УДК 539.3

ПРО ДЕЯКІ ОСОБЛИВОСТІ ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ РІЗНИЦЬ ПРИ РОЗРАХУНКУ ОБОЛОНОК ДОВІЛЬНОЇ ФОРМИ В ПРЯМОКУТНИХ КООРДИНАТАХ

ABOUT SOME FEATURES OF THE USE OF THE METHOD OF FINAL DIFFERENCES FOR THE CALCULATION OF SHELLS OF DIFFERENT FORMS IN DIRECT COORDINATES

Андрушков В.І., к.т.н., доцент, Тинчук С.О., к.т.н., доцент (НУВГП, м. Рівне)

Andrushkov V.I., Ph.D., associate professor, Tynchuk S.O., Ph.D., associate professor (National University of Water and Environmental Engineering, Rivne)

У статті розглядаються деякі особливості використання методу скінченних різниць при запису часткових похідних системи диференціальних рівнянь моментної теорії непологих оболонок в переміщеннях для точок серединної поверхні оболонки, які знаходяться в безпосередній близькості від її кутів.

Equilibrium equations for shells of arbitrary shape in displacements contain, in addition to partial derivatives of the desired displacement functions, also variable coefficients, which depend on the coordinates of its points and the geometry of the middle surface.

When calculating by the finite difference method, it is difficult to write high-order partial derivatives for points located near the corners of the shell. This leads to the appearance of unknown values of displacements and the values of variable coefficients in the fringe points, and therefore, the need to use certain boundary conditions for the angle of the shell. In addition, if the boundary conditions for moving the contour points of the shell are unknown, then the equilibrium equations should also be written for them. But in this case additional unknowns appear again.

It is advisable to obtain such expressions for these derivatives in finite differences, which would not include the values of the function at the above-mentioned boundary points. The solution to this problem is presented in the materials of this article.

To achieve this goal, we used some possible representations of high-order partial derivatives in finite differences, described in the works of Professor P.M. Varvak. On the basis of this, expressions of partial mixed derivatives were obtained for the point of the middle surface of the shell at various locations relative to the corners of the shell.

A method for calculating shells was proposed, taking into account all the above-mentioned features, namely: the basic equilibrium equations of the shell in displacements should be written only for its internal nodes; to them it is necessary to add equations that display the conditions on its contour, made up in finite differences. When writing the latter, it is necessary to take into account that the first derivatives of the functions can be written in one-sided differences with the same error as for the central differences.

Taking into account all these proposals, the finite-difference method reduces the solution of differential equilibrium equations of the shell in displacements to the solution of a system of linear algebraic equations in which the desired displacements at the nodes of the computational grid are unknown.

Ключові слова: оболонка, диференціальні рівняння, прямокутні координати, часткова похідна, скінченна різниця

Keywords: shell, differential equations, rectangular coordinates, partial derivative, finite difference

Як показано в роботах [1,2,3], задача про розрахунок оболонок довільної форми зводиться до вирішення системи трьох диференціальних рівнянь рівноваги в переміщеннях зі змінними коефіцієнтами. Для її вирішення доцільно скористатися числовим методом скінченних різниць. Так як ця система рівнянь містить не тільки часткові похідні від шуканих функцій переміщень, а й змінні коефіцієнти, які є диференціальними виразами, то скінченно-різницевий запис необхідно поширити на ті й інші.

Скориставшись виразами похідних більш високих порядків, описаних у роботі [4], отримаємо наближені записи для похідних від шуканих функцій в ***I***-тій точці оболонки (рис.1). Деякі з них представлені в табл.1.

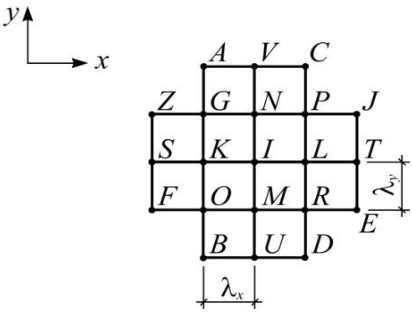


Рис.1. Шаблон-сітка для ***I***-тої точки оболонки

Таблиця 1

Представлення деяких похідних від функції ***f*** в ***I***-тій точці

№ п/п	аналітичне	в скінченних різницях (рис.1)
1	$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(f_{,1}\right)_I$	$\frac{1}{2\lambda_x}\left(f_L - f_K\right)$
2	$\frac{\partial f}{\partial y} = \left(f_{,2}\right)_I$	$\frac{1}{2\lambda_y}\left(f_N - f_M\right)$
3	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \left(f_{,11}\right)_I$	$\frac{1}{\lambda_x^2}\left(f_L - 2f_I + f_K\right)$
4	$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \left(f_{,22}\right)_I$	$\frac{1}{\lambda_y^2}\left(f_N - 2f_I + f_M\right)$
5	$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \left(f_{,12}\right)_I$	$\frac{1}{4\lambda_x\lambda_y}\left(f_O + f_P - f_G - f_R\right)$
6	$\frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y} = \left(f_{,1112}\right)_I$	$\frac{1}{4\lambda_x^3\lambda_y}\left(f_J + f_F - f_Z - f_E + 2f_G + \right.$ $\left. + 2f_R - 2f_P - 2f_O\right)$
7	$\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3} = \left(f_{,1222}\right)_I$	$\frac{1}{4\lambda_x\lambda_y^3}\left(f_C + f_B - f_A - f_D + 2f_G + \right.$ $\left. + 2f_R - 2f_P - 2f_O\right)$

Але виникають певні складнощі при запису часткових похідних $\frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y}$ і $\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3}$ для ***I***-тої точки, що знаходиться в безпосередній близькості від кута прямокутного плану оболонки (рис.2).

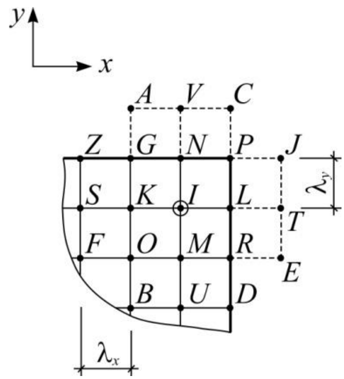


Рис.2. Шаблон-сітка для ***I***-тої точки біля кута оболонки

Справа в тому, що при розрахунку методом скінченних різниць виникає необхідність в заміні невідомої функції в точках поза контуром оболонки через значення її в точках на контурі і в середині контуру.

Якщо вищезгадані часткові похідні для ***I***-тої кутової точки записати через оператори, наведені в табл.1, то з'являться значення функції в точках ***C*** і ***J*** поза контуром оболонки (рис.2).

Щоб замінити їх через значення в середніх точках, необхідно використовувати граничні умови для кута оболонки, що іноді є небажаним.

Тому доцільно отримати такі вирази для цих похідних у скінченних різницях, які б не містили вищезазначених точок поза контуром.

З цією метою на додаток до оператора для змішаної похідної другого порядку

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_I = \frac{1}{4\lambda_x\lambda_y}\left(f_O + f_P - f_G - f_R\right) \quad (1)$$

запишемо ще можливі два варіанти, наведені в роботі [5]:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_I = \frac{1}{2\lambda_x\lambda_y}\left(f_K + f_L + f_M + f_N - 2f_I - f_G - f_R\right); \quad (2)$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_I = \frac{1}{2\lambda_x\lambda_y}\left(f_K + f_L + f_M + f_N - 2f_I - f_O - f_P\right). \quad (3)$$

Використовуючи (1), (2) і (3), а також дані табл.1 для ***I***-тої точки (рис.2), отримаємо такі вирази часткових похідних:

$$\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y}\right)_I = \left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\right]_I = \left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{f_L - 2f_I + f_K}{\lambda_x^2}\right)\right]_I =$$

$$= \frac{1}{2\lambda_x^3\lambda_y}\left(f_F + f_T - f_S - f_E + 2f_K + 2f_R - -2f_L - 2f_O\right);$$

(4)

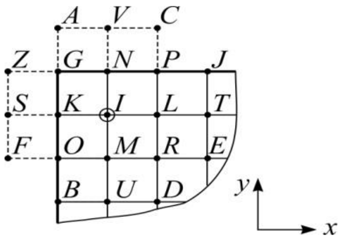
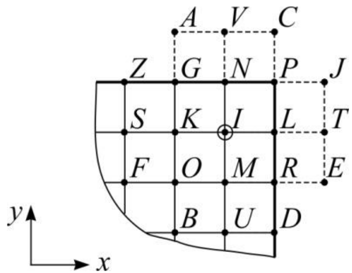
$$\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3}\right)_I = \left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\right]_I = \left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{f_N - 2f_I + f_M}{\lambda_y^2}\right)\right]_I =$$

$$= \frac{1}{2\lambda_x\lambda_y^3}\left(f_V + f_B - f_A - f_U + 2f_M + 2f_G - -2f_N - 2f_O\right). \quad (5)$$

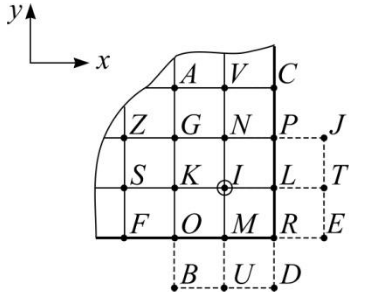
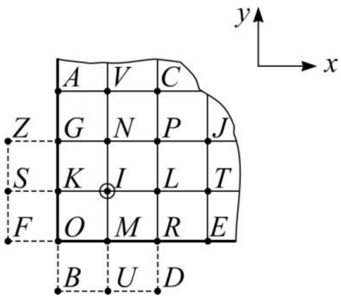
Аналогічно можна отримати вирази таких змішаних часткових похідних для ***I***-тої точки при інших розташуваннях її щодо кутів оболонки (табл.2).

Таблиця 2

Часткові похідні в залежності від місця розташування точки ***I***

Розташування точки ***I***	$\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y}, \quad \dfrac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3}$
	$\left.\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y}\right\rvert_I = \dfrac{f_F + f_T - f_S - f_E + 2f_K + 2f_R - 2f_L - 2f_O}{2\lambda_x^3 \lambda_y}$
	$\left.\dfrac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3}\right\rvert_I = \dfrac{f_U + f_C - f_D - f_V + 2f_R + 2f_N - 2f_M - 2f_P}{2\lambda_x \lambda_y^3}$
	$\left.\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y}\right\rvert_I = \dfrac{f_F + f_T - f_S - f_E + 2f_K + 2f_R - 2f_L - 2f_O}{2\lambda_x^3 \lambda_y}$
	$\left.\dfrac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3}\right\rvert_I = \dfrac{f_V + f_B - f_A - f_U + 2f_M + 2f_G - 2f_N - 2f_O}{2\lambda_x \lambda_y^3}$

Продовження таблиці 2

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td>$$\left.\frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y}\right|_I = \frac{f_S + f_J - f_Z - f_T + 2f_G + 2f_L - 2f_K - 2f_P}{2\lambda_x^3 \lambda_y}$$</td></tr>
<tr><td>$$\left.\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3}\right|_I = \frac{f_V + f_B - f_A - f_U + 2f_M + 2f_G - 2f_N - 2f_O}{2\lambda_x \lambda_y^3}$$</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td>$$\left.\frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y}\right|_I = \frac{f_S + f_J - f_Z - f_T + 2f_G + 2f_L - 2f_K - 2f_P}{2\lambda_x^3 \lambda_y}$$</td></tr>
<tr><td>$$\left.\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3}\right|_I = \frac{f_U + f_C - f_D - f_V + 2f_R + 2f_N - 2f_M - 2f_P}{2\lambda_x \lambda_y^3}$$</td></tr>
</table>

Слід зробити акцент ще на одній проблемі, яка може мати місце при розрахунку.

Якщо з граничних умов переміщення контурних точок заздалегідь невідомі, то в цьому випадку систему рівнянь рівноваги оболонки в переміщеннях варто було б записати і для контурних точок. Але тоді це призведе до появи в точках поза контуром оболонки невідомих значень переміщень і виникне необхідність визначення там величин змінних коефіцієнтів, які входять до складу рівнянь.

Щоб уникнути цього, можна поступити наступним чином: основні рівняння рівноваги оболонки в переміщеннях записуємо тільки для її внутрішніх вузлів; до них повинні бути додані рівняння, що відображають граничні умови і складені теж в скінченних різницях, але з однією особливістю. Справа в тому, що згідно з [6] можна записати вирази перших похідних для контурних точок через односторонні різниці з такою ж похибкою, що й для центральних різниць, представивши їх, наприклад, для точки ***I*** (рис.3), в наступному вигляді:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_I = \frac{1}{2\lambda_x}\left(-3f_I + 4f_L - f_T\right), \tag{6}$$

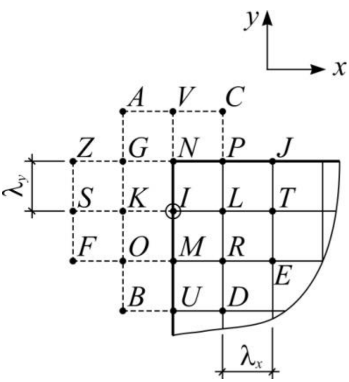


Рис.3. Шаблон-сітка для ***I***-тої точки на контурі оболонки

а для точки ***P*** (рис.3):

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_P = \frac{1}{2\lambda_y}\left(3f_P - 4f_L + f_R\right). \qquad (7)$$

Саме таку форму запису слід застосувати для перших похідних від функцій переміщень, що входять у рівняння деяких статичних умов на контурі оболонки.

Таким чином, при використанні операторів, наведених у табл.1 і 2, та односторонніх форм запису перших похідних для граничних умов задачі (6) і (7), метод скінченних різниць зводить рішення диференціальних рівнянь рівноваги оболонки в переміщеннях [1,2,3] до рішення системи лінійних алгебраїчних рівнянь, невідомими в яких є значення шуканих переміщень у вузлах розрахункової сітки.

1.Андрушков В.И., Рассказов А.О. К расчету в перемещениях оболочек произвольной формы. – Прикладная механика. 1981. 17. №11. С.118-121.

2.Андрушков В.І., Русий Є.М. Методика розрахунку оболонок змінної товщини на підставі гіпотези прямих вертикалей. - Вісник НУВГП / Збірник наукових праць. – Рівне: Вид-во НУВГП, 2011. – Випуск 1(53). – Технічні науки. – С.165-170

3.Андрушков В.І. Про один підхід до розрахунку оболонок довільної форми в прямокутних координатах з урахуванням неоднорідності її матеріалу по серединній поверхні. - Збірник наукових праць «Сучасні технології та методи розрахунків у будівництві». - Луцьк: Вид-во Луцького НТУ, 2017.- Випуск 6. С.9-15)

4.Варвак П.М., Варвак Л.П. Метод сеток в задачах расчета строительных конструкций. – М., Стройиздат, 1977. 160 с.

5.Варвак П.М., Рябов А.Ф. Справочник по теории упругости (для инженеров-строителей). - Киев, «Будівельник», 1971. 418 с.

6.Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. – М.: Физматгиз, 1962. 708 с.