УДК 539.3

ЗГИН КОНСОЛЬНОЇ ОРТОТРОПНОЇ ПЛИТИ КРАЙОВИМ НАВАНТАЖЕННЯМ В УТОЧНЕНІЙ ПОСТАНОВЦІ

BENDING OF CANTILEVER ORTHOTROPIC PLATE BY BOUNDARY LOAD IN REFINED FORMULATION

Шваб'юк В.В., к.т.н., доц., Ротко С.В., к.т.н., доц., Ужегова О.А., к.т.н., доц., Канцелярчик О., студент, (Луцький національний технічний університет, м. Луцьк)

Shvabyuk V.V., PhD, Associate Professor, Rotko S.V., PhD, Associate Professor, Uzhehova O.A., PhD, Associate Professor, Kantseliarchyk O., student (Lutsk National Technical University, Lutsk)

У роботі запропоновано методику розв'язання крайової задачі для некласичної моделі ортотропних пластин. Одержано замкнуті формули для переміщень, зусиль і напружень у плиті. Досліджується влив виду граничних умов защемлення і фізичних характеристик ортотропії, що стосуються поперечного зсуву та обтиснення, на величину максимальних переміщень плити.

The work presents a solution method for the boundary volue for a nonclassical model of orthotropic plates. The bending formula of medium thickness orthotropic plates is used, which considers the transverse shear and pressurizing. The model hypothesis is based on the possibility of deploying components of the displacement vector of an arbitrary point of a plate in the form of attracted power series in transverse coordinate. The Lagrange variational principle is used for the complete energy of an elastic system.

Bending of a cantilever orthotropic plate is considered in the case when one longitudinal side of the plate is rigidly constrained, and the other one is free and bends along the edge by a lateral load of constant intensity. Closed-form formulas for displacements, forces, and stresses in the plate are obtained. Results of numerical calculations are compared with similar results from other nonclassical theories and the Kirchhoff's classical plate theory for thin plates. The influence of the boundary conditions' type of constrain and physical characteristics of on the

magnitude of the maximum displacements of the plate orthotropy are studied, concerning the transverse shear and pressurizing.

From the analyzis of the numerical data presented in the table, we can conclude, how these factors influence on the magnitude of the maximum displacement of the median surface of the plate quantitatively and qualitatively.

Analyzing the resulting expressions for displacement in the plate we see that the first members in these formulas coincide with the formulas of the classical theory of thin Kirchhoff plates, and the rest are those that take into account the deformations of the transverse shear and pressurizing. We see that the vertical displacements of the end of the console does not depend on the transverse coordinate. It is the same at all points of the end of the console plate. The formulas obtained can also be used for the case of bending of a console beam of appropriate length.

Ключові слова: ортотропна плита, уточнена модель згину, поперечний зсув та обтиснення

Keywords: orthotropic plate, refined bending model, transverse shear and pressurizing

Вступ. Згин консольної ортотропної плити крайовим сталим навантаженням було розглянуто С.О. Амбарцумяном [1] на основі рівнянь уточненої моделі згину, яка враховує деформацію поперечного зсуву та поперечні нормальні напруження. У даній роботі використовуються рівняння згину ортотропних плит середньої товщини [4,5], що враховують крім поперечного зсуву і поперечних нормальних напружень, ще й поперечне обтиснення. Досліджується вплив способу задання граничних умов на краях плити на напружено-деформований стан у середині плити.

Згин консольної ортотропної плити. Досліджується випадок, коли ортотропна плита жорстко защемлена по одній довгій стороні ($x = 0$), інша довга сторона ($x = a$) є вільною і згинається по краю поперечним навантаженням сталої інтенсивності P. У зв'язку з тим, що вісь y напрямлена вздовж довгої сторони, то вважається, що всі шукані величини залежать тільки від координати x. За умови відсутності поверхневого розподіленого навантаження $\left(q_2(x, y) = 0\right)$, рівняння (1) - (3) уточненої моделі згину ортотропних плит середньої товщини зводяться до вигляду [4,5,7]:

$$\frac{d^2u}{dx^2}=0\,;\; D_1\frac{d^3w_b}{dx^3}=-P;\; D_{66}\frac{d^2\Omega}{dx^2}=\frac{5}{4}K_1\cdot\Omega;\; K_1\frac{d\tilde{w}_\tau}{dx}=P, \quad (1)$$

де $w_b=\bar{w}-0{,}8w_\tau=\tilde{w}-0{,}8\tilde{w}_\tau$, $\tilde{w}_\tau=w_\tau+\alpha\tilde{w}_\tau$, $\bar{w}=w-\alpha\tilde{w}_\tau$,

$$D_1=\frac{2}{3}\tilde{E}_1\cdot h^3;\; K_1=\frac{4}{3}G_{13}h,\; D_{66}=\frac{2}{3}G_{12}h^3;\; \tilde{E}_1=\frac{E_1}{1-\nu_{12}\cdot\nu_{21}},$$

$$A_1=\frac{\nu_{31}+\nu_{32}\cdot\nu_{21}}{1-\nu_{12}\nu_{21}},\; \alpha=A_1G_{13}/\tilde{E}_1;\; E_1,G_{12},G_{13},\nu_{12},\nu_{21}\; -$$

модуль пружності, модулі зсуву та коефіцієнти Пуассона матеріалу плити у відповідних напрямках; $2h$ - товщина плити.

Вирази для переміщень плити U,W та залежності для зусиль і моментів, за відсутності розподіленого навантаження, записуються таким чином [5-8]:

$$U\left(x,z\right)=u-z\cdot\frac{dw}{dx}+\frac{3z}{4h}\left(1-\frac{(1-\alpha)z^2}{3h^2}\right)\cdot\frac{Q_x}{G_{13}},$$

$$W\left(x,z\right)=w-A_1\frac{du}{dx}z+\frac{A_1}{2}\frac{d^2w_b}{dx^2}z^2=w-\frac{A_1N_x}{B_1}z-\frac{A_1M_x}{2D_1}z^2,$$

$$N_x=B_1\frac{du}{dx},\;\; M_x=-D_1\frac{d^2w_b}{dx^2},\;\; Q_x=K_1\frac{d\tilde{w}_\tau}{dx}, \quad (2)$$

де $B_1=2\tilde{E}_1h;\quad \alpha=A_1K_1h^2/2D=A_1G_{13}/\tilde{E}_1.$

Формули для напружень у поперечних перерізах плити можна отримати з формул [4,5,8]:

$$\sigma_x=\frac{N_x}{2h}+\frac{3M_x}{2h^3}\cdot z+\left(1-\alpha\right)\frac{\tilde{E}_1}{K_1}\cdot\frac{dQ_x}{dx}f(z);\; \tau_{xz}=G_{13}\left(1-\frac{z^2}{h^2}\right)\frac{Q_x}{K_1}. \quad (3)$$

Тут $K_1\tilde{w}_\tau=-D_1\dfrac{\partial^2w_b}{\partial x^2}=-D_1\dfrac{\partial^2\tilde{w}}{\partial x^2};\;\; f\left(z\right)=\dfrac{z}{5}\left(1-\dfrac{5z^2}{3h^2}\right).$

Необхідно зауважити, що формули (3) для *дотичних* напружень τ_{xz} у плитах, на відміну від формул в оболонках, співпадають із відповідними формулами теорії С. Амбарцумяна [1].

Загальні розв'язки системи диференціальних рівнянь (1) можна записати у формі:

$$u = E_0 x + K_0;\ \tilde{w}_\tau = Px / K_1 + B_\tau;\ \Omega = R_1 e^{kx} + R_2 e^{-kx};$$

$$w = -\frac{Px^3}{6D_1} + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3,\ k = \frac{5K_1}{4D_{66}}. \qquad (4)$$

Коефіцієнти $E_0, K_0, B_\tau,\ R_1, R_2,\ C_1, C_2, C_3$ знаходяться із умов на краях плити: $x = 0;\ x = a$. Формування крайових умов на цих краях витікає із варіаційного принципу Лагранжа для повної енергії плити [4] і є найбільш оптимальним з математичної точки зору. Наприклад, умови вільного краю $x = a$ можуть бути такими:

$$N_x = M_x = 0,\ Q_x = P. \qquad (5)$$

Для жорсткого защемлення краю $x = 0$ плити необхідно, щоб виконувались умови:

$$u = w = \gamma_x = 0, \qquad (6)$$

де $\gamma_x = -\frac{d\tilde{w}}{dx} + \frac{4}{5}\frac{Q_x}{K_1}$ – узагальнений кут повороту поперечного перерізу плити.

Необхідно зауважити, що в працях Ю.М. Тарнопольского та А.В. Розе [3], в умовах (6) вираз $\gamma_x = 0$ замінюється умовою $\partial U / \partial z\big|_{z=z_{0u}} = 0$. Крім цього, розроблена нами модель плит ураховує ще й поперечне обтиснення, тому умову $w = 0$ для переміщення серединної поверхні плити бажано замінити умовою $W\big|_{z=z_0} = 0$. У результаті, умови (6) трансформуються в такі крайові умови:

$$u = 0,\ \partial U / \partial z\big|_{z=z_{0u}} = 0,\ W\big|_{z=z_0} = 0, \qquad (7)$$

де z_0 і z_{0u} є віддалями від серединної поверхні у напрямі осі z.

Використавши залежності (2), крайові умови (7) можна записати в такому розгорнутому вигляді:

$$u = 0,\ \frac{dw}{dx} - \left(1 - (1-\alpha)\frac{z_{0u}^2}{h^2}\right) \cdot \frac{Q_x}{K_1} = 0,\ w - A_1 \frac{du}{dx} z_0 + \frac{A_1}{2}\frac{d^2\tilde{w}}{dx^2} z_0^2 = 0. \qquad (8)$$

Із умов (8) видно, що значенню координати $z_{0u} = \pm h$ у другій рівності відповідає умова $\frac{d\overline{w}}{dx}=0$, яка (без впливу поперечного обтиснення) еквівалентна умові, що використовується у класичній теорії тонких пластин. Крім цього, ця умова є не чим іншим, як вимогою рівності нулю зсувної деформації $\gamma_{xz}=\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\partial \overline{w}}{\partial x}=0$ на цьому рівні. Значення $z_{0u}=\pm h/\sqrt{5}$ рівнозначне умові $\gamma_r=0$, якою користуються в уточнених теоріях типу С. Тимошенка і Е. Рейсснера [2,9]. С.О. Амбарцумяном у монографії [1] замість цих умов запропонована умова, яка вимагає відсутності тангенціального переміщення уздовж певної лінії ($z=z_0$) крайової поверхні плити — $U\big|_{z=z_0}=0$. Разом із тим, у реальних конструкціях граничні умови можуть і не відповідати запропонованим ідеальним умовам, тому в таких випадках необхідно підбирати природніший варіант защемлення країв пластини.

Задовольняючи умовам (6)-(8), знаходимо вирази для коефіцієнтів інтегрування:

$$C_1=\frac{Pa}{D_1},\; C_2=\left(1-(1-\alpha)\frac{z_{0u}^2}{h^2}\right)\frac{P}{K_1},\; C_3=-\frac{A_1 Pa}{2D_1}z_0^2,$$

$$B_\tau=-D_1C_1/K_1=-Pa/K_1;\quad E_0=K_0=0;\; R_1=R_2=0\ .$$

Таким чином, переміщення, зусилля та напруження у плиті будуть наступними:

$$w=\frac{Px^2}{2D_1}\left(a-\frac{x}{3}\right)+\frac{Px}{K_1}\left(1-(1-\alpha)\frac{z_{0u}^2}{h^2}\right)-\frac{\alpha Pa}{K_1}\frac{z_0^2}{h^2},$$

$$u=0,\; U\left(x,z\right)=-\frac{Pxz}{2D_1}\left(2a-x\right)+\frac{P(1-\alpha)z}{K_1}\left(\frac{z_{0u}^2}{h^2}-\frac{z^2}{3h^2}\right),$$

$$W\left(x,z\right)=w+\frac{A_1P}{2D_1}\left(a-x\right)z^2;\;\; \Omega=0;\; \tilde{w}_\tau=\frac{P}{K_1}\left(x-a\right); \qquad (9)$$

$$\sigma_x=-\frac{3Pz}{2h^3}\cdot(a-x);\; \tau_{xz}=\frac{3P}{4h}\left(1-z^2/h^2\right).$$

$$N_x = 0,\ \ M_x = -P(a-x),\ \ \ Q_x = P,$$

Аналіз отриманих виразів (9) для переміщень, зусиль і напружень у плиті приводить до висновку, що, крім переміщень U, W, w, вони співпадають із відповідними результатами як класичної теорії тонких пластинок, так і інших відомих уточнених теорій [2,3,9]. Перші вирази у формулах для згаданих переміщень відповідають формулам класичної теорії тонких пластинок Кірхгофа. Разом із тим, формули для переміщень U, W, w відрізняються також від уже відомих у літературі [1,3,5-7] результатів уточнених («зсувних») теорій членами, що враховують деформації поперечного обтиснення (множники із параметрами α і z_0^2). Наприклад, формули для максимальних переміщень $w_{\max}$ та $U\left(a, \pm h\right)$ на краю плити, коли $x = a$, зводяться до такого вигляду:

$$w_{\max} = \frac{Pa^3}{3D_1}[1 + \frac{3}{2}\frac{\tilde{E}_1}{G_{13}}\frac{h^2}{a^2}(1 - \frac{z_{0u}^2}{h^2} + \alpha(\frac{z_{0u}^2}{h^2} - \frac{z_0^2}{h^2})] = W(a); \qquad (10)$$

$$U\left(a, \pm h\right) = \mp\frac{Pa^2h}{2D_1}[1 - (1-\alpha)\frac{\tilde{E}_1}{G_{13}}\left(\frac{z_{0u}^2}{h^2} - \frac{1}{3}\right)\frac{h^2}{a^2}];\ \alpha = \frac{G_{13}}{\tilde{E}_1}A_1.$$

Аналіз формул (10) дозволяє дослідити вплив граничних умов і фізичних характеристик матеріалу плити на величину переміщень у плиті. Одержані формули можна також застосувати і для випадку згину консольної балки, довжиною a, якщо у цих формулах замість параметрів $D_1, \tilde{E}_1, A_1$ покласти $E_1 I,\ E_1, \nu_{31}$, відповідно.

У формулах (10) вирази перед квадратними дужками відповідають значенню максимальних переміщень плити: $w_{кл} = Pa^3/(3D_1),\quad U_{кл} = Pa^2h/(2D_1)$, знайдених за класичною теорією тонких пластинок Кірхгофа. Якщо у формулах (10) покласти параметри $\alpha = z_0 = 0,$ а замість параметра z_{0u}^2 взяти величину $z_{0u}^2/3$, то ми отримаємо формули і результати С.О. Амбарцумяна [1].

Із формул (10) видно, що вертикальне переміщення кінця консолі не залежить від координати z, тобто $w_{\max} = W\left(a\right)$, тому на вільному кінці воно однакове у всіх точках. Вплив різних крайових умов виду матеріалу на величину переміщення $w_{\max}$ наведено у таблиці. Прикладом плити з ортотропного матеріалу вибрано плиту із дерева: $\tilde{E}_1 / G_{13} = 25; \nu_{12} = \nu_{13} = 0,3; \alpha = 0,017$.

Дані у другому стовпчику таблиці, що знаходяться у дужках, пораховані для защемлення, коли вертикальне переміщення плити W фіксується на рівні $z_0 = 0$. Усі значення, наведені у чисельнику, пораховані для відносної товщини $h/a = 1/3$, у знаменнику – для $h/a = 1/6$.

Таблиця 1

Залежність переміщення $\bar{w}$ від крайових умов та матеріалу

Вид матеріалу	$z_{0u} = 0$ $z_0 = h$	$z_{0u} = h/\sqrt{5}$ $z_0 = h$	$z_{0u} = h/\sqrt{5}$ $\alpha = z_0 = 0$	$z_{0u} = h/\sqrt{3}$ $\alpha = z_0 = 0$
Ізотропія, $\nu = 0,25$	1,389 (1,444) 1,097 (1,111)	1,311 1,078	1,355 1,089	1,296 1,074
Дерево $(\tilde{E}_1 / G_{13} = 25)$	5,095 (5,167) 2,024 (2,042)	4,277 1,819	4,333 1,833	3,778 1,694

Із отриманих даних видно, що найбільшого уточнення формул класичної теорії вимагає розрахунок плит із матеріалу, що має низьку поперечну жорсткість. Дані, що одержані за допомогою уточненої моделі для плит із дерева товщиною $h/a = 1/3$, у 4–5 разів перевищують аналогічні результати класичної теорії. Навіть для плити товщиною $h/a = 1/6$ вони можуть бути удвічі більшими. Різниця між даними за різних випадків защемлення (за виключенням випадку $z_{0u} = z_0 = \pm h$) не перевищує 10 – 15%%. Останній випадок защемлення ($z_{0u} = z_0 = \pm h$) відповідає умові, що використовується у класичній теорії тонких пластин, де на краю закріплюється горизонтальний елемент серединної поверхні. А, отже, і результат за формулою (10) для $w_{\max}$, також відповідає цій теорії (вираз у квадратних дужках рівний одиниці). Із даних таблиці видно також, що останній варіант защемлення є найбільш жорстким. Йому відповідає найнижчий рівень нормальних переміщень. Разом із тим, за такого виду крайових умов, максимальні танґенціальні переміщення $U\left(a,\pm h\right)$ на зовнішніх поверхнях плити можуть змінювати свій знак за умови, що величина $(1-\alpha)\dfrac{\tilde{E}_1}{G_{13}}\left(\dfrac{z_{0u}^2}{h^2}-\dfrac{1}{3}\right)\dfrac{h^2}{a^2}>1$. Тобто, нахил кубічної параболи, за якою змінюється танґенціальне переміщення $U\left(x,z\right)$ відносно кординати z, зміниться на протилежний. Але, якщо для ізотропного матеріалу це може статися тільки за умови, коли $h/a>3/4$, то для ортотропного матеріалу (наприклад, дерева) це явище може з'явитися при $h/a>2/7$.

Висновки. Одержано замкнуті формули для переміщень, зусиль і напружень у консольній ортотропній плиті. Досліджено вплив виду крайових умов і деформацій поперечного зсуву та обтиснення на величини характеристик напружено-деформованого стану плити. Показано, що їх вплив на величину нормального переміщення може бути досить значним. Якщо для ізотропної плити ($h/a=1/3$) він може бути у межах 30-40%%, то у випадку ортотропної плити він уже збільшує максимальне переміщення у 4-5 рази.

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360 с. **2.** Пелех Б.Л. Теория оболочек с низкой сдвиговой жесткостью. К.: Наук. думка, 1973. 246 с. **3.**Тарнопольский Ю.М., Розе А.В. Особенности расчета деталей из армированных пластиков. Рига: Зинатне, 1969.276 с. **4.** Шваб'юк В.І., Ротко С.В. Лінійне деформування, міцність і стійкість композитних оболонок середньої товщини: монографія. Луцьк, 2015. 264 с. **5.** Шваб′юк В.І. Комплексне подання уточнених рівнянь згину ортотропних пластин з тріщинами. *Машинознавство*. 1999. № 4. С. 51–55. **6.** Швабюк В.І., Маткова А.В., Швабюк В.В. Постановка першої основної крайової задачі згину ортотропних пластин для півнескінченних областей. *Наукові нотатки*. Луцьк: РВВ ЛНТУ. 2013. Вип.41, ч.1. С.260-266. **7.** Shvabyuk V.I., Pasternak Y.M., Rotko S.V. Refined solution of the Timoshenko problem for an ortotropic beam on a rigid base. *Strenght of Materials*. 2010. Vol. 46. No. 1. P. 56–63. **8.** Shvabyuk V.I., Rotko S.V., Uzhegova O.A. Bending of a Composite Beam with a Longitudinal Section. *Strenght of Materials*. 2014. Vol. 46. No. 4. P. 558–566. **9.** Reissner E. On the theory of bending of elastic plates. *J. Math. and Phys.*, 1944, v.33, p.184.