$$

за умов (4), тобто при переході системи, рух якої описується системою рівнянь (3) у визначений стан.

Постановка задачі оптимального керування рухом ракети передбачає вибір критерію оптимальності беручи до уваги головний сенс призначення системи керування – з найкращою, в межах можливої технічної реалізації, точністю забезпечити приведення ракети в заданий стан у визначених часових межах або у визначений окіл простору, асоційований з відповідною трубкою екстремалей даного центрального поля. В розглядуваному випадку руху маємо векторне керування $\{u_1(t), u_2(t), u_3(t)\}$ з простору керування U, а фазовими координатами є шість змінних $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ – координати переміщення, і координати вектора швидкості $\dot{x}_1(t) = x_4(t)$, $\dot{x}_2(t) = x_5(t)$, $\dot{x}_3(t) = x_6(t)$.

За інтегральну умову критерію якості візьмемо

$$I = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\left[u_1^2(t) + u_2^2(t) + u_3^2(t)\right]dt. \tag{6}$$

Фізичний сенс функціонала (6) в загальному полягає в оцінці відхилення ракети від програмної траєкторії або, наприклад, витрати енергоресурсів для керування. По суті, залежність (6), визначає енергетичний критерій, який характеризує витрати енергії на керування. Зокрема, вибір функціонала у вигляді (6) враховує обмеження на керування; воно "штрафує" систему за великі значення керуючих впливів [10, 13, 15], які важко забезпечити в реальних умовах функціонування складної інженерної конструкції, якою є сучасна високоточна ракетна зброя.

Запишемо рівняння (3) у векторно-матричній формі відносно безрозмірних величин у вигляді

$$\frac{dx}{d\tau} = Ax + Bu, \tag{7}$$

де $\tau \in [\tau_0; 1]$ – безрозмірна змінна часу;

$$x(t) = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T; \; u = (u_1, u_2, u_3)^T;$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Беручи до уваги вигляд рівняння (7) та вирази для матриць (8) і функціоналу критерію якості (6) складемо функцію Гамільтона, загальний вигляд якої згідно [19, 20] є таким

$$H = (Ax \cdot \psi) + (Bu \cdot \psi) - F(x, u), \tag{9}$$

звідки, враховуючи масштабування часу заміною $\tau = t / T$, та вигляд матриць стану і керування, визначені виразами (8), матимемо

$$\begin{aligned} H = {} & \psi_1 x_4 + \psi_2 x_5 + \psi_3 x_6 + \psi_4 u_1 + \psi_5 u_2 + \\ & + \psi_6 u_3 - \frac{T}{2}\left(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2\right). \end{aligned} \tag{10}$$

Враховуючи, що функції $\psi_i \; (i = 1, ..., 6)$ визначені лише до спільного множника (внаслідок однорідності функції Гамільтона H відносно векторфункції $\psi = (\psi_1, ..., \psi_6)$), згідно міркувань, викладених у роботі [19] у співвідношенні (10) можна покласти $\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = 1$. З огляду на вираз функції Гамільтона (10) залежності для знаходження функцій $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5, \psi_6)$ матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} & \dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \qquad \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = 0, \\ & \dot{\psi}_3 = -\frac{\partial H}{\partial x_3} = 0, \qquad \dot{\psi}_4 = -\frac{\partial H}{\partial x_4} = -\psi_1, \\ & \dot{\psi}_5 = -\frac{\partial H}{\partial x_5} = -\dot{\psi}_2, \qquad \psi_6 = -\frac{\partial H}{\partial x_6} = -\dot{\psi}_3; \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} & \dot{x}_1(\tau) = x_4(\tau), \dot{x}_2(\tau) = x_5(\tau), \dot{x}_3(\tau) = x_6(\tau), \\ & \dot{x}_4(\tau) = u_1(\tau), \dot{x}_5(\tau) = u_2(\tau), \dot{x}_6(\tau) = u_3(\tau). \end{aligned} \tag{12}$$

Умова екстремуму функції Гамільтона

$$H(\psi, x, u) = \max_{u \in U} H(\psi(\tau), x(\tau), u(\tau))$$

приводить до залежностей

$$\frac{\partial H}{\partial u_1} = \psi_4 - Tu_1 = 0, \frac{\partial H}{\partial u_2} = \psi_5 - Tu_2 = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial u_3} = \psi_6 - Tu_3 = 0. \quad (13)$$

а оскільки

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u_1^2} = -1 < 0, \; \frac{\partial^2 H}{\partial u_2^2} = -1 < 0, \; \frac{\partial^2 H}{\partial u_3^2} = -1 < 0,$$

то внаслідок виконання умови критерію досягнення екстремуму функцією Гамільтона матимемо

$$u_{1opt}(\tau) = \frac{1}{T}\psi_4(\tau), \; u_{2opt}(\tau) = \frac{1}{T}\psi_5(\tau),$$

$$u_{3opt}(\tau) = \frac{1}{T}\psi_6(\tau).$$

Розв'язок систем рівнянь (11-12) відповідно до початкових умов (4), з яких слідує $x_1(\tau_0) = x_1^0$, $x_2(\tau_0) = x_2^0$, $x_3(\tau_0) = x_3^0$, заданих початкових значень складових вектора швидкості $\dot{x}_1(\tau_0) = x_4(\tau_0) = v_{10}$, $\dot{x}_2(\tau_0) = x_5(\tau_0) = v_{20}$, $\dot{x}_3(\tau_0) = x_6(\tau_0) = v_{30}$, та виконання співвідношень (13), буде

$$\psi_1(\tau) = 1, \psi_2(\tau) = 1, \psi_3(\tau) = 1,$$

$$\psi_4(\tau) = \psi_{41} - (\tau - \tau_0), \psi_5(\tau) = \psi_{51} - (\tau - \tau_0), \quad (14)$$

$$\psi_6(\tau) = \psi_{61} - (\tau - \tau_0);$$

$$x_4(\tau) = \psi_{41}(\tau - \tau_0) - \frac{1}{2}(\tau - \tau_0)^2 + v_{10},$$

$$x_5(\tau) = \psi_{51}(\tau - \tau_0) - \frac{1}{2}(\tau - \tau_0)^2 + v_{20}, \quad (15)$$

$$x_6(\tau) = \psi_{61}(\tau - \tau_0) - \frac{1}{2}(\tau - \tau_0)^2 + v_{30};$$

$$x_1(\tau) = \frac{1}{2}\psi_{41}(\tau - \tau_0)^2 - \frac{1}{6}(\tau - \tau_0)^3 + v_{10}(\tau - \tau_0) + x_1^0,$$

$$x_2(\tau) = \frac{1}{2}\psi_{51}(\tau - \tau_0)^2 - \frac{1}{6}(\tau - \tau_0)^3 + v_{20}(\tau - \tau_0) + x_2^0, \quad (16)$$

$$x_3(\tau) = \frac{1}{2}\psi_{61}(\tau - \tau_0)^2 - \frac{1}{6}(\tau - \tau_0)^3 + v_{30}(\tau - \tau_0) + x_3^0.$$

З урахуванням залежностей (14–16) умова виходу в кінцеве положення має вигляд

$$x(1) = x^1. \quad (17)$$

На основі умови (17) отримуємо систему рівнянь для визначення невідомих констант ψ_{41}, ψ_{51}, ψ_{61}:

$$x_1(1) = \frac{1}{2}\psi_{41}(1 - \tau_0)^2 - \frac{1}{6}(1 - \tau_0)^3 + v_{10}(1 - \tau_0) + x_1^0 = x_1^1,$$

$$x_2(1) = \frac{1}{2}\psi_{51}(1 - \tau_0)^2 - \frac{1}{6}(1 - \tau_0)^3 + v_{20}(1 - \tau_0) + x_2^0 = x_2^1, \quad (18)$$

$$x_3(1) = \frac{1}{2}\psi_{61}(1 - \tau_0)^2 - \frac{1}{6}(1 - \tau_0)^3 + v_{30}(1 - \tau_0) + x_3^0 = x_3^1.$$

Розв'язком системи рівнянь (18) буде

$$\psi_{41} = (1 - \tau_0)^{-2} \times \left[2\left(x_1^1 - x_1^0\right) - 2v_{10}(1 - \tau_0) + \frac{1}{3}(1 - \tau_0)^3\right];$$

$$\psi_{51} = (1 - \tau_0)^{-2} \times \left[2\left(x_2^1 - x_2^0\right) - 2v_{20}(1 - \tau_0) + \frac{1}{3}(1 - \tau_0)^3\right]; \quad (19)$$

$$\psi_{61} = (1 - \tau_0)^{-2} \times \left[2\left(x_1^1 - x_1^0\right) - 2v_{30}(1 - \tau_0) + \frac{1}{3}(1 - \tau_0)^3\right].$$

Тоді, з урахуванням співвідношень (19), оптимальне керування, залежне від часу описується функціями

$$u_{1opt}(\tau) = \frac{1}{T(1 - \tau_0)^2}\left[2\left(x_1^1 - x_1^0\right) - 2v_{10}(1 - \tau_0) + \frac{1}{3}(1 - \tau_0)^3\right] - \frac{1}{T}(\tau - \tau_0) = \frac{\tilde{u}}{T}u_1(\tau),$$

$$u_{2opt}(\tau) = \frac{1}{T(1 - \tau_0)^2}\left[2\left(x_2^1 - x_2^0\right) - 2v_{20}(1 - \tau_0) + \frac{1}{3}(1 - \tau_0)^3\right] - \frac{1}{T}(\tau - \tau_0) = \frac{\tilde{u}}{T}u_2(\tau), \quad (20)$$

$$u_{3opt}(\tau) = \frac{1}{T(1 - \tau_0)^2}\left[2\left(x_1^1 - x_1^0\right) - 2v_{10}(1 - \tau_0) + \frac{1}{3}(1 - \tau_0)^3\right] - \frac{1}{T}(\tau - \tau_0) = \frac{\tilde{u}}{T}u_3(\tau).$$

У виразах (20) позначено:

$$u_j(\tau) = \frac{1}{(1 - \tau_0)^2}\left[2\left(x_j^1 - x_j^0\right) - 2v_{j0}(1 - \tau_0) + \frac{1}{3}(1 - \tau_0)^3\right] - (\tau - \tau_0), \; j = 1,2,3;$$

перемикання керуванням відбувається за досягнення функціями $u_j(\tau)$ значення $\tilde{u}$.

Аналіз залежностей (20) оптимального керування процесом в часі вказує, що вони описуються лінійними функціями, причому обернено пропорційні величині T – тривалості функціонування системи.

Зрозуміло, що будь-яка лінійна функція, відмінна від тотожного нуля, обертається в нуль на відрізку $\tau \in [\tau_0; 1]$ не більше одного разу.

Отже, оптимальне керування можна подати у вигляді

$$u_{jopt}(\tau) = \frac{\tilde{u}}{T}\operatorname{sign}u_j(\tau) = \begin{cases} +\dfrac{\tilde{u}}{T}, u_j(\tau) > 0, \\ -\dfrac{\tilde{u}}{T}, u_j(\tau) < 0. \end{cases} \qquad (21)$$

Як відзначено в роботі [20], оптимальні керування на практиці важко реалізувати. Зокрема, не завжди можуть бути допустимими швидкості, які мають місце в процесі руху, а крім того, в реальних системах керування запаси енергії на виконання маневрів обмежені. Зауважимо, що у праці [20] також вказано, що при розгляді задач оптимізації систем керування можливі три варіанти, в яких: час переходу не задано, час переходу обмежений зверху, час переходу фіксований.

Крім детермінованих умов (4) та (17), які визначають досягнення кінцевої мети, процес керування має підпорядковуватись низці додаткових умов, пов'язаних з обмеженнями на величини і тривалість керуючих впливів, на характер зміни відносних параметрів стану тощо; внаслідок цього умови прийнятності або допустимості процесів керування в загальному визначаються відповідним набором обмежуючих функціоналів виду [20]

$$J_j = M\left[G_j(x,u,t)\right] \le 0, j = 1,2,...,m, \qquad (22)$$

заданих або на всьому проміжку $\left[t_0;T\right]$, або в окремих його точках, де M – символ математичного сподівання. Звідси, аналізуючи отримані залежності (21), в рамках розглядуваної задачі умови (22) природним чином, виходячи з фізичної суті задачі, а також очевидної умови $v_{j0}(1-\tau_0) > 0$, трансформуються в обмеження типу ($j = 1,2,3$)^

$$0 \le x_j^1 - x_j^0 - v_{j0}(1-\tau_0) \le \frac{1}{6}(1-\tau_0)^2(2+\tau_0), \qquad (23)$$

Співвідношення (23) накладають відповідні обмеження на значення координат початкової і кінцевої точок, складових вектора початкової швидкості та тривалість часового інтервалу виходу ракети в задане кінцеве положення.

З використанням виразів (16) та (19) записується розв'язок автономної системи диференціальних рівнянь (3), який має вигляд

$$x_1(\tau) = \left[\left(x_1^1 - x_1^0\right) - v_{10}(1-\tau_0) + \frac{1}{6}(1-\tau_0)^3\right] \times$$
$$\times\left(\frac{\tau-\tau_0}{1-\tau_0}\right)^2 - \frac{1}{6}(\tau-\tau_0)^3 + v_{10}(\tau-\tau_0) + x_1^0,$$
$$x_2(\tau) = \left[\left(x_2^1 - x_2^0\right) - v_{20}(1-\tau_0) + \frac{1}{6}(1-\tau_0)^3\right] \times$$
$$\times\left(\frac{\tau-\tau_0}{1-\tau_0}\right)^2 - \frac{1}{6}(\tau-\tau_0)^3 + v_{20}(\tau-\tau_0) + x_2^0, \qquad (24)$$
$$x_3(\tau) = \left[\left(x_3^1 - x_3^0\right) - v_{30}(1-\tau_0) + \frac{1}{6}(1-\tau_0)^3\right] \times$$
$$\times\left((\tau-\tau_0)/(1-\tau_0)\right)^2 - \frac{1}{6}(\tau-\tau_0)^3 + v_{30}(\tau-\tau_0) + x_3^0.$$

Вирази (20) оптимальних керувань свідчать, що знайдене оптимальне керування є функцією часу. Згідно термінології, прийнятої в класичних працях з оптимального керування [14, 16, 20], вони називаються неповним синтезом оптимального керування, оскільки для різних початкових умов потрібно кожен раз проробляти відповідні дії з побудови розв'язку. Для розв'язання задачі повного синтезу слід знайти такий вираз для оптимального керування в функціях поточних координат, тобто в нашому випадку $\left\{x_1(\tau), x_4(\tau)\right\}$, $\left\{x_2(\tau), x_5(\tau)\right\}$, $\left\{x_3(\tau), x_6(\tau)\right\}$, для чого необхідно, по можливості, виключити час з виразів, які визначають оптимальне керування – знайти рівняння ліній перемикання керуванням на фазових площинах.

Також важливим моментом є визначення систем, які володіють властивістю керованості і спостережуваності, а кінцевий стан вважається таким, якого можна досягти [14, 16, 20].

З огляду на симетрію отриманих керувань (20) дослідимо стан системи в довільний поточний момент часу $\tau \in \left[\tau_0;1\right]$, який описується парою чисел $\left\{x_1(\tau), x_4(\tau)\right\}$, тобто $\left\{x_1(\tau), v_1(\tau)\right\}$, де $v_1(\tau) = x_4(\tau)$ – компонента вектора швидкості $V(\tau) = \left\{v_1(\tau), v_2(\tau), v_3(\tau)\right\}$, причому згідно співвідношень (16) та урахування виразів (19) матимемо

$$v_1(\tau) = \frac{1}{(1-\tau_0)}\left[2\left(x_1^1 - x_1^0\right) - 2v_{10}(1-\tau_0) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{3}(1-\tau_0)^3\right]\left(\frac{\tau-\tau_0}{1-\tau_0}\right) - \frac{1}{2}(\tau-\tau_0)^2 + v_{10}. \qquad (25)$$

З першої із залежностей (20) маємо:

$$\tau - \tau_0 = 2\alpha_1 - \vartheta_1 T,$$

де $\alpha_1 = \dfrac{1}{(1-\tau_0)^2}\left[\left(x_1^1 - x_1^0\right) - v_{10}(1-\tau_0) + \dfrac{1}{6}(1-\tau_0)^3\right]$,

підставляючи яке у першу залежність (24), дістанемо

$$x_1(\tau, \vartheta_1) = \alpha_1(2\alpha_1 - \vartheta_1 T)^2 - \frac{1}{6}(2\alpha_1 - \vartheta_1 T)^3 +$$
$$+ v_{10}(2\alpha_1 - \vartheta_1 T) + x_1^0, \tau - \tau_0 = 2\alpha_1 - \vartheta_1 T. \qquad (26)$$

Отримана залежність (26) є параметричним поданням однієї зі складових шуканої просторової оптимальної кривої з відповідним векторним керуванням на відрізку $\tau \in \left[\tau_0;1\right]$.

Чисельний аналіз за отриманими розрахунковими залежностями виконувався в середовищі математичного пакету Maple-15 з використанням відповідних вбудованих бібліотек.

Згідно співвідношень (20), (24), які визначають оптимальний, відповідно до керувань (20), розв'язок системи (7), розраховано: фазову траєкторії руху зображуючої точки в тривимірному фазовому просторі, яка ілюструє рух центра мас ракети; фазову траєкторію відповідно до знайденого оптимального керування; керування, оптимальне згідно сформульованого критерію (6), та однієї зі складових, яка описує розглядуваний процес керування, що відображено графіками на рис. 1 – рис. 4.

На рис. 1. з метою більш наочного відображення по осях Ox_1 і Ox_2 відкладено значення логарифмів величин x_1, x_2.

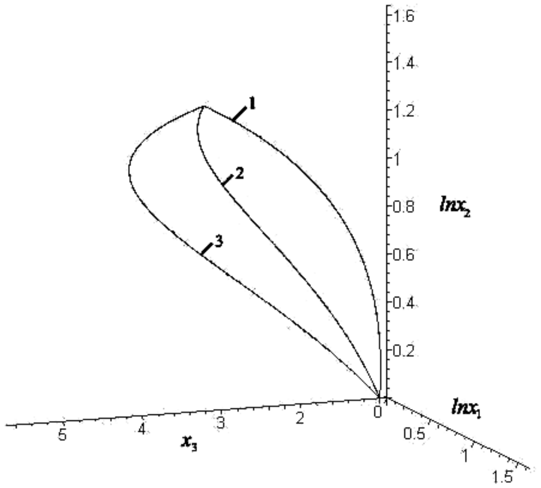


Рис. 1. Зображення фазової траєкторії в тривимірному просторі для декількох значень початкової швидкості: $v_{10} = 4,2$, $v_{20} = 4,4$, крива 1 – $v_{30} = 4,0$; 2 – $v_{30} = 9$; 3 – $v_{30} = 14$

З використанням першої із залежностей $x_1(\tau)$ (24) та виразу складової швидкості $v_1(\tau)$ (25), заданих в параметричній формі, досліджено проекцію фазової траєкторії в площині x_1Ov_1, яку показано на рис. 2.

В початковий момент часу τ_0 зображуюча точка знаходиться в точці з координатами $\left(x_1^0, v_{10}\right)$ фазової площини x_1Ov_1. В процесі переміщення складова v_1 повної швидкості v змінюється згідно закону, що описується залежністю (25), а віддаль від початкового положення в поздовжньому напрямі змінюється відповідно до першої із залежностей (24). На кривій, яка описує фазову траєкторію стрілкою відзначено напрям руху зображуючої точки.

Можна відзначити, що лінія перемикання для конкретної системи займає стале положення на фазовій площині, що обумовлене сталістю модуля величини оптимального керування. Подібне явище відзначається в конкретних задачах, поставлених і розв'язаних в роботі [20].

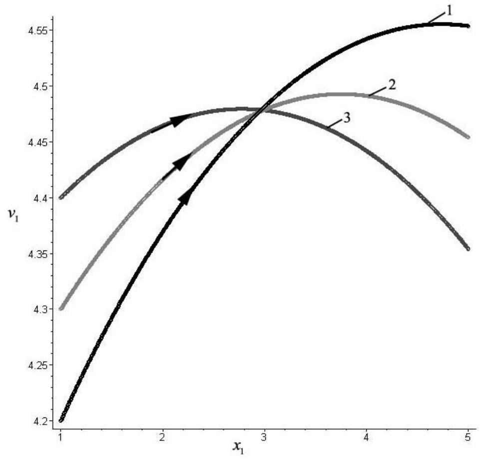
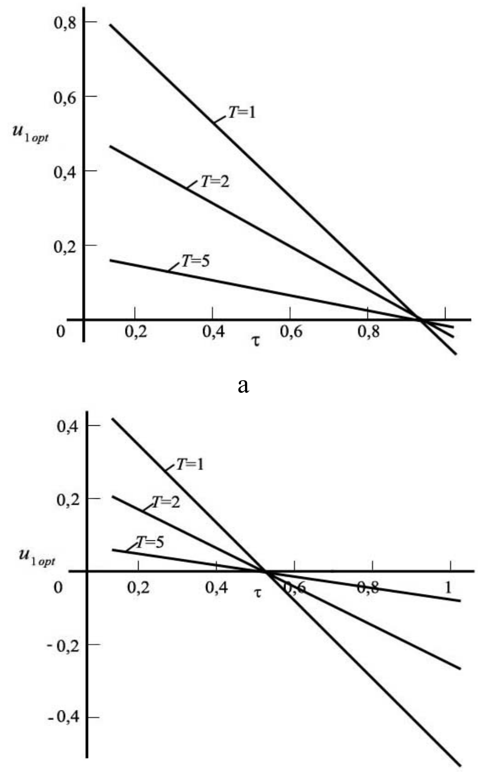


Рис. 2. Зображення проекції оптимальної фазової траєкторії руху ракети в поздовжньому напрямі (пучок сімейства траєкторій для різних значень початкової швидкості: крива 1 – $v_{10} = 4,2$; 2 – $v_{10} = 4,3$; 3 – $v_{10} = 4,4$)

Рис. 3 відображає оптимальне, згідно критерію (6), керування. Отримане керування відповідно до співвідношень (20, 21) визначає момент вимкнення прискорюючого керування при досягненні певної швидкості процесу, а вже тоді момент ввімкнення наступного керування для досягнення заданого кінцевого положення.



а

б

Рис. 3. Залежність в часі оптимального керування $u_{1opt}(\tau)$ для різних значень параметра T і компоненти початкової швидкості: а – $v_{10} = 4,2$; б – $v_{10} = 4,4$

Задання початкового фазового стану x^0 (4), керування $u_{opt}(\tau)$ (20) і часу тривалості процесу T однозначно визначає рух ракети. Цей рух полягає в тому, що фазова точка $\{x(\tau), v(\tau)\}$, яка визначає стан ракети, з часом переміщується, описуючи відповідну фазову траєкторію. Керування $u_{opt}(\tau)$ і фазову траєкторію $x(\tau)$ прийнято називати процесом керування [5, 9, 17, 20]. Тому, оптимальний процес керування цілком визначається керуванням, початковим фазовим станом і часом процесу керування. На рис. 4 в напівлогарифмічній шкалі (по осі ординат відкладається значення логарифма досліджуваної величини) показано окрему реалізацію складової $x_1(\tau)$ вектора з фазового простору, що описує процес оптимального керування.

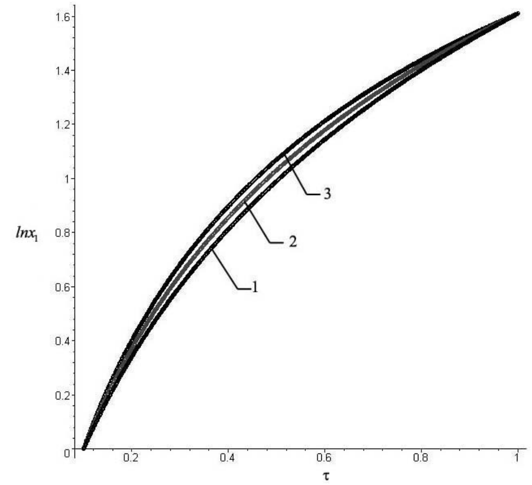


Рис. 4. Графік зміни фазової координати $x_1(\tau)$ в часі для оптимального лінійного керування $u_{1opt}(\tau)$: крива 1 – $v_{10} = 4,0$; 2 – $v_{10} = 4,5$; 3 – $v_{30} = 5$

В стаціонарному випадку маємо класичну навігаційну задачу Цермело [21], відповідно до якої в стаціонарному полі швидкостей $\vec{v}\{v_1(x_1,x_2), v_2(x_1,x_2)\}$, де x_1 і x_2 – прямокутні декартові координати, рухається матеріальна точка з сталою за величиною швидкістю $V\left(v_1^2 + v_2^2 = V\right)$. Дано: $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$; треба мінімізувати час

$$x_0(t_F) = t_F = \int_0^{t_F} dt,$$

необхідний для досягнення заданої кінцевої точки (x_{1F}, x_{2F}) посередністю вибору величини $u(t)$ – кута між напрямом швидкості V центра мас системи і віссю x_1 в заданий момент часу. Рівняння стану $(|\vec{v}| = V)$ має вигляд

$$\frac{dx_0}{dt} = 1, \quad \frac{dx_1}{dt} = v_1(x_1,x_2) + V\cos u,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = v_2(x_1,x_2) + V\sin u, \quad x_0 = t.$$

Звідси гамільтонова функція матиме вигляд

$$H \equiv \psi_1(v_1 + V\cos u) + \psi_2(v_2 + V\sin u) - 1,$$

де прийнято $\psi_0 = -1$.

Для виконання гамільтоніаном системи H принципу максимуму необхідно додержання рівностей

$$\cos u = -\psi_1 \Big/ \sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2}, \ \sin u = -\psi_2 \Big/ \sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2};$$

змінні ψ_1 і ψ_2 мають задовольняти спряженим рівнянням

$$\frac{d\psi_1}{dt} = -\left(\psi_1 \frac{dv_1}{dx_1} + \psi_2 \frac{dv_2}{dx_1}\right),$$

$$\frac{d\psi_2}{dt} = -\left(\psi_1 \frac{dv_1}{dx_2} + \psi_2 \frac{dv_2}{dx_2}\right)$$

та $M = \max\limits_u H = \psi_1 v_1 + \psi_2 v_2 - V\sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2} - 1 = 0$.

Якщо, зокрема, v_1 і v_2 сталі, то такі ж ψ_1, ψ_2, u; їх значення, разом з t_F, задовольняють умовам:

$$x_1(0) = x_{10}, \ x_2(0) = x_{20},$$

$$x_1(t_F) = x_{1F}, \ x_2(t_F) = x_{2F}.$$

Зрозуміло, що сталість оптимального керування геометрично визначається прямою. Однак для гнучкості керування таку пряму слід розшукувати в класі кусково-неперервних функцій, оскільки варіація кута $u(t)$ забезпечує корекцію траєкторії руху.

Важливим аспектом поставленої задачі є також ефективне застосування запропонованих алгоритмів при їх чисельній реалізації.

Висновки

Дослідження показують, що кожне переведення ракети з одного стану в інший супроводжується векторним керуванням, причому час переходу змінюється в кожному з сімейства сформульованих процесів і, в основному, визначається складовими вектора початкової швидкості. Встановлено, що час перемикання керуванням зміщується до середини проміжку часового інтервалу руху ракети при збільшенні початкової швидкості руху.

Постановка задачі оптимальної корекції та її реалізація на основі принципу максимуму ілюструє ефективність варіаційного числення і методів теорії оптимального керування для оптимізації режимів руху ракет, які мають сполучатись з конструкторськими напрацюваннями та слугувати запорукою коректності проведення дослідницьких робіт. Крім того, керовані сигнали в реальній системі здатні накладати обмеження на величину силових або енергетичних факторів, що обумовлює необхідність закладення обмежень на всі керування відповідно до степеней вільності, які постають в процесі розробки та проектування.

Зазначимо, що систематичний аналіз проблем польоту ракет передбачає використання такого математичного апарату, який дає змогу вирішити ключове питання, чим саме, без значної шкоди для остаточного результату вирішення проблеми, можна знехтувати, а чим – тимчасово, маючи на увазі можливість пізніше, в результаті відповідних уточнень, внести відповідні поправки. Тому найбільш вагомих і суттєвих результатів можна досягнути, використовуючи методи математичного моделювання сумісно з апроксимаційними методами. Оскільки випадок, коли матриці системи рівнянь руху ракети є сталими, досліджено досить повно, то предметом подальшого розгляду може стати узагальнення розглянутої задачі стосовно оптимального керування ракетами, як нестаціонарними системами в припущенні, що матриці лінійної системи рівнянь є повільно змінними функціями часу, і залежать від деякого малого параметра.

Список літератури

1. *Алексеев К.Б. Управление космическими летательными аппаратами. 2-ое изд. / К. Б. Алексеев, Г.Г. Бебенин. – М.: Машиностроение, 1974. – 402 с.*
2. *Алексеев К.Б. Маневрирование космических аппаратов / К.Б. Алексеев, Г.Г. Бебенин, В.А. Ярошевский. – М. : Машиностроение, 1970. – 416 с.*
3. *Задачи и методы теории бортовых терминальных систем управления / А.Я. Андриенко, В.П. Иванов, Б.Н. Петров, Ю.П. Портнов-Соколов // Автоматика и телемеханика. – 1976. – № 7. – С. 36–51.*
4. *Антомонов Ю.Г. Синтез оптимальных систем / Ю.Г. Антомонов. – М.: Наука, 1972. – 320 с.*
5. *Атанс М. Оптимальное управление / М. Атанс, П. Фалб. – М.: Машиностроение, 1968. – 763 с.*
6. *Ашимов А. Беспоисковые самонастраивающиеся системы идентификации / А. Ашимов, Д.Ж. Сыздыков, Г.И. Тохтабаев // Автоматика и телемеханика. – 1973. – № 2. – С. 184-188.*
7. *Исследование влияния параметров работы реактивного двигателя на дальность и кучность стрельбы реактивных снарядов / [В.И. Макеев, В.И. Грабчак, П.Е. Трофименко, Ю.И. Пушкарев] // Системи обробки інформації. – Х.: ХУПС, 2008. – Вип. 6(73). – С. 77-81.*
8. *Розрахунок деривaційного відхилення літальних апаратів, що обертаються / [В.І. Макєєв, В.І. Грабчак, П.Є. Трофименко, Ю.І. Пушкарьов] // Системи управління, навігації та зв'язку. – 2008. – Вип. 3(7). – С. 116-119.*
9. *Фізичні основи ракетної зброї. Навчальний посібник / В.І. Грабчак, Г.О. Гозуватенко, А.М. Зубков та ін. – Львів: АСВ, 2012. – 459 с.*
10. *Алексеев В.М. Оптимальное управление / В.М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1979. – 432 с.*
11. *Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления / Л. Янг. – М.: Мир, 1974. – 428 с.*
12. *Belman R. Adaptive control processes / R. Belman. – New York: Princ. Univ. Press, 1961. – 255 p.*
13. *Ванюрихин Г.И. Синтез систем управления движением нестационарных объектов / Г.И. Ванюрихин, В.М. Иванов. – М.: Машиностроение, 1988. – 168 с.*
14. *Болтянский В.Г. Математические методы систем управления / В.Г. Болтянский. – М.: Наука, 1969. – 327 с.*
15. *Бортовые терминальные системы управления: Принципы построения и элементы теории / Ю.Н. Петров, Ю.П. Портнов-Соколов, А.Я. Андриенко, В.П. Иванов. – М.: Машиностроение, 1983. – 200 с.*
16. *Брайсон А. Прикладная теория оптимального управления / А. Брайсон, Хо Ю-Ши. – М.: Мир, 1974. – 208 с.*
17. *Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами / А.Г. Бутковский. – М.: Наука, 1975. – 568 с.*
18. *Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л.Э. Эльсгольц. – М.: Наука, 1969. – 424 с.*
19. *Асимптотические методы в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях / Н.И. Шкиль, А.Н. Вороной, В.Н. Лейфура. – К.: Вища школа, 1985. – 248 с.*
20. *Нелинейная оптимизация систем автоматического управления / под. ред. В.М. Пономарева. – М.: Машиностроение, 1970. – 308 с.*
21. *Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1975. – 831 с.*

Надійшла до редколегії 22.10.2014

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Л.І. Сопільник, Академія Сухопутних військ ім. гетьмана П. Сагайдачного, Львів.

ОСНОВНЫЕ АСПЕКТЫ ОПИСАНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ РАКЕТЫ

В.И. Грабчак, Е.Г. Іваник, С.А. Цыбуля

Изложена постановка и процедура реализации оптимального полета ракеты постоянной мощности. Построено оптимальное управление переходом системы из начального состояния в заданное конечное положение на основе обобщения принципа максимума, сформулированного в виде задачи оптимальной коррекции.

Ключевые слова: *движение летательного аппарата, объект управления, задача оптимального управления, функционал, система дифференциальных уравнений движения, функция Гамильтона.*

THE BASIC ASPECTS OF DESCRIPTION TO PROBLEM OF OPTIMAL HIGH-SPEED TO MOVING BY OPERATING OF ROCKET

V.I. Grabchak, E.G. Ivanyk, S.A. Tcybulya

It is made statement and procedure of optimal realization of flying rocket of constant capacity. There is constructed the optimal direction of transition from initial state to set finish on the generalization of maximum principle which is formulated in form optimal correction problem.

Keywords: *moving of flying object, object of operation, the problem of optimal operation, functional, system of differential equations of moving, Hamilton function.*