Рассмотрены вопросы обеспечения надежности путевых выключателей прямого и мгновенного действия на этапе приемо-сдачного контроля при использовании в задачах измерения и оценки надежности функции потерь следующих видов:
-квадратичная функция потерь;
-линейная функция потерь;
-допустимая функция потерь.

УДК 621.316

В. П. Самошкин, канд. техн. наук,
Я. Б. Форкун, канд. техн. наук,
А. С. Чепурная
Харьковский национальный университет городского хозяйства им. А. Н. Бекетова

ОПТИМИЗАЦИЯ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ТОЧЕЧНОЙ ОЦЕНКИ НАДЕЖНОСТИ ПУТЕВЫХ ВЫКЛЮЧАТЕЛЕЙ ПРЯМОГО И МГНОВЕННОГО ДЕЙСТВИЯ

Введение. В качестве обобщенного критерия качества показателей надежности можно рассматривать средние потери из-за ошибок измерения. При этом выбор критерия оптимизации измерения зависит от вида функции стоимости ошибки или функции потерь, в качестве которой целесообразно выбирать некоторую функцию от разности между истинным значением оцениваемого показателя надежности H и его оценкой $\tilde{\mathrm{H}}$.

Наиболее часто в задачах измерения и оценки используются функции потерь следующих видов.

Изложение основного материала.

Квадратичная функция потерь, при которой всем ошибочным оценкам приписываются потери, пропорциональные квадрату ошибки

$$\mathrm{C} = \mathrm{c}\left(\mathrm{H} - \tilde{\mathrm{H}}\right)^2 \qquad (1)$$

При этом оптимизация оценки показателей надежности сводится к достижению минимума средней квадратической ошибки.

Линейная функция потерь, при которой всем ошибочным оценкам приписываются потери, пропорциональные модулю ошибки

$$\mathrm{C} = \mathrm{c}\left|\mathrm{H} - \tilde{\mathrm{H}}\right| \qquad (2)$$

В данном случае оптимизация оценки показателей надежности сводится к минимизации среднего модуля ошибки.

Допустимая функция потерь, при которой всем ошибочным оценкам , не превышающим некоторого фиксированного значения h, приписываются нулевые потери, а ошибочным оценкам, превышающим величину h,- постоянные потери

$$\mathrm{C} = \begin{Bmatrix} 0 \text{ при } \left|\mathrm{H} - \tilde{\mathrm{H}}\right| \le h \\ \mathrm{c} \text{ при } \left|\mathrm{H} - \tilde{\mathrm{H}}\right| > h \end{Bmatrix} \qquad (3)$$

При этом оптимизация оценки показателей надежности сводится к минимизации вероятности превышения модулем ошибки заданной величины h.

Используются и другие функции потерь, в том числе простая функция потерь с насыщением и т.п., однако на практике чаще всего применяют квадратичную функцию потерь, при которой, как уже отмечалось выше, критерий минимума средних потерь совпадает с критерием минимума средней квадратической ошибки, определяемой соотношением

$$\sigma^2(H) = \int_0^\infty \left(\mathrm{H} - \tilde{\mathrm{H}}\right)^2 f(H)dH \tag{4}$$

Где $f(H)$ - апостериорная (послеопытная) плотность распределения оцениваемого показателя надежности.
Полагая

$$\frac{d}{d\mathrm{H}} \int_0^\infty \left(\mathrm{H} - \tilde{\mathrm{H}}\right)^2 f(H)dH = 0 \tag{5}$$

получаем

$$\int_0^\infty \left(\mathrm{H} - \tilde{\mathrm{H}}\right) f(H)dH = 0 \tag{6}$$

Соотношение (6) может быть переписано в виде

$$\int_0^\infty \mathrm{H} f(H)dH - \tilde{\mathrm{H}} \int_0^\infty f(H)dH = 0 \tag{7}$$

Заметим, что при любых условиях имеет право равенство

$$\int_0^\infty f(H)dH = 1 \tag{8}$$

С учетом выражения (8) из соотношения (7) находим уравнение, определяющее оптимальную точечную оценку рассматриваемого показателя надежности

$$\mathrm{H} = \int_0^\infty \mathrm{H} f(H)dH \tag{9}$$

Полученная оптимальная точечная оценка (9) представляет собой математическое ожидание оцениваемого показателя надежности Н, соответствующее апостериорной плотности распределения $f(H)$.

Если апостериорная плотность распределения (или распределение вероятностей) симметрична и имеет максимум на оси симметрии, то в качестве оптимальной точечной оценки показателя надежности $\tilde{\mathrm{H}}$ может быть принята абсцисса максимума апостериорной плотности распределения (или распределение вероятностей). Такую оценку называют оценкой по максимуму апостериорной плотности распределения, которая при соблюдении указанных условий также является оптимальной.

Подчеркнем, что оценка, определяемая уравнением (9), учитывает как априорную (доопытную) плотность распределения оцениваемого показателя надежности, так и результаты эксперимента (испытания).

При точечной оценке показателей надежности, наряду с апостериорным математическим ожиданием (9), оценивается еще апостериорное среднее квадратическое отклонение $\sigma(\mathrm{H})$, характеризующее разброс рассматриваемого показателя надежности:

$$\sigma^2(H) = \int_0^\infty \left(\mathrm{H} - \tilde{\mathrm{H}}\right)^2 f(H)dH \tag{10}$$

где $\tilde{\mathrm{H}}$ определяется соотношением (9).

На практике часто приходится оперировать с дискретным распределением того или иного показателя надежности, задаваемым в виде табл.1.

Таблица 1.

H_i	H_1	H_2	H_3	…	H_i	…	H_k
Вер(Н= H_i)	$p(H_1)$	$p(H_2)$	$p(H_3)$	…	$p(H_i)$	…	$p(H_k)$

В случае дискретного распределения оцениваемого показателя надежности соотношения (9) и (10), принимают вид

$$\tilde{H}=\sum_{i=1}^{k} H_i p(H_i) \qquad (11)$$

$$\sigma^2(H) = \sum_{i=1}^{k}\left(H_i - \tilde{H}\right)^2 p(H_i) \qquad (12)$$

где $p(H_i)$ – апостериорное распределение вероятностей оцениваемого показателя надежности.

Рассмотрим зависимость апостериорной плотности распределения оцениваемого показателя надежности от его априорной плотности распределения и результатов эксперимента.

Пусть оценке подвергается показатель безотказности путевого выключателя – наработка на отказ Т, для которой известна априорная плотность распределения φ(Т).

Очевидно, безусловная вероятность того , при испытании путевого выключателя с наработкой на отказ от Т до Т+dT на протяжении t_u будет иметь место m отказов, равна

$$p_1 = \varphi(T)p_m(T)dT \qquad (13)$$

где φ(Т) – априорная плотность распределения наработки путевого выключателя на отказ;

$p_m(T)$ – вероятность того, что при испытании на протяжении t_u путевой выключатель будет иметь место m отказов, определяется соотношением

$$p_2 = \int_0^{\infty} \varphi\,(T)p_m(T)dT \qquad (14)$$

На основании выражений (13) и (14) получаем уравнение, определяющее вероятность того, что среди путевых выключателей имеющих по m отказов на протяжении t_u, будут путевые выключатели с наработкой на отказ от Т до Т+dT:

$$\beta_m(T) = \frac{p_1}{p_2} = \frac{\varphi(T)p_m(T)\,dT}{\int_0^{\infty}\varphi(T)p_m(T)dT} \qquad (15)$$

С другой стороны ,эта же вероятность $\beta_m(T)$ определяется соотношением

$$\beta_m(T) = f(T)dT \qquad (16)$$

где $f(T)$ – распределение величины Т среди путевых выключателей, у которых на протяжении t_u имело место по m отказов.

Приравнивая соотношения (15) и (16), получаем уравнение, определяющее апостериорную плотность распределения наработки путевых выключателей на отказ

$f(T)$ в функции от априорной плотности распределения φ(T) и результатов эксперимента $p_m(T)$,

$$f(T) = \frac{\varphi(T)p_m(T)}{\int_0^\infty \varphi(T)p_m(T)dT} \tag{17}$$

Если поток отказов путевого выключателя простейший, то вероятность того, что при испытании на протяжении t_u путевого выключателя с наработкой на отказ Т будет иметь место ровно m отказов, определяется соотношением

$$p_m(T) = \frac{\left({}^{t_u}/_T\right)^m e^{-{}^{t_u}/_T}}{m!} \tag{18}$$

где t_u – суммарная наработка путевого выключателя за время испытаний.

На практике иногда приходится оперировать с дискретным распределением наработки путевого выключателя на отказ, задаваемым в виде табл.2.

Таблица 2.

T_i	T_1	T_2	T_3	…	T_i	…	T_k
Вер(T= T_i)	q (T_1)	q (T_2)	q (T_3)	…	q (T_i)	…	q (T_k)

Для случая дискретного распределения уравнение (17) принимает вид

$$p(T_i) = \frac{q(T_i)p_m(T_i)}{\sum_{i=1}^{k} q(T_i)p_m(T_i)} \tag{19}$$

где $q(T_i)$ – априорное распределение вероятностей наработки путевого выключателя на отказ; $p(T_i)$ – апостериорное распределение вероятностей наработки путевого выключателя на отказ.

При этом $p_m(T_i)$, как и в случае непрерывного распределения, определяется соотношением (18), в котором полагается T= T_i.

Аналогичным образом, как проделано выше для случая оценки наработки путевого выключателя на отказ, можно получить уравнение, определяющее апостериорную плотность распределения доли дефектных путевых выключателей $f(S)$ в функции от априорной плотности распределения $\varphi(S)$ и результатов эксперимента $p_m(S)$,

$$f(S) = \frac{\varphi(S)p_m(S)}{\int_0^1 \varphi(S)p_m(S)dS} \tag{20}$$

где $p_m(S)$ - вероятность того, что в выборке из n путевых выключателей с долей дефектных путевых выключателей S будет иметь место ровно m дефектных путевых выключателей.

В общем случае расчет $p_m(S)$ производится при помощи гипергеометрического распределения. Если объем выборки не превышает 10% от объема партии, то при определении $p_m(S)$ можно пользоваться биноминальным распределением

$$p_m(S) = C_n^m S^m (1-S)^{n-m} \tag{21}$$

где

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \tag{22}$$

Если же доля дефектных путевых выключателей в партии не превосходит 10% (S≤0,10), то расчет $p_m(S)$ можно вести при помощи распределения Пуассона

$$p_m(S) = \frac{(nS)m_e^{-nS}}{m!} \tag{23}$$

При оценке доли дефектных путевых выключателей, как и при оценке наработки путевых выключателей на отказ, часто приходится иметь дело с дискретным распределением доли дефектных путевых выключателей, задаваемым в виде табл.3.

Таблица 3.

S_i	S_1	S_2	S_3	…	S_i	…	S_k
Вер(S= S_i)	q (S_1)	q (S_2)	q (S_3)	…	q (S_i)	…	q (S_k)

Для случая дискретного распределения уравнение (20) принимает вид

$$p(S_i) = \frac{q(S_i)p_m(S_i)}{\sum_{i=1}^{k} q(S_i)p_m(S_i)} \tag{24}$$

где $q(S_i)$ - априорное распределение вероятностей доли дефектных путевых выключателей; $p(S_i)$- апостериорное распределение вероятностей доли дефектных путевых выключателей.

При этом $p_m(S_i)$, как и в случае непрерывного распределения, определяется соотношениями (21) - (23), в которых полагается S = S_i.

Таким образом, оптимальными показателями точечной оценки наработки путевого выключателя на отказ будут:

Для непрерывного распределения

$$\tilde{T} = \int_0^\infty Tf(T)dT \tag{25}$$

$$\sigma^2(T) = \int_0^\infty \left(T - \tilde{T}\right)^2 f(T)dT \tag{26}$$

Для дискретного распределения

$$\tilde{T} = \sum_{i=1}^{k} T_i p(T_i) \tag{27}$$

$$\sigma^2(T) = \sum_{i=1}^{k} \left(T_i - \tilde{T}\right)^2 p(T_i) \tag{28}$$

где $f(T)$- апостериорная плотность распределения наработки путевого выключателя на отказ, определяемая соотношением (17); $p(T_i)$ - апостериорное распределение вероятностей наработки путевого выключателя на отказ, определяемое уравнением (19).

В свою очередь оптимальными показателями точечной оценки доли дефектных путевых выключателей будут:

Для непрерывного распределения

$$\tilde{S} = \int_0^1 Sf(S)dS \tag{29}$$

$$\sigma^2(S) = \int_0^\infty \left(S - \tilde{S}\right)^2 f(S)dS \tag{30}$$

Для дискретного распределения

$$\tilde{S} = \sum_{i=1}^{k} S_i p(S_i) \tag{31}$$

$$\sigma^2(S) = \sum_{i=1}^{k}\left(S_i - \tilde{S}\right)^2 p(S_i) \qquad (32)$$

где $f(S)$- апостериорная плотность распределения доли дефектных путевых выключателей, определяемая выражением (20); $p(S_i)$ - апостериорное распределение вероятностей доли дефектных путевых выключателей, определяемое соотношением (24).

Вывод.

В процессе испытаний путевых выключателей мгновенного действия установлено, что априорное распределение наработки на отказ нормальное и задано в табл.4.

Таблица 4.

T_i,час	$q(T_i)$	T_i,час	$q(T_i)$	T_i,час	$q(T_i)$
40	0,003	90	0,175	130	0,065
50	0,009	100	0,197	140	0,028
60	0,028	110	0,175	150	0,009
70	0,065	120	0,121	160	0,003
80	0,021				

При этом априорная средняя наработка путевого выключателя на отказ равна $T_{ср}$=100час, априорное среднее квадратическое отклонение составляет σ=20 час и коэффициент вариации равен υ=0,20. Требуется исследовать зависимость показателей точечной оценки наработки путевого выключателя на отказ от количества отказов m за время испытаний $t_и$=180 час.

Результаты соответствующих расчетов, проведенных с помощью соотношений (18)-(19) и (27)-(28), представлены на рис.1. Кроме $\tilde{T}$ и $\sigma(\mathrm{T})$ на этом рисунке приведены зависимости выборочной средней $\bar{\mathrm{T}}$ и апостериорного коэффициента вариации υ(T), определяемых выражениями:

$$\bar{\mathrm{T}} = {t_и}/{m} \qquad (33)$$

$$\upsilon(T) - {\sigma(T)}/{\tilde{T}} \qquad (34)$$

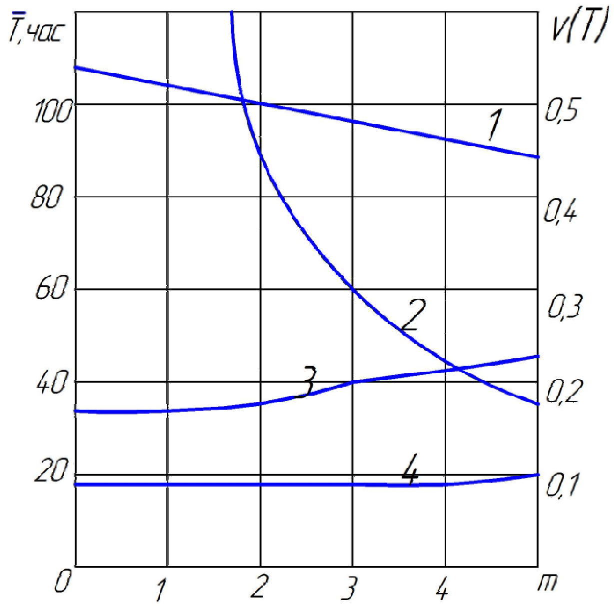

Рис. 1 – $\tilde{\mathrm{T}}$, σ(T)

1-$\tilde{T}$ 2-$\bar{\mathrm{T}}$ 3-$\upsilon(T)$ 4-σ(T)

Из сравнения зависимостей $\tilde{T}$ и $\bar{\mathrm{T}}$ видно, насколько существенно на оценку показателей надежности по опытным данным влияет учет априорного распределения. Весьма характерным также то обстоятельство, что при изменении количества отказов m от 1 до 5 апостериорное среднее квадратическое отклонение наработки путевого выключателя на отказ $\sigma(\mathrm{T})$ практически сохранятся постоянным и равным априорному среднему квадратическому отклонению (изменяется от 19 до 20,1).

В процессе испытаний путевых выключателей прямого действия установлено, что априорное распределение наработки выключателя на отказ равномерное и задано табл. 5.

Таблица 5.

T_i,час	$q(T_i)$	T_i,час	$q(T_i)$	T_i,час	$q(T_i)$
40	0,077	90	0,077	130	0,077
50	0,077	100	0,077	140	0,077
60	0,077	110	0,077	150	0,077
70	0,077	120	0,077	160	0,077
80	0,077				

Априорная средняя наработка путевого выключателя на отказ составляет $T_{ср}$=100 час, априорное среднее квадратическое отклонение равно σ=37,4 час и коэффициент вариации υ=0,374.Требуется исследовать зависимость показателей точечной оценки наработки путевого выключателя на отказ от количества отказов m за фиксированное время испытаний ($t_и$=180 час) и времени испытаний при фиксировнном количестве отказов (m=0).

Расчеты проводим по соотношения (18) – (19), (27)-(28) и (33)-(34).

При этом на рис. 2 представлена зависимость показателей точечной оценки наработки изделия на отказ от количества отказов m за время испытаний $t_и$=180 час, а на рис. 3 – зависимость показателей точечной оценки наработки путевого выключателя на отказ от длительности испытаний $t_и/T_{ср}$ при фиксированном числе отказов m=0.

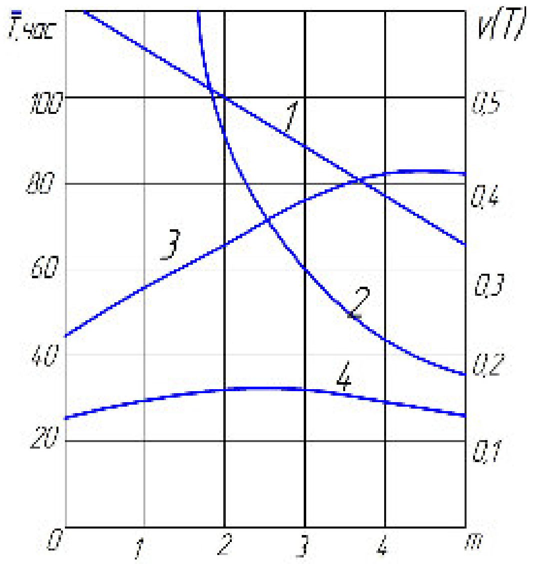

Рис. 2 – $\tilde{T}, \sigma(T)$

1-$\tilde{T}$ 2-$\bar{T}$ 3- $\upsilon(T)$ 4- $\sigma(T)$

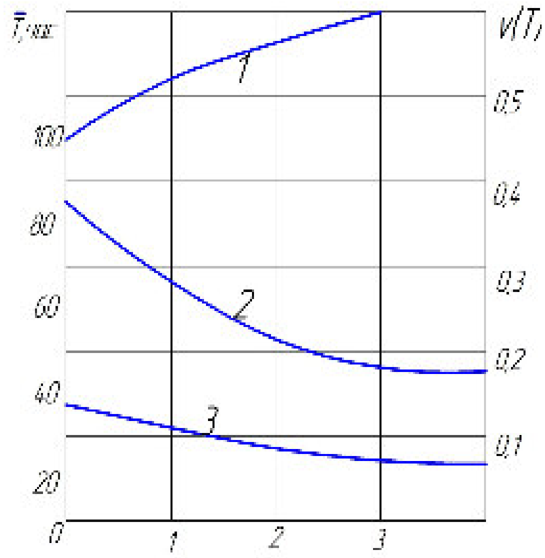

Рис. 3 – $\tilde{T}, \sigma(T)$

1-$\tilde{T}$ 2- $\upsilon(T)$ 3- $\sigma(T)$

Сравнение приведенных на рис.1-3 зависимостей показывает степень влияния вида априорного распределения вероятностей на результаты точечной оценки показателей надежности.

Литература

1. Жалдак М.І., Кузьміна Н.М., Берлінська С.Ю. Теорія ймовірностей і математична статистика з елементами інформаційної технології.-К.: Вища школа, 1990р.
2. Коваленко И.Н., Гнеденко Б.В. Теория вероятностей.-К.: Высш. шк.,1990г.
3. Шторм Р. «Теория вероятностей. Математическая статистика. Статистический контроль качества».Перевод с немецкого под редакцией Н.С. Райбман. Издательство «Мир», 1970г.
4. Гурман В.Е. Теория вероятностей математическая статистика – М.: Высш. шк., 2002г.
5. Вентцель Е.С. Теория вероятностей.-М.: «Наука», 1969г.
6. Румшинский Л.З. «Математическая обработка результатов эксперимента». Издательство «Наука», 1971г.
7. Ширяев А.Н. «Статистический последовательный анализ». Издательство «Наука»,1969г.

ОПТИМІЗАЦІЯ ПОКАЗНИКІВ ТОЧЕНОЇ ОЦІНКИ НАДІЙНОСТІ ПУТНІХ ВИМИКАЧІВ ПРЯМОЇ ТА МИТТЄВОЇ ДІЇ

В. П. Самошкин, Я. Б. Форкун, А. С. Чепурная

Розглянуті питання забезпечення надійності путніх вимикачів прямої та миттєвої дії на етапі приймально-сдачного контролю при використанні в задачах вимірювання і оцінки надійності функції втрат наступних видів:
-квадратична функція втрат;
-лінійна функція втрат;
-допустима функція втрат.

OPTIMIZATION OF PARAMETERS OF A DOT ASSESSMENT OF RELIABILITY OF THE GROUND SWITCHES OF DIRECT AND INSTANT ACTION

V. P. Samoshkin, Y. B. Forkun, A. S. Chepurnaya

Let's consider questions of maintenance of reliability of the ground switches of direct and instant action at take-given the control over use in problems of measurement and an assessment of reliability of function of losses of following types:
-square-law function of losses;
- linear function of losses;
- admissible function of losses.