ЕКОНОМІЧНІ НАУКИ

УДК 330.42
DOI: 10.15587/2313-8416.2016.78376

ОПТИМАЛЬНАЯ ДИВЕРСИФИКАЦИЯ ПОРТФЕЛЯ ЦЕННЫХ БУМАГ

© В. М. Андриенко

Статья посвящена проблемам теории и методам формирования оптимальных портфелей финансовых рынков. Представлен аналитический обзор методов в их историческом развитии. Сформулированы рекомендации по применению того или иного метода в зависимости от конкретных условий. Рассмотрены классические и альтернативные методы. Особое внимание уделено анализу инвестиционного портфеля производных ценных бумаг в (B/S) *– модели рынка*

Ключевые слова: *финансовые рыки, оптимизация, диверсификация, ценные бумаги, портфель, риск, доходность, модели*

The article deals with problems of the theory and methods of forming the optimal portfolio of financial markets. The analytical review of methods in their historical development is given. Recommendations on the use of a particular method depends on the specific conditions are formulated. The classical and alternative methods are considered. The main attention is paid to the analysis of the investment portfolio of derivative securities in -market model

Keywords*: financial markets, optimization, diversification, securities, portfolio, risk, return, models*

1. Введение

Современный финансовый рынок характеризуется значительной сложностью протекающих на нем процессов. Возрастают риски, происходит глобализация международных рынков, увеличивается волатильность валют, процентных ставок, курсов ценных бумаг и цен на сырьевые товары. Вследствие этого, финансовые рынки стали сложными, рискованными и нестабильными. Существует разрыв между экономическими теориями и реальными процессами. В этой связи, развитие теории и методов оптимизации портфелей ценных бумаг представляется весьма актуальной задачей. В данной работе представлен аналитический обзор методов оптимизации портфелей ценных бумаг.

2. Цель и задачи

Целью обзора является обобщение опыта в разработке теории и методологии инвестиционных портфелей.

Задача данной работы – показать преимущества и недостатки наиболее значимых методов, дать рекомендации по их применению и показать новые научные подходы к решению проблемы сближения теории и практики.

3. Литературный обзор

В становлении теории формирования портфеля ценных бумаг определяющую роль сыграла работа Г. Марковица [1]. Марковиц сформулировал подход к выбору и формированию портфеля ценных бумаг на основе учета его ожидаемой доходности и риска. В рамках данной теории предполагается, что инвестор стремится максимизировать ожидаемую доходность портфеля при заданном уровне риска или минимизировать риск при заданном уровне ожидаемой доходности при помощи диверсификации своих вложений. Риск в модели оценивается стандартным отклонением, что требует нормального распределения прибылей. В дальнейшем этот подход получил развитие в работах Дж. Тобина и У. Шарпа [2, 3].

Модель Марковица рационально использовать при стабильном состоянии фондового рынка, когда желательно сформировать портфель из ценных бумаг разного характера, которые принадлежат разным областям. Основной недостаток модели – ожидаемая доходность ценных бумаг принимается равной средней доходности по данным прошлых периодов. Кроме того, на практике зачастую не выполняются базовые допущения модели.

Преимущество модели Шарпа – математически обоснованная взаимозависимость доходности и риска, чем больший риск, тем больше доходность ценной бумаги. Для оптимизации фондового портфеля используются два варианта модели, аналогичных вариантам задачи Марковица.

Основной недостаток – необходимость прогнозировать доходность фондового рынка и безрисковую ставку доходности. Модель не учитывает риск колебаний безрисковой доходности. Кроме того, при значительном изменении соотношения между безрисковой доходностью и доходностью фондового рынка модель дает погрешности. Модель Шарпа может применяться при рассмотрении большого количества ценных бумаг, которые описывают большую часть относительно стабильного фондового рынка. Несмотря на критику этой модели, в настоящее время продолжаются работы по ее улучшению. Например, весьма эффективный адаптивный вариант разработан В. В. Давнисом [4].

В отличии от классической модели эффективного рынка, исключающей возможность арбитража, модель APT (Arbitrage Pricing Theory) предлагает в некоторых случаях возможность увеличения доходности портфеля без увеличения риска. Модель разработана С. Россом [5] и применима также как и модель Шарпа в условиях равновесия рынка.

Чтобы воспользоваться этой моделью, нужно рассчитать столько линейных моделей, сколько выбрано активов. Поскольку предполагается, что число активов велико, то вычислительная процедура становится весьма трудоемкой. Кроме того, ситуация на рынке быстро меняется, и такого типа модели не могут использоваться на длительном временном горизонте. Для того чтобы модель адекватно соответствовала ситуации, ее нужно строить заново. В таком случае возникает проблема ее адекватности, и проблема проверки качества становится неразрешимой.

Модель APT относится к многофакторным моделям. Она учитывает основные экономические воздействия, влияние которых отражается на стоимости ценных бумаг. К группе многофакторных моделей относится и модель BARRA [3], разработанная в 1970 г. Розенбергом. Эта модель, кроме рыночных показателей, учитывает финансовые показатели (в частности данные баланса) компаний. В модели используется 68 различных фундаментальных и промышленных факторов.

Альтернативой классической модели Марковитца стал *нечетко-множественный поход* в оптимизации инвестиционного портфеля, предложенный в работе [6] и развитый в [7]. Корреляция активов в портфеле не рассматривается и не учитывается. Ограничение на предельно низкий уровень доходности может быть как обычным скалярным, так и нечетким числом произвольного вида. Таким образом, два источника информации (средняя доходность и волатильность актива) сводятся в один (расчетный коридор доходности или цены) и тем самым объединяются два источника неопределенности в один. Оптимизировать портфель в такой постановке означает максимизировать ожидаемую доходность портфеля в точке времени T при фиксированном уровне риска портфеля (по аналогии с тем, как это делается в [1] и [2]).

Классические методы оптимизации портфеля ценных бумаг базируются на предположениях, которые на практике не выполняются. Поэтому продолжаются поиски альтернативных подходов к решению проблемы оптимальной диверсификации портфеля.

Для изучения более сложных объектов на фондовом рынке используется (B, S) – модель рынка [8]. Рассмотрим вероятностное пространство (Ω, F, P), которое описывает множество состояний рынка. Рынок представлен двумя видами активов: банковским счетом (или безрисковым активом) B и рисковым $A=$ $=(A_1, A_2, \ldots, A_d)$, которые в каждый момент времени t представлены на рынке своими ценами B_t и $S_t=(S_t^1, S_t^2, \ldots, S_t^d)$. Таким образом, стоимость условной единицы вложений на банковский счет описывается функцией $(B_t)_{t\ge 0}=B(t), t\ge 0$ (в случае непрерывного времени) или последовательностью $(B_n)_{n\ge 0, n\in\mathbb{Z}}$ (если время рассматривается дискретно). Здесь и далее Z – множество целых чисел. Рыночные цены рискового актива, соответственно, функцией $(S_t)_{t\ge 0}=S(t), t\ge 0$ или последовательностью $(S_n)_{n\ge 0, n\in\mathbb{Z}}$. Риск актива A отображается в модели тем, что ценовой процесс $(S_t)_{t\ge 0}$ трактуется как стохастический (случайный) процесс на вероятностном пространстве (Ω, F, P).

Кроме того, рассмотрим на том же вероятностном пространстве в каждый момент времени $t\ge 0$ σ-алгебру $F_t=F_t^S=\sigma\{S_u, u\le t\}$, которая интерпретируется как объем информации, доступный каждому участнику рынка в момент $t\ge 0,$ то есть для любого $t\ge 0$ случайные величины, измеримые относительно F_t, становятся полностью известными всем участникам рынка в момент не позже t.

Если рассматривать вариант модели с дискретным временем, то тогда о базовых активах в момент времени $t\ge 0$ можно сказать следующее:

– величина B_n является F_{n-1}-измеримой (в момент вложения средств в безрисковый актив инвестор точно знает, какой доход получит спустя один базовый период);

– величина S_n (также как каждая ее компонента $S_n^{\,i}, i=\overline{1,d},$ если она многомерна) является F_n-измеримой.

Введем следующие предположения относительно допустимых действий инвестора:

– возможность размещать свои средства на банковском счете и брать с него в долг;

– покупать и продавать акции, пакеты которых считаются «безгранично делимыми»;

– выполнять «короткие продажи» (short sale), что означает проведение операций с ценными бумагами, взятыми в долг.

Введем ряд понятий для дискретного времени. Заметим, что эти понятия несложно распространить и в случае непрерывного времени.

Относительное приращение цены некоторого товара в широком смысле)

$$\rho_n=\frac{\Delta S_n}{S_{n-1}}=\frac{S_n-S_{n-1}}{S_{n-1}}=\frac{S_n}{S_{n-1}}-1 \qquad (1)$$

называется *случайной процентной ставкой этого товара*, относительным доходом, коэффициентом прироста или возвратом (return). Величина ρ_n становится известной в момент n (F_n-измерима), но вычисляется как доля величины цены в момент $n–1$. Она моделирует неопределенность, существующую в момент $n-1$ в изменении цены к моменту n. Если $\rho_n > 0$, то цена товара растет, если $\rho_n < 0$ – то падает. При этом всегда $\rho_n > -1$.

Портфелем ценных бумаг называется пара $\pi = (\beta, \gamma)$ последовательностей величин

$$\beta = (\beta_n)_{n \geq 0, n \in \mathbb{Z}}$$

и

$$\gamma = (\gamma_n)_{n \geq 0, n \in \mathbb{Z}} = (\gamma_n^{\ 1}, \gamma_n^{\ 2}, ..., \gamma_n^{\ d})_{n \geq 0, n \in \mathbb{Z}},$$

которые интерпретируются следующим образом:

– β_n – банковский вклад в момент n (в единицах актива B);

– γ_n^i – объем актива A_i у инвестора к моменту времени n, $i = \overline{1, d}$ (в единицах актива A_i – может быть одна акция, но чаще – один условный пакет акций).

Величины β_n и γ_n являются F_{n-1} измеримыми.

Капиталом портфеля ценных бумаг $\pi = (\beta, \gamma)$ называется последовательность $X^{\pi} = (X_n^{\pi})_{n \geq 0, n \in \mathbb{Z}}$, определяемая равенством:

$$X_n^{\pi} = \beta_n B_n + \sum_{i=1}^{d} \gamma_n^i S_n^i . \qquad (2)$$

Банковский вклад β_n может быть отрицательным, что означает взятие в долг, объем акций γ_n^i также может принимать отрицательные значения – это соответствует «коротким продажам» актива A_i.

Для упрощения записи скалярное произведение векторов γ_n и S_n будем обозначать так же, как произведение чисел, а именно:

$$\gamma_n S_n = \sum_{i=1}^{d} \gamma_n^i S_n^i . \qquad (3)$$

В этих обозначениях капитал портфеля ценных бумаг $\pi = (\beta, \gamma)$ записывается в виде:

$$X_n^{\pi} = \beta_n B_n + \gamma_n S_n . \qquad (4)$$

Зафиксируем некоторый временной горизонт T, $T > 0$. Будем называть *платежным обязательством* $f = f_T$ всякую F_T-измеримую функцию, заданную на «пространстве состояний финансового рынка» (Ω, A). В частности, f_T может быть некоторой функцией цен S актива A. Например, форвардный контракт о покупке-продаже в будущем актива A_i по заранее оговоренной цене F и с датой поставки T эквивалентен обязательству $f_T(S_T) = S_T^i - F$. Опцион-колл Европейского типа с ценой K и сроком исполнения T эквивалентен функции $f_T = f_T(S_T) = (S_T - K)_+$, которая является платежным обязательством. Аналогичный опцион продавца, соответственно, эквивалентен обязательству

$$f_T = f_T(S_T) = (K - S_T)_+ .$$

Чистый доход продавца (эмитента) и держателя опциона, очевидно, также являются платежными обязательствами. Однако чаще рассматривают валовой доход (убыток) – например, как сумму, требующую покрытия.

В целом, множество производных ценных бумаг порождает в плоскости с координатами (S_T, f_T) множество графиков соответствующих платежных обязательств CCG (Contingent Claim`s Graphs) (рис. 1, *а–в*).

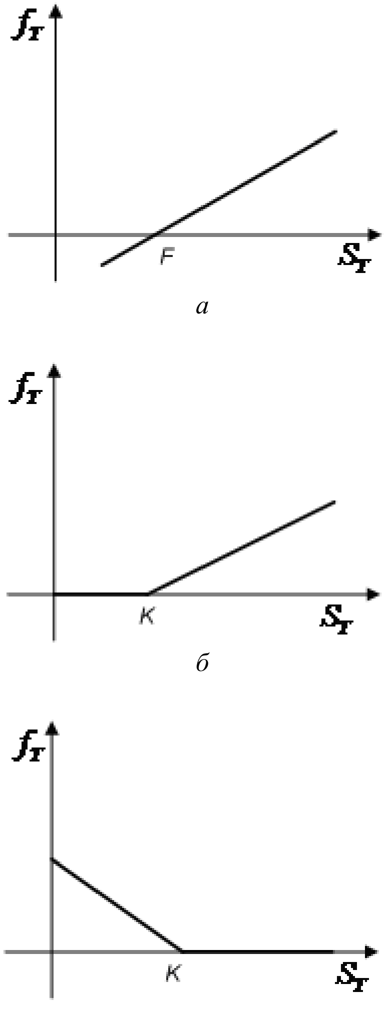

Рис. 1. График платежных обязательств:
а – $f_T = S_T - F$; *б* – $f_T = S_T - K$; *в* – $f_T = K - S_T$

Заметим, что при оценке платежного обязательства f_T в момент времени *t* часто рассматривают его величину, дисконтированную к моменту *t* по безрисковому активу, а именно $\frac{B_t}{B_T} f_T$.

Расчет портфеля ценных бумаг происходит исходя из некоторых условий, налагаемых на него в зависимости от индивидуальных качеств и предпочтений инвестора (например, склонности к риску). Чаще всего имеет место задача расчета портфеля так, чтобы его капитал удовлетворял ряду ограничений, например, был не ниже заданной величины в определенные моменты времени или покрывал некоторое платежное обязательство. Портфель является последовательностью величин β_n и γ_n, и в начальный момент времени $n=0$ их значения еще не определены. Но инвестор знает, что к моменту $n–1$, когда потребуется фиксировать β_n и γ_n, у него уже будет достаточно информации, чтобы выбрать их однозначно. Этой информацией являются рыночные цены $S_{n–1}$, банковские параметры $B_{n–1}$ и r_n (банковская процентная ставка на n -й базовый период).

Таким образом, инвестор выбирает не фиксированные объемы покупок и продаж на фондовом рынке, а свою стратегию поведения. Он решает однозначно в момент времени $n=0$, как реагировать на все возможные изменения рыночных цен. Вычислим приращение капитала портфеля за один базовый период (такт) времени. Для этого введем дополнительные обозначения:

$$\Delta B_n = B_n - B_{n-1},\ \Delta S_n = S_n - S_{n-1},$$

$$\Delta\beta_n = \beta_n - \beta_{n-1},\ \Delta\gamma_n = \gamma_n - \gamma_{n-1}.$$

Применяя равенство $\Delta(a_n b_n) = a_n \Delta b_n + b_{n-1}\Delta a_n$, выразим приращение капитала:

$$\begin{aligned}\Delta X_n^\pi &= X_n^\pi - X_{n-1}^\pi = \Delta(\beta_n B_n + \gamma_n S_n) = \\ &= \Delta(\beta_n B_n) + \Delta(\gamma_n S_n) = \\ &= \beta_n \Delta B_n + B_{n-1}\Delta\beta_n + \gamma_n \Delta S_n + S_{n-1}\Delta\gamma_n = \\ &= [\beta_n \Delta B_n + \gamma_n \Delta S_n] + [B_{n-1}\Delta\beta_n + S_{n-1}\Delta\gamma_n]. \qquad (5)\end{aligned}$$

Второе слагаемое полученного выражения (вторая квадратная скобка) является F_{n-1} -измеримым и представляет собой изменение капитала портфеля в момент $n-1$ за счет выбранного изменения структуры самого портфеля (за счет приращений $\Delta\beta_n$ и $\Delta\gamma_n$ при текущих ценах B_{n-1} и S_{n-1}). Эти приращения осуществляются в момент времени $n-1$. Другими словами, выражение (5) есть объем вложенных средств в момент $n-1$. Оно может быть положительным (вливание капитала), отрицательным (изъятие капитала), или равняться нулю (перераспределение имеющегося капитала). Первое же слагаемое полученного выражения для приращения капитала – это изменение капитала портфеля за рассматриваемый период времени за счет изменения рыночных цен и за счет банковских процентов, то есть результат динамики цен непосредственно финансовых активов.

Портфель ценных бумаг π называется *самофинансируемым*, если его капитал можно представить в виде

$$X_n^\pi = X_0^\pi + \sum_{k=1}^{n}(\beta_k \Delta B_k + \gamma_k \Delta S_k),\ \ n \ge 1. \qquad (6)$$

Исходя из того, что $X_n^\pi = X_0^\pi + \sum_{k=1}^{n}\Delta X_k^\pi,\ \ n \ge 1$, и используя полученное ранее выражение (5) для приращения капитала портфеля, можем записать условие самофинансирования в следующем виде:

$$B_{k-1}\Delta\beta_k + S_{k-1}\Delta\gamma_k = 0,\ \ k=\overline{1,n}, n \ge 1, \qquad (7)$$

то есть, портфель называется самофинансируемым, если на каждом такте не производится вливания или оттока капитала, и изменение портфеля происходит лишь за счет перераспределения доступных по нему средств.

Цены акций и капитал можно измерять не только в абсолютных величинах, но и в относительных – в процентах к банковскому счету:

$$\tilde{S}_n = \frac{S_n}{B_n},.$$

$$\tilde{X}_n^\pi = \frac{X_n^\pi}{B_n},$$

$$\tilde{B}_n = 1.$$

Тогда условие самофинансируемости можно записать так:

$$\tilde{B}_{k-1}\Delta\beta_k + \tilde{S}_{k-1}\Delta\gamma_k = \frac{B_{k-1}\Delta\beta_k + S_{k-1}\Delta\gamma_k}{B_{k-1}} = 0,$$

$$k=\overline{1,n}, n \ge 1 \qquad (8)$$

или, учитывая $\Delta\tilde{B}_n = 0,\ n \ge 1$:

$$\tilde{X}_n^\pi = \tilde{X}_0^\pi + \sum_{k=1}^{n}(\gamma_k \Delta\tilde{S}_k),\ \ n \ge 1 \qquad (9)$$

или в приращениях:

$$\Delta\left(\frac{X_n^\pi}{B_n}\right) = \gamma_n \Delta\left(\frac{S_n}{B_n}\right),\ \ n \ge 1. \qquad (10)$$

Множество самофинансируемых портфелей является важнейшим классом портфелей. Это множество обозначается SF (от self-financing), а самофинансируемый портфель – $\pi \in SF$.

Иногда к формированию портфеля предъявляются дополнительные требования, которые нужно учитывать при построении модели и решении поставленной задачи, например:

– $\beta_n \ge 0$, нельзя брать денежные средства в долг у банка;

– $\gamma_n \ge 0$, запрещены «short sale»;

– $\frac{\gamma_n S_n}{X_n^\pi} \le \alpha$ – существуют ограничения на долю «рискового капитала».

5. Результаты анализа

Грамотно диверсифицированный на базе конкретного фондового индекса портфель на развитом рынке имеет риск, близкий к рыночному. При этом его доходность близка к доходности выбранного рыночного индекса, под который и осуществлялась диверсификация. Как показали практика и анализ, 70–80 % несистематических рисков устраняются в портфеле, включающем (7–10) акций, а 90 % – в портфеле, состоящем из 12–18 акций. Существуют методики расчета классических моделей в Microsoft Excel [9, 10].

Отметим, что при распределении инвестиций по активам, следует учитывать, что активы должны иметь слабую корреляцию друг с другом для того, чтобы убытки по одному активу могли компенсироваться прибылями по другому.

6. Выводы

Рассмотренные методы относятся к числу наиболее значимых и заметных результатов, на основании которых строятся другие – новые, сложные и точные, однако и более трудоемкие. Все они в совокупности образуют сложную математическую теорию, которой посвящены десятки книг и тысячи журнальных статей. Усложнения касаются различных параметров и предположений относительно модели. Это может быть, например, цена рассматриваемого актива (можно учитывать транзакционные издержки, наращивать или выплачивать дивиденды, и т. п.), структура банковской процентной ставки (в реальности ставки по кредиту и депозиту отличаются, чего не учитывают при построении базовых моделей), действующие на рынке ограничения и тому подобное.

Все эти методы дают не точное, но приближенное решение поставленной задачи, а потому исследования в этой области все еще продолжаются. В задачах, связанных с моделированием реальности – таких, как рассматриваемая задача о цене опциона, построение любых экономических моделей, окончательного и однозначного ответа и вовсе не существует, а существует лишь множество более или менее удачных подходов к нахождению приближенных решений. Это обусловлено неопределенностью.

Литература

1. Markowitz, H. M. Portfolio Seletion [Text] / H. M. Markowitz // Journal of Finance. – 1952. – Vol. 7, Issue 1. – P. 77–91.

2. Tobin, J. The Theory of Portfolio Selection [Text] / J. Tobin; F. H. Hahn, F. P. R. Brechling (Eds.) // Theory of Interest Rates. – London: MacMillan, 1965. – P. 3–51.

3. Шарп, У. Инвестиции [Текст] / У. Шарп, Г. Александер, Дж. Бэйли. – М.: ИНФРА-М, 2003. – 1028 с.

4. Давнис, В. В. Прогнозные модели экспертных предпочтений [Текст]: монография / В. В. Давнис, В. И. Тинякова. – Воронеж: Идательство Вронеж. гос.ун-та, 2005. – 248 с.

5. Ross, S. A. The Arbitrage Theory of Capital Assert Pricing [Text] / S. A. Ross // Journal of Economic Theory. – 1976. – Vol. 13, Issue 3. – P. 341–360. doi: 10.1016/0022-0531(76)90046-6

6. Недосекин, А. О. Нечетко-множественный анализ риска фондовых инвестиций [Текст] / А. О. Недосекин. – СПб.: Сезам, 2001. – 181 с.

7. Зайченко, Ю. П. Анализ модели оптимизации нечеткого портфеля [Текст] / Ю. П. Зайченко, Е. Малихех // Веснiк НТУУ«КП» Iнформатика, управлiння та обчислювальна техника. – 2009. – № 50. – С. 198–204.

8. Ширяев, А. Н. Основы стохастической финансовой математики. Т. 1 [Текст] / А. Н. Ширяев // Факты. Модели. – М.: ФАЗИС, 1998. – 512 с.

9. Андриенко, В. М. Оптимизация портфеля инвестиций в Microsoft Excel [Текст] / В. М. Андриенко, Е. Ю. Голованова // Perspektywiczne opracowania sa nauka I technikami-2009. – Przemysl: Nauka i studia, 2009. – P. 27–34.

10. Жданов, И. Ю. Инвестиционный портфель Тобина. Принципы построения [Электронный ресурс] / И. Ю. Жданов // Финансы для чайников. – Режим доступа: http://finzz.ru/investicionnyj-portfel-cennyx-bumag-portfel-tobina-v-excel.html

References

1. Markowitz, H. M. (1952). Portfolio Seletion. Journal of Finance, 7 (1), 77–91.

2. Tobin, J.; Hahn, F. H., Brechling, F. P. R. (Eds.) (1965). The Theory of Portfolio Selection. Theory of Interest Rates. London: MacMillan, 3–51.

3. Sharp, U., Aleksander, G., Bjejli, Dzh. (2003). Investicii. Moscow: INFRA-M, 1028.

4. Davnis, V. V., Tinjakova, V. I. (2005). Prognoznye modeli jekspertnyh predpochtenij. Voronezh: Idatel'stvo Vronezh. gos.un-ta, 248.

5. Ross, S. A. (1976). The Arbitrage Theory of Capital Assert Pricing. Journal of Economic Theory, 13 (3), 341–360. doi: 10.1016/0022-0531(76)90046-6

6. Nedosekin, A. O. (2001). Nechetko-mnozhestvennyj analiz riska fondovyh investicij. Sankt-Peterburg: Sezam, 181.

7. Zajchenko, Ju. P., Maliheh, E. (2009). Analiz modeli optimizacii nechetkogo portfelja. Vesnik NTUU«KP» Informatyka, upravlinnja ta obchysljuval'na tehnyka, 50, 198–204.

8. Shirjaev, A. N. (1998). Osnovy stohasticheskoj finansovoj matematiki. Vol. 1. Fakty. Modeli. Moscow: FAZIS, 512.

9. Andrienko, V. M., Golovanova, E. Ju. (2009). Optimizacija portfelja investicij v Microsoft Excel. Perspektywiczne opracowania sa nauka I technikami-2009. Przemysl: Nauka i studia, 27–34.

10. Zhdanov, I. Ju. Investicionnyj portfel' Tobina. Principy postroenija. Finansy dlja chajnikov. Available at: http://finzz.ru/investicionnyj-portfel-cennyx-bumag-portfel-tobina-v-excel.html

Рекомендовано до публікації д-р екон. наук, професор Соколовська З. М.
Дата надходження рукопису 03.08.2016

Андриенко Валентина Михайловна, кандидат экономических наук, кафедра экономической кибернетики и информационных технологий, Одесский национальный политехнический университет, пр. Шевченко, 1, г. Одесса, Украина, 65044
E-mail: andrienko.v@gmail.com