УДК 658.51

С.В. Кухаренко,
кандидат технічних наук

МОДЕЛЬ ПЛАНУВАННЯ ВИРОБНИЦТВА ПРОДУКЦІЇ ПРИ ОБМЕЖЕНИХ РЕСУРСАХ ПРОМИСЛОВОГО ПІДПРИЄМСТВА

У статті розглядається метод максимізації обсягу продукції, який дає можливість ефективніше підійти до рішення задачі оптимального планування виробництва продукції за допомогою введення кількісної оцінки системи пріоритетів.

Ключові слова: *метод, функції пріоритету, планування виробництва, ресурси.*

В статье рассматривается метод максимизации объема продукции, который дает возможность более эффективно подойти к решению задачи оптимального планирования производства продукции с помощью ввода количественной оценки системы приоритетов.

Ключевые слова: *метод, функции приоритета, планирование производства, ресурсы.*

Method of the maximization of volume of production, enabling more effectively coping with the tasks of the optimum planning of production of goods by the input of quantitative estimation of the system of priorities, is examined.

Keywords: *method, functions of priority, planning of production, resources.*

Розвиток сучасної світової економіки характеризується посиленням її організованості і планомірності. Конкурентне середовище і ринкова орієнтація вимагають від керівників уміння виділити перспективні напрями розвитку, ухвалювати ефективні стратегічні управлінські рішення, зменшувати часові і грошові витрати [1, 2]. Планування дозволяє визначити найбільш важливі, пріоритетні роботи, цілеспрямовано використовувати для їх здійснення наявні ресурси, забезпечувати оптимальну їх реалізацію [3]. Основне завдання планування виробництва – розрахунок оптимального плану випуску продукції, який необхідно втілити в життя для того, щоб підприємство могло ефективно функціонувати надалі, з урахуванням суспільної потреби у цій продукції, наявності сировинних і енергетичних ресурсів, виробничих можливостей, забезпеченості трудовими, фінансовими та іншими ресурсами, які впливають на обсяг продукції, що випускається.

Аналіз попередніх досягнень у сфері планування виробництва продукції при обмежених ресурсах [4–6] показує, що зазвичай, при вирішенні завдань планування виробництва продукції при обмежених ресурсах, використовують побудову лінійної моделі зі скалярним критерієм оптимальності (максимум прибутку в грошовому виразі тощо) та формування оптимального плану методами лінійного програмування. Недоліком цього підходу є той факт, що якість плану не завжди можна оцінити скалярним показником [7]. Найповніше оцінює рішення задачі векторний показник, але труднощі рішення багатокритеріальної задачі перешкоджають його застосуванню [8].

Отже, враховуючи вищевикладене, пропонується метод вирішення задачі максимізації обсягу продукції при обмежених ресурсах у натуральному виразі за допомогою введення системи функцій пріоритету щодо використання ресурсів при таких обмеженнях:

$$\sum_j a_{ij} x_j \le b_i, \ \left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right); \tag{1}$$

$$d_j \le x_j \le D_j, \ \left(j = \overline{1,n}\right), \tag{2}$$

де a_{ij} – потреба в ресурсах i-го виду для виробництва одиниці продукції j-го виду, x_j – обсяг виробництва продукції j-го виду, b_i – обсяг i-го виду ресурсів, d_j, D_j – мінімальний та максимальний обсяги виробництва j-го виду продукції, n, m – число видів продукції та ресурсів.

У процесі планування, як правило, прагнуть збільшити обсяг продукції від мінімального значення d_j до максимального D_j. Причому d_j розглядається як найгірше з допустимих значень змінної x_j, а D_j – як якнайкраще. Проте можливий і протилежний підхід, коли найгіршим з можливих значень x_j, може бути верхня межа D_j, а якнайкращим d_j, тобто при плануванні прагнуть зменшити обсяг виробництва x_j, від D_j до d_j.

Позначимо через M_1 і M_2 множину індексів j, відповідних видів продукції x_j, та замінимо перемінні

$$\begin{aligned} y_j &= \left(x_j - d_j\right) / \left(D_j - d_j\right),\ j \in M_1, \\ y_j &= \left(D_j - x_j\right) / \left(D_j - d_j\right),\ j \in M_2. \end{aligned} \tag{3}$$

У нових перемінних завдання максимізації обсягу продукції можна записати у такому вигляді: $y = \left\{y_j,\ j = \overline{1,n}\right\} \to \max$ при обмеженнях: $\sum_j a'_{ij} y_j \le b'_i,\ \left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right)$; $0 \le y_j \le 1,\ \ j = \overline{1,n}$,

де

$$a'_{ij} = \begin{cases} a_{ij}\left(D_j - d_j\right), & j \in M_1; \\ -a_{ij}\left(D_j - d_j\right), & j \in M_2; \end{cases} \tag{4}$$

$$b'_i = b_i - \sum_{j \in M_i} a_{ij} d_j - \sum_{j \in M_2} a_{ij} D_j, \quad i = \overline{1,m}. \tag{5}$$

Приймемо, що y_i – функція, яка не убуває, деякої змінної t, визначена на відрізку $0 \le t \le 1$ таким чином: $y_j(0) = 0,\ y_j(1) = 1,\ \ j = \overline{1,n}$. Тоді для кількісної оцінки плану може бути взята перемінна t. Внаслідок чого отримуємо математичний вираз для цільової функції, який відповідає критерію оптимальності вихідної задачі. Але при цьому виникає проблема визначення системи функцій $\left\{ y_j(t),\ j=\overline{1,n} \right\}$.

Розглянемо, який сенс можна дати цим функціям. Припустимо, що деякі види ресурсів дефіцитні. У цьому випадку система функцій $\left\{ y_j(t),\ j=\overline{1,n} \right\}$ стає такою, що разом зі зростанням перемінної t деякі з цих функцій зростають швидше за останніх. Це визначає більш швидший в порівнянні з останніми зріст обсягу виробництва продукції x_j. Потреба в ресурсах на виробництво цієї групи продукції буде враховуватися в першу чергу. Отже, вибір конкретної функції $y_j(t)$ визначає систему пріоритетів у використанні ресурсів. Введемо кількісну оцінку системи пріоритетів $\left\{ p_j,\ j=\overline{1,n} \right\}$, де p – деяке число. Систему функцій $\left\{ y_j(t),\ j=\overline{1,n} \right\}$ замінимо функцією $F(t,\ p)$, яка визначається тотожністю $F(t,\ p) \equiv y_j(t), \quad j=\overline{1,n}$.

У зв'язку з введенням системи пріоритетів уточнена початкова задача формується таким чином: максимізувати обсяг виробництва продукції при обмежених ресурсах й заданих інтервалах зміни обсягу виробництва кожного виду продукції, при цьому ресурси повинні розподілятися між різними видами продукції відповідно до встановленої системи пріоритетів. При кожному фіксованому наборі p_j, $j=\overline{1,n}$ початкова задача перетворюється у наступну задачу математичного програмування: максимізувати параметр t при обмеженнях

$$\sum_j a'_{ij} F(t,\ p_j) \le b'_i, \quad \left(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}\right) \tag{6}$$

$$0 \le t \le 1, \tag{7}$$

де $F(t,\ p_j)$ – функція, яка не убуває відносно змінній i, причому $F(0,\ p_j)=0$, $F(1,\ p_j)=1$.

Для практичного застосування придатні такі функції пріоритету, які забезпечують просту залежність результатів рішення задачі від системи пріоритетів:

1. Усі види продукції мають однаковий пріоритет $p_j = p$. Тоді $F_1(t,\ p) = F(t)$. Функцію $F_1(t,\ p)$ можна представити простим математичним виразом $F_1(t) \equiv t$, який легко інтерпретується: значення t визначає частку інтервалу $(D_j - d_j)$, в межах якого виробництво продукції забезпечене ресурсами.

2. Усі види продукції мають різний пріоритет, причому $p_j = j$ й вищий пріоритет відповідає $p_1 = 1$. Функцію пріоритету при $p=\overline{1,n}$ визначимо таким чином:

$$F_2(t,\ p) = \begin{cases} 0 & \text{пðè} \quad t \le (p-1)/n; \\ nt+1-p & \text{пðè} \quad (p-1)/n \le t \le p/n; \\ 1 & \text{пðè} \quad t > p/n. \end{cases} \tag{8}$$

Ця функція дозволяє при плануванні спочатку забезпечити якнайкращий обсяг виробництва для продукції з пріоритетом p=1, а потім первинний обсяг кожного виду ресурсів зменшити на величину ресурсів, використаних на виробництво продукції з пріоритетом p=1. На наступному етапі переходять до планування виробництва продукції з пріоритетом p=2 і так далі.

3. Нехай функція пріоритетів має вигляд $F_3(t,\ p) = t^p,\ 0 \le p \le \infty$. Очевидно, що меншому значенню параметру p відповідає більший пріоритет. Відношення $F_3(t,\ p_1)/F_3(t,\ p_2) = t^{p_1 - p_2}$ характеризує відношення приростів (у долях інтервалу $D_j - d_j$) обсягів виробництва двох видів продукції.

4. Наступну функцію пріоритету можна розглядати як лінійний аналог попередньої:

$$F_2(t,\ p) = \begin{cases} t/p, & 0 < p \le 1, \quad 0 \le t \le p; \\ 1, & 0 < p \le 1, \quad p < t; \\ 0, & 1 \le p < \infty, \quad 0 \le t \le 1 - 1/p; \\ 1 - p(1-t), & 1 \le p < \infty, \quad 1 - 1/p \le t \le 1. \end{cases} \tag{9}$$

Ця функція зручніше для обчислень, ніж функція t^p. Також як і для $F_3(t,\ p)$, меншому значенню параметру p відповідає більший пріоритет. Відношення приросту виробництва двох видів продукції обернено пропорційно до відношення їх пріоритетів: $F_4(t,\ p_1)/F_4(t,\ p_2) = p_2/p_1$ для $0 < p \le 1$.

Функція $F(t,\ p)$ для будь-якого допустимого значення t визначає обсяг продукції, виробництво якого забезпечено ресурсами. Виробництво частини продукції, що залишилася $1 - F(t,\ p)$, може бути не забезпечено ресурсами. Для $0 \le p < \infty$ відношення обсягів двох видів продукції, виробництво, яких може виявитися не забезпеченим ресурсами, дорівнює відношенню їх пріоритетів: $1 - [F_4(t,\ p_1)]/[1 - F_4(t,\ p_2)] = p_2/p_1$.

Алгоритм рішення задачі (1) і (2) для кусково-лінійних функцій пріоритету F_1, F_2, F_4 вирішується в чотири етапи. На першому етапі з системи обмежень виключають рівності, на другому − модифікують початкову задачу, на третьому − вирішують цю задачу, на четвертому − переходять до рішення початкової задачі.

Система обмежень (1) містить як нерівності, так і рівності. Наявність рівностей означає, що деякі змінні є лінійною комбінацією решти перемінних. Низько-пріоритетні перемінні виключають з системи обмежень (1) і (2), їх замінюють відповідними лінійними комбінаціями. У результаті з системи (1) виключають рівності, а замість кожного з них додають по дві нерівності, отриманих з відповідних нерівностей системи (2). На другому етапі необхідно перейти за допомогою співвідношень (4) і (5) від початкової задачі до задачі (6) та (7).

Алгоритм рішення модифікованої задачі зручніше сформулювати таким чином:

$$\sum_j a'_{ij} F(t,\ p_1) \le b'_i, \quad \left(i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n}\right); \tag{10}$$

$$F(t,\ p_j) \le 1, \quad (j = \overline{1,n}), \tag{11}$$

$$F(t,\ p_j) \ge 0, \quad (j = \overline{1,n}), \tag{12}$$

$$0 \le t \le 1, \tag{13}$$

де $F(t,\ p_j)$ − одна з функцій пріоритету F_1, F_2, F_4.

При рішенні модифікованої задачі спочатку визначають максимальне значення перемінної t, що задовольняє системі обмежень (10)−(13), потім періодично виключають з систем (10), (11) ті нерівності, які перешкоджають збільшенню значень перемінної t, після чого значення t знову збільшують. Цей процес продовжується аж до виключення всіх нерівностей з систем (10) і (11). При цьому вважають, що функції $F(t,\ p_j)$, які входять в них, досягли свого оптимального значення F_j^0.

На першому етапі рішення модифікованої задачі серед функцій $F(t,\ p_j)$ виділяють ті, які входять в систему тільки з негативними або нульовими коефіцієнтами a'_{ij}. Із збільшенням значень цих функцій нерівності (8) не можуть бути порушені, тому цим функціям привласнюють максимально допустиме значення, яке дорівнює одиниці.

Якщо декільком видам продукції привласнений один і той же пріоритет, то відповідні їм функції $F(t,\ p_j)$ тотожні, що дозволяє скоротити число складових у лівих частинах нерівностей системи (10) і нерівностей в системі (11) та (12).

Область визначення функції пріоритету розбивають по перемінній t (відрізок 0,1) на частини (інтервали лінійності) так, щоб на кожній з них система нерівностей (10)−(12) була лінійною. Точки розбиття відрізка − значення перемінної t, при яких функція пріоритету $F(t,\ p)$ для деякого значення j починає зростати від нуля або стає рівною одиниці. Потім вирішується система лінійних нерівностей з однією перемінною t на послідовності суміжних інтервалів лінійності, починаючи з інтервалу, що містить точку t=1. Перший етап рішення модифікованої задачі закінчується як тільки буде знайдений інтервал, що містить значення перемінної t, що задовольняє системі (10)−(12), і серед цих значень буде знайдено максимальне. Відсутність такого інтервалу означає, що для заданої системи пріоритетів задача немає рішення або початкова задача взагалі не має рішення.

Для отримання додаткової інформації про ресурси може бути використана ітераційна процедура, суть якої полягає в наступному. Кожна ітерація включає рішення задачі (10)−(13) з деякими значеннями $B_i(i = \overline{1,m})$ правих частин нерівностей (10) і перехід до нових значень B_i:

$$B_i^{k+1} = B_i^k \pm \left(1/2^k\right) \Delta_i^0, \quad k = 0,1,2,\ldots; \quad i = \overline{1,m}; \tag{14}$$

$$B_i^0 = b'_i + \Delta_i^0; \quad \Delta_i^0 = \max\left(0, \sum\nolimits_j a'_{ij} - b'_i\right). \tag{15}$$

Знак “додати” ставитися, якщо на k-му кроці рішення задачі не отримане і навпаки; значення B_i^k − визначається з точністю $1/2^k\ \Delta_i^0$. Нерівності, що звернулися в рівність, указують на дефіцит відповідних ресурсів. Дефіцит складає $B_j^K - b_i'$, $\left(i = \overline{1, m}\right)$.

Другим етапом рішення модифікованої задачі є циклічний процес, в кожному циклі якого з систем (10) й (11) виключають частину нерівностей, а значення змінної i збільшують. Рішення завершується виключенням всіх нерівностей. На цьому етапі можна не враховувати обмеження (12) та нерівності системи (10), у яких $a_{ij}' \le 0$.

Умовою початку циклу ототожнюється із зверненням одного або відразу декількох нерівностей систем (10) й (11) в точці t' у рівність. Очевидно, що без зміни прийнятої в задачі системи пріоритетів значення функцій $F\left(t, p_j\right)$, що входять у ці нерівності, збільшити не можна. Тобто ці функції досягли свого оптимального значення F_j^0 і далі залишатимуться незмінними. Це рівносильне скороченню числа функцій $F\left(t, p_j\right)$ і нерівностей в системах (10) й (11).

На третьому етапі з системи виключаються нерівності, що обернулися в точці t' у рівність, і створюється можливість для зростання значень перемінної t. При цьому з системи будуть виключені також нерівності функцій $F\left(t, p_j\right)$, які досягли свого оптимального значення. Цей процес закінчується виключенням з систем (10) й (11) всіх нерівностей і визначенням оптимальних значень для всіх функцій $F\left(t, p_j\right)$.

На четвертому етапі за формулою

$$x_i = \begin{cases} d_j + \left(D_j - d_j\right)F_j^0, & j \in M_1; \\ D_j - \left(D_j - d_j\right)F_j^0, & j \in M_2, \end{cases} \tag{16}$$

переходять до початкової задачі. Значення виключених перемінних x_j визначають відповідними лінійними комбінаціями перемінних x_j.

Рішення задачі буде оптимальним за Парето [9, 10], якщо у вказаному процесі не було виключено жодної нерівності з коефіцієнтами a_{ij}' різного знаку (окрім виключення нерівностей з ненегативними коефіцієнтами). Останнє легко встановити, якщо виключення нерівностей у кожному циклі починати з нерівностей, що мають тільки ненегативні коефіцієнти, тоді рішення задачі з ненегативними коефіцієнтами a_{ij}' завжди оптимально за Парето.

Підводячи підсумок, можна зробити такі висновки: отриманий математичний вираз для цільової функції, який відповідає критерію оптимуму; введена кількісна оцінка системи пріоритетів; рішення задачі максимізації обсягу продукції в натуральному виразі, що здійснюється за чотири етапи. Запропонована модель дозволяє ефективніше підійти до рішення задачі планування виробництва продукції при обмежених ресурсах, при цьому ресурси розподіляються між різними видами продукції, що виготовляється, відповідно до встановленої системи пріоритетів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Лобода О.М.* Вирішення задачі синтезу організаційної структури / О.М. Лобода, С.В. Кухаренко // Таврійський науковий вісник. – Херсон : Айлант, 2010. – Вип. 71. – С. 272–277.

2. *Кухаренко С.В.* Підхід до синтезу структури і властивостей системи управління / С.В. Кухаренко // Вісник Кременчуцького державного університету імені Михайла Остроградського. – Кременчук : КДУ, 2010. – Вип. 1/2010 (60). – Ч. 1. – С. 55–57.

3. *Лапушинская Г.К.* Планирование в условиях рынка : учеб. пособ. / Г.К. Лапушинская, А.Н. Петров. – М. : Дашков и Ко, 2003. – 252 с.

4. *Пелих А.С.* Экономико-математические методы и модели в управлении производством / А.С. Пелих, Л.Л. Терехов, Л.А. Терехова. – Ростов н/Д : Феникс, 2005. – 248 с.

5. *Горемыкин В.А.* Планирование на предприятии : учеб. / В.А. Горемыкин. – 5-е изд., перераб. и доп. – М. : Высшее образование, 2009. – 634 с.

6. *Грибанова Н.Н.* Планирование на предприятии : учеб. пособ. / Н.Н. Грибанова, Ю.И. Колесник, О.В. Чистякова. – Иркутск : Изд-во БГУЭП, 2009. – 325 с.

7. *Бережная Е.В.* Математические методы моделирования экономических систем : учеб. пособ. / Е.В. Бережная, В.И. Бережной. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Финансы и Статистика, 2006. – 432 с.

8. *Кухаренко С.В.* Методы, модели и алгоритмы оптимизации автоматизированного планирования и управления промышленным производством : дисс. ... канд. тех. наук : 05.13.06 / Кухаренко Сергей Викторович. – Херсон, 2005. – 173 с.

9. *Кулик В.Т.* Автоматизация объектов управления. – К. : Наукова думка, 1968. – С. 67–82.

10. *Вечканов Г.С.* Экономическая теория : учеб. для вузов. 3-е изд. – СПб. : Питер, 2011. – С. 194–196.

Отримано 22.04.2013