УДК 621.37:519.65.001.57

Г.І. Ларіонов, М.Г. Ларіонов

ПРО НАБЛИЖЕНЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ РЯДУ ТЕЙЛОРА ДЛЯ *N*-ВИМІРНИХ ФУНКЦІЙ ДОБУТКОМ ЙОГО ОДНОМІРНИХ ПРЕДСТАВЛЕНЬ

Анотація. У наведеній роботі розглянута можливість представлення ряду Тейлора для багатовимірних функцій добутком його одномірних представлень. Наведено теорему про верхню межу представлення для n вимірних функцій у вигляді добутку одномірних. Наведено приклад.
Ключові слова: багатовимірна функція, ряд Тейлора, одновимірні функції, добуток.

Для функції $F(X)=F(x_1,x_2..,.x_n)$ – неперервної функції *n* незалежних змінних $x_1,x_2,...,x_n$ і означеній у замкнутій області $\overline{D}$ у околі точки $M(x_0)\in\overline{D}$ існує ряд Тейлора, який є однією з найпоширеніших процедур при оцінці поведінки функції у її околі [1]. Таке представлення для одномірних функцій *n*=1 є зручним і не викликає жодних ускладнень при визначенні його збіжності:

$$F(x)\approx\sum_{\nu=0}^{n}\frac{F^{(\nu)}(x_0)}{\nu}(x-x_0)^{\nu}+R_{\nu}(x), \quad (1)$$

де $R_{\nu}(x)$ – залишковий член ряду; ν – порядок похідної.

Процедура визначення його ускладнюється коли мірність простору *n*>3. Ця обставина істотно зменшує привабливість використання ряду Тейлора для визначення функції у околі точки $M\left(x_1^0,x_2^0,x_3^0,...,x_n^0\right)$. Так для випадку *n*=2 ряд Тейлора має вигляд:

$$F(x,y)\approx\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(\left\{(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right\}^{k}F\right)\Bigg|_{x_0,y_0}+R_n(x,y), \quad (2)$$

де $R_n(x,y)$ – залишковий член ряду; *k* – порядок частинних похідних.

Ускладнює процедуру необхідність контролювати збіжність такого ряду, результат визначення якої не завжди є позитивним. Представляється актуальним задача наближеного представлення ряду Тейлора для *n* вимірних функцій більш простими бажано одномірними функціями.

Відомо, що в околі точки $M(X_0) \in \overline{D}$, де $X_0 = X\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$, функція може бути представлена у різними способами. Для інженерних розрахунків особливого значення набуває представлення функції у вигляді добутку функцій, кожна з яких є залежною лише від однієї змінної [2].

Нижче наведено теорему про існування представлення функцій у околі точки *n* мірного простору добутком функцій, кожна з яких залежить від однієї змінної, та отримано верхню межу похибки такого представлення [2]

Нехай функція $F(X) = F(x_1, x_2.., .x_n)$ – неперервна функція *n* незалежних змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, означена у замкнутій області *D*. Вважаємо, що функція *F* має частинні похідні першого порядку, обмежені у області *D*. Припустимо, що $X_0 = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots., x_n^0\right)$ – деяка точка, що належить *D*.

Нехай $\Delta_{X_0} = \Delta_{x_1^0} \otimes \Delta_{x_2^0} \otimes \ldots \otimes \Delta_{x_n^0}$, де $\Delta_{x_i} = [a_i, b_i]$, $a_i + b_i = 2x_i^0$ $(i = \overline{1, n})$; a_i та b_i – довільні дійсні числа; *N* і *K* – деякі додатні сталі. Символ $\otimes$ означає декартів добуток множин. Іншими словами, $\Delta_{x_0} = \left\{X = (x_1, x_2, \ldots x_n) : x_i \in \Delta_{x_i^0}\right\}$, $i = \overline{1, n}$.

Нехай $\Delta_{X_0} \subset D$ (рис. 1).

 ISSN 1562-9945

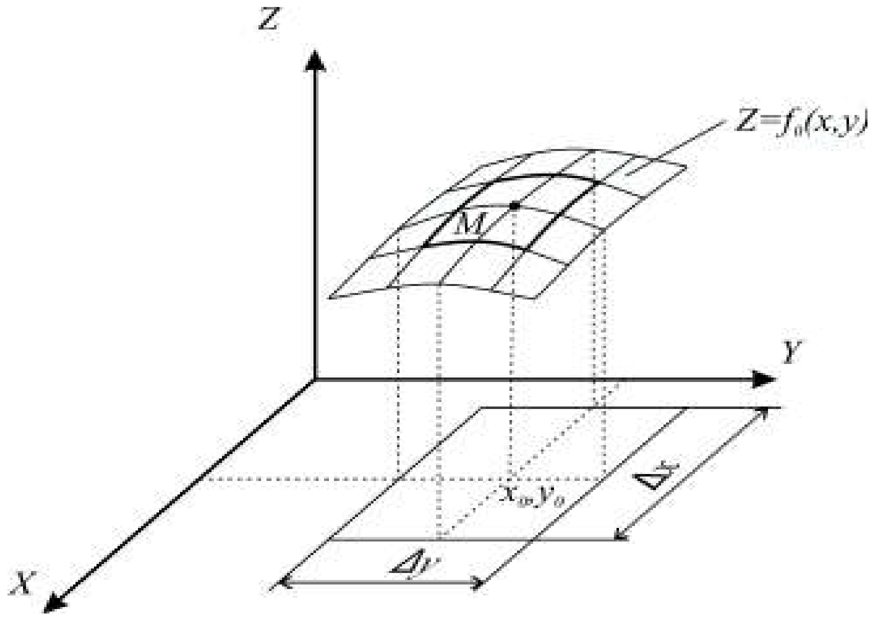

Рисунок 1 - Вибір околу точки (x_0,y_0)

Умови обмеження функції $F(X)$ можна записати у вигляді:

$$\max_{X\in\Delta_{X_0}} \left|F(X)\right| \le N;$$

$$\max_{X\in\Delta_{X_0}} \left\{\left|\frac{\partial F(X)}{\partial x_1}\right|, \left|\frac{\partial F(X)}{\partial x_2}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial F(X)}{\partial x_n}\right|\right\} \le K,$$

де N та K – деякі сталі.

Фіксуючи зазначеним нижче чином $(n-1)$ змінну, утворимо n наступних функцій:

$$f_1(x_1) = F\left(x_1, x_1^0, \ldots x_n^0\right);$$

$$f_2(x_2) = F\left(x_1^0, x_2, \ldots x_n^0\right);$$

…………………………….

$$f_n(x_n) = F\left(x_1^0, x_2^0, \ldots x_n\right).$$

Вважаємо, що $f_i(x_i) \in C(\Delta_{x_i^0})\ (i = \overline{1,n})$, де $C(\Delta_{x_i^0})$ – множина функцій, неперервних на відрізку $\Delta_{x_i^0}$. Очевидно, що функція $f_i\left(i = \overline{1,n}\right)$ обмежена на відрізку $\Delta_{x_i^0}$, тобто

$$\max_{x_i\in\Delta_{x_i^0}} \left|f_i(x_i)\right| \le M_i\left(i = \overline{1,n}\right),$$

де M – довільна стала.

Нехай $G_i \subset C(\Delta_{x_i^0})$, $i=\left(\overline{1,n}\right)$ – деякий підпростір, що належить $C(\Delta_{x_i^0})$. Вважаємо, що підпростір G_i є зліченим і всюди щільним у просторі $C(\Delta_{x_i^0})$, тобто для довільної функції $f_i(x_i) \in C(\Delta_{x_i^0})$, $i=\left(\overline{1,n}\right)$ та будь-якого числа $\delta > 0$ існує деяка функція $g \in G_i$, така, що

$$\max_{x_i \in \Delta_{x_i^0}} \left| f_i(x_i) - g_i(x_i) \right| \le \delta_i,\ i=\left(\overline{1,n}\right).$$

Розглянемо на множині G_i деякий скінченновимірний підпростір $G(n_i) \in G_i$ такий, що $\dim G(n_i) = n_i$. При цьому для довільної функції $f \in C(\Delta_{x_i^0})$ маємо

$$E_{n_i}(f)_C = \inf_{g \in G(n_i)} \max_{x_i \in \Delta_{x_i^0}} \left| f(x_i) - g(x_i) \right| \le C_f \phi(n_i),$$

де $E_{n_i}(f)_C$ – найкраще наближення функції $f \in C\left(\Delta_{x_i^0}\right)$ елементами скінченновимірного підпростору $G(n_i)$; C_f – деяка стала, яка залежить від функції f та не залежить від числа n_i; $\varphi(n_i)$ – деяка спадна функція, яка визначається апроксимативними характеристиками підпростору $G(n_i)$ і така, що $\phi(n_i) \to 0$ при $n_i \to \infty$.

Визначимо наступний підпростір $\Omega\left(\Delta_{X_0}\right)$, який складається з функцій такого виду:

$$\phi(X) = \alpha \prod_{i=1}^{n} g_i(x_i),$$

де α – довільна стала; $g_i \in G_i, \left(i=\overline{1,n}\right)$ – будь-які функції.

Позначимо через

$$E\left(F, \Omega\left(\Delta_{X_0}\right)\right)_C = \inf_{\phi \in \Omega\left(\Delta_{X_0}\right)} \max_{X \in \Delta_{X_0}} \left| F(X) - \phi(X) \right|$$

найкраще наближення функції $F \in C\left(\overline{D}\right)$, де $\overline{D}$ – замикання множини D елементами підпростору $\Omega\left(\Delta_{X_0}\right)$, а $C\left(\overline{D}\right)$ – клас всіх неперервних на $\overline{D}$ функцій.

 ISSN 1562-9945

Теорема. Нехай $\delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n)$ – деяка точка *n*-вимірного простору, така, що $0 < \delta_i < \varepsilon, \left(i = \overline{1,n}\right), \varepsilon > 0$ – довільна стала; функція $F \in C\left(\overline{D}\right)$ має на множині *D* частинні похідні першого порядку і задовольняє вищенаведеним обмеженням.

Тоді на множині $\Omega\left(\Delta_{X_0}\right)$ існує така функція $\phi_*(X) = \alpha_* \prod_{i=1}^{n} g_i^*(x_i)$, для якої має місце наступна нерівність:

$$E\left(F, \Omega(\Delta_{X_0})\right) \le \|F - \phi_*\| \le C_F \left(\sum_{i=1}^{n} \left|\Delta_{x_i}\right| \right),$$

де $\left|\Delta_{x_i^0}\right|$ – довжина відрізку $\Delta_{x_i^0}, \left(i = \overline{1,n}\right)$; C_F – деяка стала, яка залежить від функції *F* і не залежить від *n*.

Таким чином функцію двох змінних можна представити у вигляді:

$$F(x,y) = Af(x,y_0)f(x_0,y) = Ag_1(x)g_2(y),$$

де $g_1(x); g_2(y)$ – функції, які апроксимують функції $F(x,y_0); F(x_0,y)$.

Якщо у якості функцій апроксимації $g_1(x); g_2(y)$ взяти одномірне представлення функцій $F(x,y_0); F(x_0,y)$ рядами Тейлора (1), тобто:

$$g_1(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{F^{(\nu)}(x,y_0)}{\nu!}(x-x_0)^{\nu}; g_2(y) = \sum_{\kappa=0}^{n} \frac{F^{(k)}(x_0,y)}{k!}(y-y_0)^{k},$$

тоді матимемо

$$F(x,y) = A\sum_{\nu=0}^{n} \frac{g_1^{(\nu)}(x_0)}{\nu!}(x-x_0)^{\nu} \sum_{\kappa=0}^{n} \frac{g_2^{(k)}(x_0,y)}{k!}(y-y_0)^{k}. \qquad (3)$$

Нехай в формулах (2) і (3) функція визначається в одній і тій же точці $M(x_0,y_0)$. Порівняємо похибки у визначенні функції $F(x,y)$ у околі цієї точки згідно з формулами (2) і (3). У якості тестової функції оберемо $F(x,y) = x^4 + y^4, (x,y) \in (0,1)$ (рис. 2). Виконано графічне порівняння двох представлень функції у околі точки $M(X_0)$; $X_0 = (x_0, y_0) = (0,5, 0,5)$.

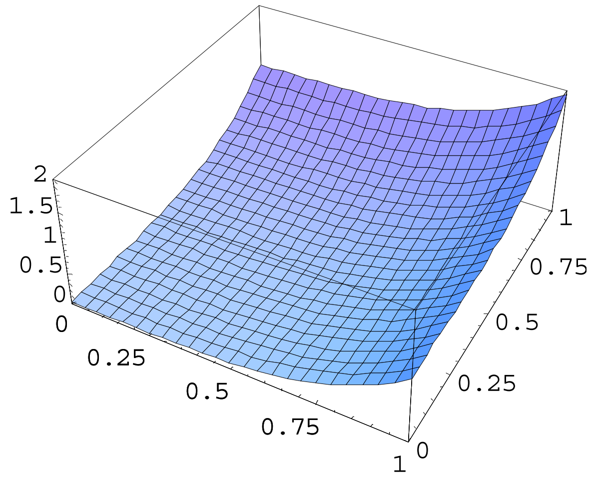

Рисунок 2 - Представлення функції рядом Тейлора для *n*=2

Ряд Тейлора для *n*=2 матиме вид (рис. 3):

$$f(x,y) = 0,125 + 0,5(x-0,5) + 1,5(x-0,5)^2 + 2,0(x-0,5)^3 + 1,0(x-0,5)^4 +$$
$$+ 0,5(y-0,5) + 1,5(y-0,5)^2 + 2,0(y-0,5)^3 + 1,0(y-0,5)^4 .$$

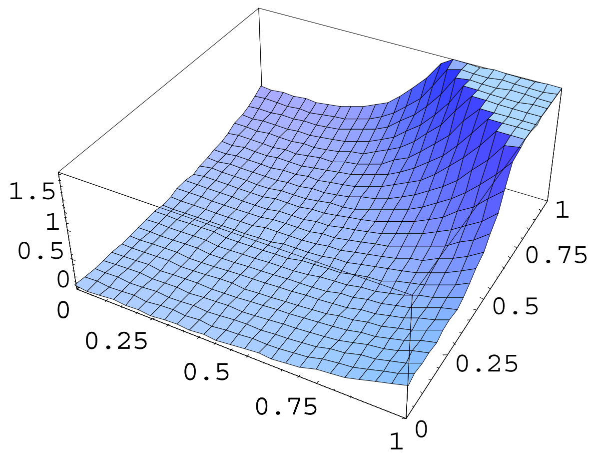

Рисунок 3 - Представлення функції добутком одномірних рядів Тейлора

У наведеному рис. 3:

$$g_1(x) = 0,125 + 0,5(x-0,5) + 1,5(x-0,5)^2 + 2(x-0,5)^3 + (x-0,5)^4 ;$$

$$g_2(y) = 0,125 + 0,5(y-0,5) + 1,5(y-0,5)^2 + 2(y-0,5)^3 + (y-0,5)^4 .$$

Порівняння наведених функцій представлено на рис. 4.

 ISSN 1562-9945

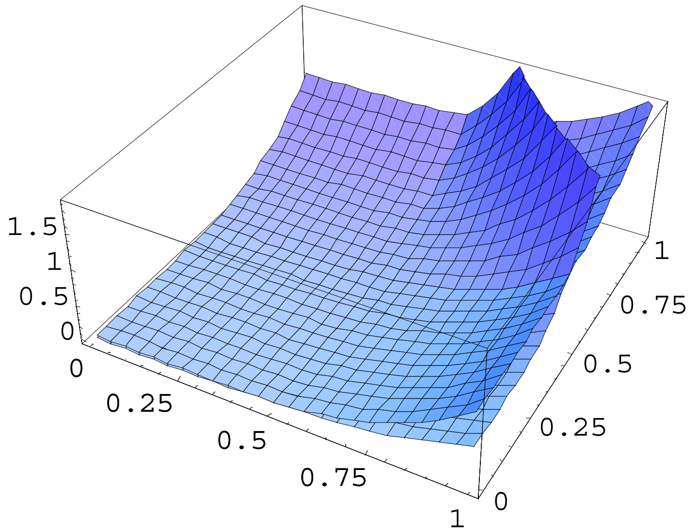

Рисунок 4 - Суміщене графічне зображення двох представлень функції

Розподіл відносної похибки у околі точки $M(X_0)$ представлено на рис. 5.

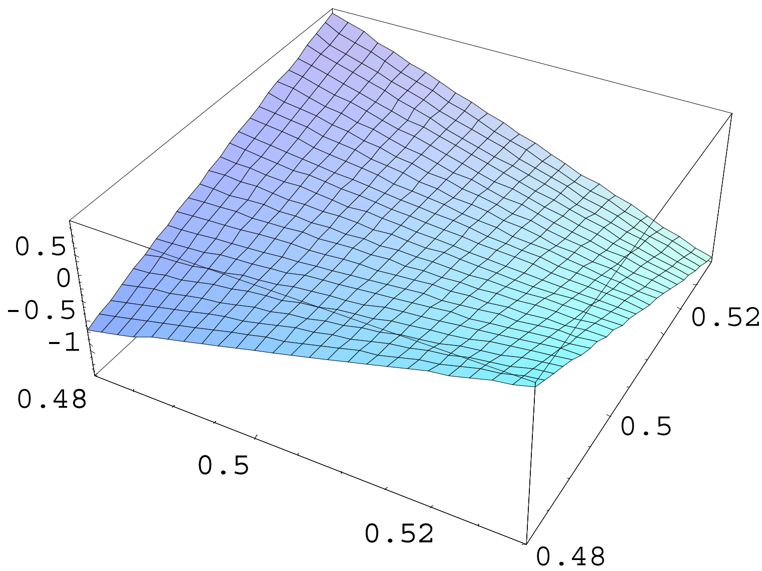

Рисунок 5 - Розподіл відносної похибки у околі точки

Розподіл відносної похибки у околі точки $M(X_0)$ вздовж лінії y = x представлено на рис. 6.

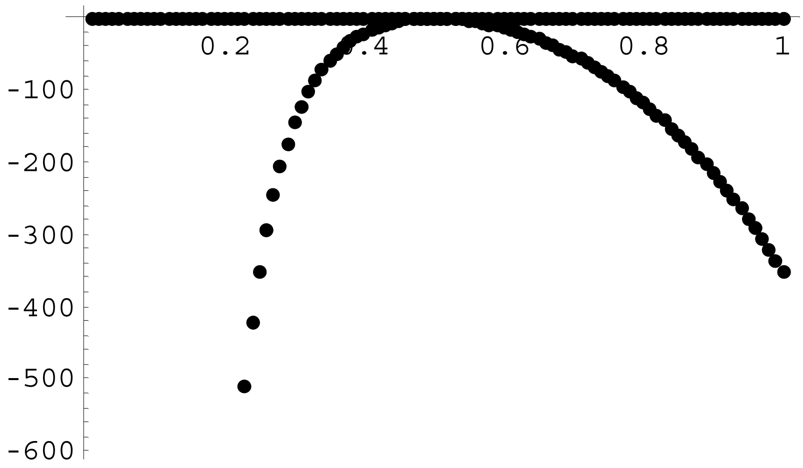

Рисунок 6 - Розподіл відносної похибки вздовж лінії x=y

Висновок: Розподіл відносних похибок у представленні функції $F(x,y)=x^4+y^4, (x,y)\in(0,1)$ рядом Тейлора і добутком одномірних його представлень задовільно представляють вказану функцію у околі точки $M(X_0)$; $X_0=(x_0,y_0)=(0,5,0,5)$. Аналіз відносних похибок, проведений для ряду елементарних функцій, підтверджує цей висновок і дає підстави сподіватися на успішне використання при представленні *n* мірних функцій добутком одномірних рядів Тейлора.

ЛІТЕРАТУРА

1. Воробьев Н. Н. Теория рядов / Н. Н. Воробьев. – М.: Наука: Главная редакция физико-математической литературы, 1979. – 408 с.
2. Ларіонов Г. І. Оцінювання конструктивних параметрів анкерного кріплення / Г. І. Ларіонов. – Дніпропетровськ: Національна металургійна академія України, 2011. – 286 с.

ISSN 1562-9945