

УДК 536.2:539.3

В. Веселовський, канд. фіз.–мат. наук; Т. Босенко

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ СКЛАДЕНИХ ТІЛ ПРИ ЕКСТРЕМАЛЬНИХ ВПЛИВАХ

Структурним методом отримано розв'язки лінійних задач теплопровідності для складених тіл при екстремальних теплових впливах. Для розв'язання задач теплопровідності з урахуванням теплової пам'яті запропоновано застосовувати структурний метод і метод послідовних інтервалів. Загальний розв'язок отримано для довільних за часом тривалості імпульсів. Розглянуто граничний випадок пульсаційного впливу на матеріали. Проведено числові дослідження рівнянь гіперболічного та інтегро-диференціального типів при часах релаксації теплового потоку та внутрішньої енергії на предмет збіжності розв'язків даного типу рівнянь з параболічним для нерівноважних процесів нестационарної теплопровідності.

Ключові слова: *Теплова пам'ять, екстремальні умови нагрівання, інтегро-диференціальні рівняння теплопровідності, багатошарове складене тіло, релаксаційні процеси, асимптотичні та структурні розв'язки.*

V. Veselovskiy, T. Bosenko

TASKS SOLUTIONS OF HEAT CONDUCTIVITY FOR MULTIPLE BODIES AT EXTREME INFLUENCES

The solutions of heat conductivity linear tasks for multiplied bodies at extreme thermal influences are got. For the tasks solutions of heat conductivity taking into account thermal memory had suggested to apply a structural method and method of successive intervals. A general solution is got for different times of impulse duration. The boundary case of pulsation influence is considered on materials. Numeral researches of hyperbolical and integral-differential equations taking into account the relaxation time of heat stream and internal energy for non-equilibrium processes of non-stationary heat-conducting.

Key words: *Thermal memory, extreme conditions of heating, integral-differential equations of heat conductivity, multi-layered solid body, relaxation processes, asymptotic and structural solutions.*

Умовні позначення

T – температура, К;

λ – коефіцієнт теплопровідності, Вт/м·К;

c – теплоємність, Дж/кг·К;

ρ – густина, кг/м³; ν, m - номер шару;

q_{ν} – об'ємне тепловиділення, Вт/м³;

a – коефіцієнт температуропровідності, м²/с;

R_i, δ_i – геометричні розміри;

$X = \frac{x_{\nu}}{\Delta x_{\nu}}$ – безрозмірна координата;

$Fo = \frac{a \cdot \tau}{R_0^2}$ – безрозмірний час;

$\Theta_{\nu}(X, Fo)$ - локально-нерівноважна температура.

Вступ. Застосування в народному господарстві принципово нових технологій – електронно-променевих, плазмових, імпульсних дозволяє значно підвищити продуктивність праці, підняти ефективність використання ресурсів і понизити матеріаломісткість виробництва. Суть багатьох імпульсних технологічних процесів зміцнення полягає в тому, що на відносно невеликі об'єми металу впливають імпульсно

(з великими швидкостями) потоки енергії високої інтенсивності, одночасно деформуючи і швидко охолоджуючи метал. Такі умови обробки дозволяють отримувати вельми цінні фізико-механічні й експлуатаційні характеристики [1].

Дослідження фазових і структурних перетворень у сплавах при підвищених швидкостях нагрівання показали, що швидке нагрівання дозволяє отримати структури, які не можуть бути створені стандартними видами термообробки. Нагрівання металу до температури A_{c3} (зворотне мартенситне перетворення) протягом мілісекунди називається імпульсним (лазерний, електронно-променевий, електрогідро – імпульсний і ін.), протягом десятої частки секунди - швидким (індукційний, плазмовий) і протягом декількох хвилин – звичайним (пічний) [2].

Таким чином, одним з основних напрямів в вивченні високоінтенсивних процесів є розвиток теоретичної обґрунтованості явищ, які спостерігаються при швидкісній обробці багат шарових матеріалів. Це дозволяє зменшити витрати при проведенні дослідів і оптимізувати розрахунок температурних полів у багат шаровій структурі, унаслідок чого з'являється можливість проведення досліджень і визначення глибини проникнення руйнуючого теплового потоку, а також дії зовнішніх джерел високої інтенсивності на матеріал. Екстремальні умови роботи складеної конструкції: високоінтенсивне імпульсне нагрівання, низькі і високі температури, плазмове напилювання, лазерна обробка матеріалів призвели до необхідності побудови математичних моделей, заснованих на гіперболічних та інтегро-диференціальних рівняннях теплопровідності. Опис процесів теплопровідності у звичайних умовах для середовищ зі складною структурою (полікристалічні структури, полімери) приводить також до необхідності розв'язання задач теплопровідності для середовищ, наділених тепловою пам'яттю або спадковістю. У теорії теплопровідності поняття “середовище з тепловою пам'яттю” пов'язане з релаксаційними процесами. Самі речовини не здійснюють цілеспрямованих дій, а з часом під дією зовнішніх впливів або внутрішньої еволюції змінюють свій стан або властивості. Якщо процес придбання (або втрати) речовиною яких-небудь властивостей (наприклад, акумулювання теплоти, енергії) або перехід її з одного стану в інше залежить від попереднього стану, то говорять, що речовина наділена пам'яттю [3].

Розв'язання систем інтегро-диференціальних рівнянь. Задачі теплопровідності, засновані на класичному рівнянні теплопровідності, для складних твердих тіл розглянуто в роботах Кудінова В.А., Карташова О.М., Калашникова В.В., Веселовського В.Б., Рядно А.А. Розв'язання задач теплопровідності твердих тіл з використанням гіперболічного рівняння, яке поєднує в собі властивості як класичного рівняння теплопровідності, що описує дисипативний спосіб передачі енергії, так і хвильового рівняння (друга похідна за часом), що описує розповсюдження незгасаючих хвиль, розглянуте в роботах Накорчевського А.І., Бубнова А.Г., Шабловського В.А., Шашкова О.Н., Яновського В.Я. Феноменологічний опис ефектів теплової пам'яті може бути здійснений різними методами:

– процес описується лінійним рівнянням гіперболічного типу (наявність часу релаксації теплового потоку τ_r);

– процес описується лінійним інтегро-диференціальним рівнянням з ядром, вибраним на основі фізичних міркувань (задається як час релаксації теплового потоку, так і час релаксації внутрішньої енергії τ_9):

$$\alpha_v(0) \frac{\partial^2 T_v(x_v, \tau)}{\partial x_v^2} + \int_0^\infty \alpha_v(s) \frac{\partial^2 T_v(x_v, \tau - s)}{\partial x_v^2} ds = \beta_v(0) \frac{\partial T_v(x_v, \tau)}{\partial \tau} + c_v \rho_v \frac{\partial^2 T_v(x_v, \tau)}{\partial \tau^2} + \int_0^\infty \beta_v(s) \frac{\partial T_v(x_v, \tau - s)}{\partial \tau} ds + w_v(x, \tau) \left(1 + \tau_r \frac{\partial}{\partial \tau} \right), \quad (1)$$

де $\nu = 1, 2, 3, \dots, m$, $\alpha_\nu(\tau)$, $\beta_\nu(\tau)$ – функції релаксації теплового потоку і внутрішньої енергії. Як функції релаксації можуть бути прийняті вирази [4,5]:

$$\alpha_\nu(\tau) = \frac{\lambda_\nu}{\tau_{\nu,r}} \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_{\nu,r}}\right),$$

$$\beta_\nu(\tau) = \frac{c_\nu \rho_\nu}{\tau_{\nu,\varepsilon}} \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_{\nu,\varepsilon}}\right),$$
(2)

де $\tau_{\nu,r}, \tau_{\nu,\varepsilon}$ – час релаксації теплового потоку та внутрішньої енергії для ν -го шару.

В (1) x_ν – локальна координата ($0_\nu \leq x_\nu \leq R_\nu$); τ – поточний час ($0 \leq \tau < \infty$); $w_\nu(x, \tau)$ – потужність внутрішніх джерел (стоків) тепла.

Система інтегро-диференціальних рівнянь (1) дозволяє моделювати нестационарний теплообмін у системі складених тіл з тепловою пам'яттю. При

$$\alpha_\nu(0) = \frac{\lambda_\nu}{\tau_{\nu,r}}; \alpha_\nu(\tau) = 0; \beta_\nu(0) = \frac{c_\nu \rho_\nu}{\tau_{\nu,\varepsilon}}; \tau_{\nu,\varepsilon} = \tau_{\nu,r}; \beta_\nu(\tau) = 0$$
(3)

система рівнянь (1) переходить у систему гіперболічних рівнянь і дозволяє моделювати нестационарний теплообмін у складених тілах при екстремальних, імпульсних теплових впливах.

При $\tau_{\nu,r} = 0$ система гіперболічних рівнянь переходить у систему параболічних рівнянь, що описує нестационарний теплообмін у складених тілах при дії полів різної фізичної природи.

Початкові умови для системи рівнянь (1) мають вигляд:

$$T_\nu(x_\nu, 0) = \varphi_{1,\nu}(x_\nu);$$
(4)

$$\left. \frac{\partial T_\nu(x_\nu, \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = \varphi_{2,\nu}(x_\nu).$$
(5)

Зв'язок між початковими умовами (4), (5) визначається співвідношенням

$$\varphi_{2,\nu} = \left. \frac{\partial \varphi_{1,\nu}(x_\nu)}{\partial x_\nu} \right|_{x_\nu=0} \sqrt{\frac{a_\nu}{\tau_{r,\nu}}}.$$

Зовнішні граничні умови в уніфікованому вигляді :

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha_0 \lambda_\nu \frac{\partial T_\nu(x_\nu, \tau)}{\partial x_\nu} \Big|_{x_\nu=0} &= h_0 \alpha_0^* \left([f_0(\tau) - M_0 T_\nu(x_\nu, \tau)] \Big|_{x_\nu=0} + k_0 \tau_{p,\nu} \frac{\partial}{\partial \tau} [f_0(\tau) - M_0 T_\nu(x_\nu, \tau)] \Big|_{x_\nu=0} \right), \\ \alpha_1 \lambda_m \frac{\partial T_m(x_m, \tau)}{\partial x_m} \Big|_{x_m=R_m} &= h_1 \alpha_1^* \left([f_1(\tau) - M_1 T_m(x_m, \tau)] \Big|_{x_m=R_m} + k_1 \tau_{p,m} \frac{\partial}{\partial \tau} [f_1(\tau) - M_1 T_m(x_m, \tau)] \Big|_{x_m=R_m} \right). \end{aligned} \right. \quad (6)$$

Умови на стику:

$$\left\{ \begin{aligned} \int_0^\infty \alpha_\nu(s) \frac{\partial T_\nu(x_\nu, \tau-s)}{\partial x_\nu} ds \Big|_{x_\nu=1} &= R_{\nu+1} [T_{\nu+1}(0, \tau) - T_\nu(1, \tau)], \\ \int_0^\infty \alpha_\nu(s) \frac{\partial T_\nu(x_\nu, \tau-s)}{\partial x_\nu} ds \Big|_{x_\nu=1} - \mu_{\nu+1,\nu} \int_0^\infty \alpha_{\nu+1}(s) \frac{\partial T_{\nu+1}(x_{\nu+1}, \tau-s)}{\partial x_{\nu+1}} ds \Big|_{x_{\nu+1}=0} &= f_2(\tau), \end{aligned} \right.$$

де $\mu_{\nu, \nu+1} = \frac{\lambda_{\nu+1}}{\lambda_{\nu}} \cdot \frac{R_{\nu}}{R_{\nu+1}}$, $f_0(\tau), f_1(\tau), f_2(\tau)$ – граничні функції, які залежно від типу граничних умов є температурою навколишнього середовища (граничні умови 1 роду), тепловим потоком (граничні умови 2 роду); α_0^*, α_1^* – приведені коефіцієнти теплообміну на зовнішніх поверхнях системи, які включають складові конвективного і променистого теплообміну; $\tau_{p, \nu}$ – час релаксації теплового потоку для ν -го шару.

Такий вид зовнішніх граничних умов дозволяє формулювати завдання нестационарної теплопровідності для систем параболічних і гіперболічних рівнянь. Для системи інтегро- диференціальних рівнянь граничні умови можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} -\int_0^{\infty} \alpha_1(s) \frac{\partial T_1(x_1, t-s)}{\partial x_1} ds = \Phi_1(t), \\ \int_0^{\infty} \alpha_m(s) \frac{\partial T_m(x_m, t-s)}{\partial x_m} ds = \Phi_2(t). \end{cases} \quad (7)$$

Метод розв’язання. Якщо перейти до узагальнених змінних і застосувати до задачі (1)-(7) інтегральне перетворення Лапласа по часовій змінній, а також структурний метод розв’язання задач теплопровідності для складених тіл [4,6], отримаємо розв’язок задачі (1)-(7) у вигляді:

$$\begin{aligned} \Theta_{\nu}(X, Fo) = & \sum_{r=1}^{2m} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n \left[\mu_{n,r}^{\nu}(X, \overline{Fo}), \varphi_n \right] g_r^{(n)}(Fo, \overline{Fo}) + \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{g}_r(p_k)}{\Psi'(\varphi_n, p_k)} Q \left[\mu_{n,r}^{\nu}(X, \overline{Fo}), p_k \right] \exp(-\gamma_k^2 Fo) \right\} + Z_{\nu}^*(X, \overline{Fo}, Fo), \end{aligned} \quad (8)$$

де $\overline{Fo} = Fo_r = \frac{a_0 \cdot \tau_r}{R_0^2}$, $g_r^{(n)}(Fo, \overline{Fo})$ – компоненти впливу, які характеризують

нерівномірність початкового розподілу температури, розподіл джерел (стоків) тепла по перетину, параметри контактного термічного опору та релаксації теплового потоку і внутрішньої енергії.

Асимптотичний розв’язок (8) набуде вигляду:

$$\begin{aligned} \Theta(X, Fo) = & f_1(Fo) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Q_1(X, p_k)}{\psi'(p_k)} \cdot e^{-p_k^2 Fo} + \tilde{f}_2(Fo) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Q_2(X, p_k)}{\psi'(p_k)} \cdot e^{-p_k^2 Fo} + \\ & + \sum_{i=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_{i,n}(\mu, \varphi) \cdot f_i^{(n)}(Fo). \end{aligned} \quad (9)$$

При $r = 3, 4, 5, \dots, m+1$: $g_r(Fo, \overline{Fo}) = V_{i,i+1}(Fo, \overline{Fo})$ – компоненти впливу, які сформовані за рахунок неідеального теплового контакту на стиках шарів і в полі зображень мають вигляд [7]:

$$\bar{V}_{i,i-1}(P, \overline{Fo}) = \bar{Z}_{\nu-1}^*(1, P, \overline{Fo}) - \bar{Z}_{\nu}^*(1, P, \overline{Fo}) + \frac{1}{R_{\nu-1, \nu}} \bar{Z}_{\nu-1}^*(1, P, \overline{Fo}), \quad (10)$$

$$\bar{V}_{\nu-1, \nu}^*(P, \overline{Fo}) = \mu_{\nu, \nu-1} \left\{ \bar{Z}_{\nu-1}^*(1, P, \overline{Fo}) - \mu_{\nu, \nu-1} \bar{Z}_{\nu}^*(1, P, \overline{Fo}) - \right. \\ \left. - w_{\nu-1, \nu}^*(1, P) - A_{\nu-1, \nu} \left[P \bar{Z}_{\nu-1}^*(1, P, \overline{Fo}) - \varphi_{\nu}(0) \right] \right\}. \quad (11)$$

При $r=1$: $g_1(Fo, \overline{Fo}) = -h_0 Bi_0 f_0(Fo) + h_0 Bi_0 M_0 \overline{V}_{0,1}(Fo, \overline{Fo}) + \alpha_0 V_{0,1}^*(Fo, \overline{Fo})$ - компонента впливу, сформована за рахунок граничних умов (6) і функцій (9),(10), обчислених на зовнішній межі системи ($\nu=1$). Аналіз (9), (14) показує, що $V_{0,1}(Fo, \overline{Fo})$, $V_{0,1}^*(Fo, \overline{Fo})$ не залежать від виду неідеального теплового контакту, а визначаються тільки функцією $Z_V^*(X, \overline{Fo}, Fo)$ і її похідною по x , обчислених при $x=0$.
 При $r=2$: компонента $g_2(Fo, \overline{Fo}) = h_1 Bi_1 f_1(Fo) - h_1 Bi_1 M_1 V_{m,m+1}(Fo, \overline{Fo}) - \alpha_1 V_{m,m+1}^*(Fo, \overline{Fo})$, сформована за рахунок граничних умов (6), (9), (10), обчислених на зовнішній межі системи ($\nu=m$). Аналіз (9), (10) показує, що $V_{m,m+1}(Fo, \overline{Fo})$, $V_{m,m+1}^*(Fo, \overline{Fo})$ не залежать від виду неідеального теплового контакту, а визначаються тільки функцією $Z_V^*(X_V, \overline{Fo}, Fo)$ і її похідною по x , обчислених при $x=1$.

$$\Omega_n \left[\mu_{n,r}^V(X, \overline{Fo}), \varphi_n \right] = \frac{\mu_{n,r}^V(X, \overline{Fo})}{\varphi_0} - \sum_{j=1}^n \Omega_{n-j} \left[\mu_{n-j,r}^V(X, \overline{Fo}), \varphi_{n-j} \right] \frac{\varphi_j}{\varphi_0}; \quad (12)$$

$$Q \left[\mu_{n,r}^V(X, \overline{Fo}), P_k \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_{n,r}^V(X, \overline{Fo}) P_k^n; \quad (13)$$

$$\Psi^1(\varphi_n P_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n P_k^n, \quad P_k = \gamma_k^2 \frac{a_0}{R_0^2}, \quad R_0 = \frac{a_V}{a_{V+1}} \cdot \frac{L_V}{L_{V+1}}, \quad (14)$$

де γ_k – корені трансцендентного рівняння $\Psi_m(\varphi_n, \gamma) = 0$; (15)

$$\begin{aligned} Z_V^*(X, \overline{Fo}, Fo) &= z_V^{*,nap}(X_V, Fo) + z_V^{*,zin}(X_V, Fo) + \\ &+ \beta_V^* \cdot Fo_V^e \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \beta_V^n \cdot \frac{n}{(n-2)!} \int_0^{Fo} (Fo - \vartheta)^{n-2} \frac{\partial^{2n}}{\partial X_V^{2n}} w_V(X_V, \vartheta) d\vartheta; \\ z_V^{*,nap}(X_V, Fo) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\beta_V^n \cdot \frac{Fo^n}{(n)!} \cdot \varphi_V^{2n}(X_V) \right) - \\ &- \beta_V^* \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \beta_V^n \cdot \frac{1}{(n)!} \int_0^{Fo} (Fo - \vartheta)^n \frac{\partial^{2n}}{\partial X_V^{2n}} w_V(X_V, \vartheta) d\vartheta; \\ z_V^{*,zin}(X_V, Fo) &= Fo_V^r \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\beta_V^n \cdot \frac{(n+1) Fo^{n-2}}{(n-2)!} \cdot \varphi_V^{2n}(X_V) \right) + \\ &+ \beta_V^* \cdot Fo_V^r \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \beta_V^n \cdot \frac{n}{(n-2)!} \int_0^{Fo} (Fo - \vartheta)^{n-2} \frac{\partial^{2n}}{\partial X_V^{2n}} w_V(X_V, \vartheta) d\vartheta. \end{aligned} \quad (16)$$

(16) – частковий розв’язок неоднорідного диференціального рівняння (8), записаного в полі зображень[8].

Функціональні комплекси $\mu_{n,r}^V(X, \overline{Fo})$, φ_n відповідають представленню мероморфних функцій розв’язку задачі в полі зображень:

$$\Theta_V(X, P) = \sum_{r=1}^{2m} \overline{g}_r(P) W_{r,V}(X, \overline{Fo}, P) + \overline{Z}_V^*(X, \overline{Fo}, P), \quad (17)$$

$$\text{де } W_{r,v}(X, \overline{Fo}, P) = \frac{Q(X, p)}{\Psi(p)} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \mu_{n,r}^v(X, \overline{Fo}) P^n}{\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n P^n}. \quad (18)$$

Для розрахунку температурного поля m – шарового тіла з умовами (1) – (7) необхідно:
 - використовуючи рекурентні співвідношення, обчислити функціональні комплекси $\mu_{n,r}^v(X, \overline{Fo})$, φ_n , P_k [9]:

$$\mu_{n,r}^v(X, Fo) = [\mu_{n,r}^v(X)]_{\text{параб}} + [\mu_{n,r}^v(X, \overline{Fo}_v)]_{\text{зінер}} + [\mu_{n,r}^v(X, \overline{Fo}_v)]_{\text{інт.-диф.}}, \quad (19)$$

$$\varphi_n = [\varphi_n]_{\text{параб}} + [\varphi_n(\overline{Fo}_v)]_{\text{зінер}} + [\varphi_n(\overline{Fo}_v)]_{\text{інт.-диф.}}, \quad (20)$$

$$\text{де } (\mu_{n,r}^v(X))_{\text{параб}} = 1 + \frac{X^2}{\beta_v 2!} + \frac{X^{2n}}{\beta_v^n (2n)!}, \quad (21)$$

$$(\mu_{n,r}^v(X, \overline{Fo}_v))_{\text{зінер}} = (n-1) \overline{Fo}_v \frac{X^{2n-2}}{\beta_v^{n-1} (2n-2)!}, \quad n = 2, 3, 4, \dots \quad (22)$$

$$(\mu_{n,r}^v(X, \overline{Fo}_v, Fo_v^e))_{\text{інт.-диф}} = (n-1) \overline{Fo}_v \frac{R_0^{2(n-1)}}{\beta_v^{n-1} (2n-1)!} + (n-2) Fo_v^e \frac{R_0^{2(n-1)}}{\beta_v^{n-1} (2n-2)!}, \quad (23)$$

$$(\varphi_n)_{\text{параб}} = 1 + \frac{R_0^2}{\beta_v 2!} + \frac{R_0^{2n}}{\beta_v^n (2n)!}, \quad (24)$$

Проведені дослідження асимптотичних властивостей розв'язку (16) показали, що для послідовностей $[\mu_{n,r}^v]_{\text{зінер}}$, $[\varphi_n]_{\text{зінер}}$, $[\mu_{n,r}^v]_{\text{інт.-диф.}}$, $[\varphi_n]_{\text{інт.-диф.}}$ досить обмежитися двома членами, які містять час релаксації теплового потоку і внутрішньої енергії, на відміну від послідовностей $[\mu_{n,r}^v]_{\text{параб}}$, $[\varphi_n]_{\text{параб}}$, кількість членів яких визначається порядком похідних від компонент дій в розв'язку(8).

Обчислення складених комплексів $\Omega_n[\mu_{n,r}^v(X, \overline{Fo})]$, $Q[\mu_{n,r}^v(X, \overline{Fo}), P_k]$, $\Psi(\varphi_n, P_k)$ здійснюється за рекурентними формулами (11)-(13). Корені параметричного трансцендентного рівняння (14) знаходиться асимптотичним методом або за наближеними формулами. Визначення компонент впливу і обчислення відповідних їм простих структур розв'язку (8) виконуються за співвідношеннями (9),(10).

При розв'язанні нелінійних задач теплопровідності, тобто з урахуванням залежностей теплофізичних характеристик матеріалів шарів від температури, застосовується метод послідовних інтервалів [6]. Розв'язок (8) у цьому випадку має вигляд:

$$\Theta_{v,j}(X, Fo) = \sum_{r=1}^{2m} \left\{ \Omega_{n,j} [\mu_{n,r}^v(X, \overline{Fo}), \varphi_n] g_{r,j}^{(n)}(Fo, \overline{Fo}) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{g}_{r,j}(p_k)}{\Psi'(\varphi_n, p_k)} Q_j [\mu_{n,r}^v(X, \overline{Fo}), p_k] \exp(-\gamma_k^2 Fo) \right\} + Z_{v,j}^*(X, \overline{Fo}, Fo). \quad (25)$$

Відмінність розв'язку (20) від розв'язку (8) полягає в необхідності обчислення на кожному тимчасовому інтервалі розбиття ΔFo_j ($0_j \leq Fo \leq \Delta Fo_j$) компонент дій $g_{r,j}(Fo, \overline{Fo})$, складених комплексів $\Omega_{n,j}$, Q_j і функцій $Z_{v,j}^*(X, \overline{Fo}, Fo)$.

Таким чином, загальні структури розв'язків (8), (20) дозволяють визначити температурні поля складених тіл при екстремальних теплових впливах з урахуванням залежності теплофізичних характеристик матеріалів від температури.

Розглянемо приклад нагрівання пластини з внутрішнім джерелом, що володіє властивостями релаксацій під час імпульсного режиму.

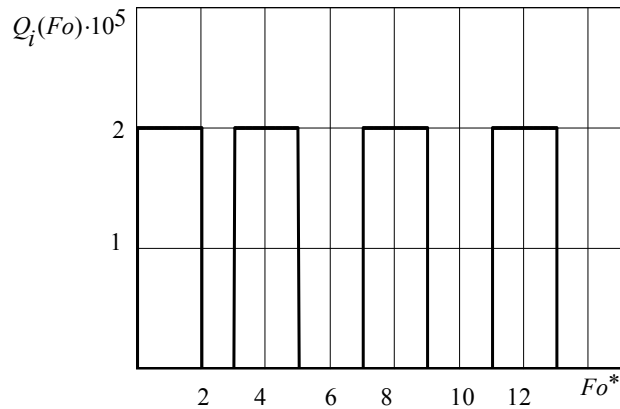


Рисунок 1 - Імпульсна дія граничних функцій $Q_i(Fo)$ на поверхні матеріалу $Fo^* = Fo \cdot 10^{-9}$

Для даного режиму нагрівання використовується рівняння нестационарної теплопровідності гіперболічного типу[1]:

$$\frac{\partial \Theta_i}{\partial Fo_i} + Fo_i^r \frac{\partial^2 \Theta_i}{\partial Fo_i^2} = \frac{\partial^2 \Theta_i}{\partial X^2} + W \left(1 + Fo_i^r \frac{\partial}{\partial Fo_i} \right), \quad (26)$$

де i - номер імпульсу.

Крайові умови для $i=1,2$:

початкові умови:

$$\begin{cases} \Theta_2|_{Fo=0} = \Theta_1(X, \Delta Fo_1), \\ \frac{\partial \Theta_2}{\partial Fo}|_{Fo=0} = \frac{\partial \Theta_1(X, \Delta Fo_1)}{\partial Fo} \end{cases} \quad (27)$$

граничні умови:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Theta_2}{\partial X}|_{X=0} = 0, \\ \frac{\partial \Theta_2}{\partial X}|_{X=1} = Q_1(\Delta Fo_1). \end{cases} \quad (28)$$

Для $i > 2$

початкові умови:

$$\begin{cases} \Theta_{i+1}|_{Fo=0} = \Theta_i(X, \Delta Fo_i), \\ \frac{\partial \Theta_{i+1}}{\partial Fo}|_{Fo=0} = \frac{\partial \Theta_i(X, \Delta Fo_i)}{\partial Fo} \end{cases} \quad (29)$$

граничні умови:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left. \frac{\partial \Theta_{i+1}}{\partial X} \right|_{X=0} = 0, \\ \left. \frac{\partial \Theta_{i+1}}{\partial X} \right|_{X=1} = Q_i(\Delta F o_i). \end{array} \right. \quad (30)$$

При розв'язанні задачі (27) -(30) операційним методом система в полі зображень набуває вигляду [10]:

$$(F o^r \cdot p^2 + p) \cdot \Theta_2 - \Theta_1(X, \Delta F o_i) - \frac{\partial \Theta_i(X, \Delta F o_i)}{\partial F o} = \frac{d^2 \Theta_2}{dX^2} + W^*(X, F o). \quad (31)$$

Розв'язок (31) представлений у вигляді суперпозиції передісторії обліку імпульсного режиму при нагріванні матеріалу:

$$\Theta_2(X, p) = A_2 ch \sqrt{\eta_2} X + B_2 sh \sqrt{\eta_2} X + R_{\Theta_1} + R_{\Theta_2}, \quad (32)$$

$$R_{\Theta_1}(X, p) = \sum_{n=0}^i \left[\frac{1}{(p + F o^r p^2)^{n+1}} \frac{d^{2n}}{dX^{2n}} R_{\Theta_n} \right]. \quad (33)$$

приріст температури, що виникає за рахунок дії попереднього імпульсу;

$$R_{\Theta_2}(X, p) = \sum_{n=0}^{i+1} \left[\frac{1}{(p + F o^r p^2)^{n+1}} \frac{d^{2n}}{dX^{2n}} R_{\Theta_n} \right]. \quad (34)$$

приріст температури, що виникає за рахунок дії подальших імпульсів.

Процеси, що виникають при імпульсному режимі нагрівання, розповсюджуються у вигляді набігаючих хвиль і вивчаються за допомогою автомодельної змінної. Тоді джерело тепла в матеріалі приймає вигляд:

$$Q_i = W_i + F o_i \cdot V \frac{dW_i}{dX}. \quad (35)$$

За умови, що функція W_i n - разів диференційовна, тоді для ν -того імпульсу буде справедливий вираз:

$$\Theta_2(X, p) = \frac{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\Theta_1^k(0 \Delta F o_i)}{k!} X^k \right\}}{ch \sqrt{\eta_2}} ch \sqrt{\eta_2} X + \delta_{2\Theta}(X, p) + \delta_{2W}(X, p), \quad (36)$$

де $\delta_i(X, \Delta e)$ - дельта-функція Дірака, Δe - приріст внутрішньої енергії за проміжок часу дії імпульсу.

Проаналізувавши тепловий стан системи при малих часах $F o^* \ll F o$, малих геометричних параметрах $l \ll L$ (L - товщина зразка, $F o^*$ - час порядку часу релаксації процесу нагрівання або охолодження), отримуємо при $X \rightarrow 1$:

$$\delta_{2\Theta}(X, p) \rightarrow \delta_{2\Theta}(p), \quad (37)$$

$$\delta_{2W}(X, p) \rightarrow \delta_{2W}(p). \quad (38)$$

Сума функцій (37) та (38) за всіма інтервалами Fo_i призводить до утворення функцій релаксацій теплового потоку і внутрішньої енергії:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k \Theta(p) \rightarrow \alpha(p), \quad (39)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k W(p) \rightarrow \beta(p). \quad (40)$$

Враховуючи (39) -(40), для достатньо великих k ($k \rightarrow \infty$) при імпульсному режимі гіперболічне рівняння (26) і розв'язок (36) при переході в полі оригіналів приймає вид інтегро-диференціального рівняння теплопровідності:

$$\begin{aligned} & Fo_{k+1}^r \frac{\partial^2 \Theta_{k+1}(X, Fo)}{\partial Fo^2} + \tau_{0,k+1} \frac{\partial \Theta_{k+1}(X, Fo)}{\partial Fo} + \\ & + Fo_{k+1}^r \int_0^{\infty} \beta'_{k+1}(s) \frac{\partial \Theta_{k+1}(X, Fo-s)}{\partial Fo} ds = \beta_{k+1}^* \frac{\partial^2 \Theta_{k+1}(X, Fo)}{\partial^2 X^2} + \\ & + \int_0^{\infty} \alpha'_{k+1}(s) \frac{\partial^2 \Theta_{k+1}(X, Fo-s)}{\partial X} ds + W_{k+1}(X, Fo), \end{aligned} \quad (41)$$

де $\int_0^{\infty} \alpha(s) \frac{\partial^2 \Theta_{k+1}}{\partial Fo^2} d(X, Fo-s) \approx \sum_{k=0}^{\infty} \left[\delta_{k\Theta} \left(\sum_{i=0}^k \Theta_i(X, \Delta Fo_i) \right) \right]$ - зовнішня складова обліку передісторій зміни температурного обурення при імпульсній дії на матеріал;

$\int_0^{\infty} \beta(s) \frac{\partial^2 \Theta_{k+1}}{\partial X^2} d(X, Fo-s) \approx \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{d\delta_{kW}}{dX} \left(\sum_{j=0}^k \Theta_j(X, \Delta Fo_j) \right) \right]$ - внутрішня складова

обліку передісторій температурного обурення при імпульсній дії на матеріал. Тим самим обчислення подальших імпульсів (їх величини) приводить до апріорного визначення кількості імпульсів: їх тривалості, потужності, після дії яких відбувається нагрівання зразка або прогрівання певної кількості шарів (для багатошарової конструкції).

Числовий приклад. Проведено порівняння температурних полів для складених тіл, одержаних структурним і числовими методами. Тестові приклади для гіперболічного рівняння теплопровідності виконані для необмеженої пластини.

Проведений числово-параметричний розрахунок матеріалу на основі одержаних результатів демонструє, що при постійному (рис.2а, рис.2б) та імпульсному (рис.3а, рис.3б) режимах нагрівання величина температури релаксації не відрізняється від температури, одержаної з інтегро-диференціального рівняння, яке враховує передісторію нагрівання зразка постійним та імпульсним зовнішніми джерелами. Тим самим доведена ієрархія побудови моделі визначення температурних полів нестационарної теплопровідності, які описуються параболічними, гіперболічними (у разі теплового удару, імпульсного нагрівання) рівняннями.

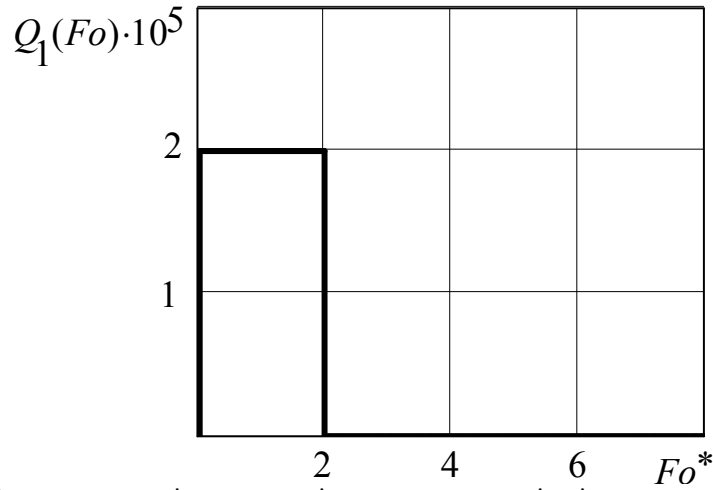


Рисунок 2а - Імпульсне нагрівання матеріалу точковим зовнішнім джерелом, час нагрівання $Fo^* = Fo \cdot 10^{-9}$

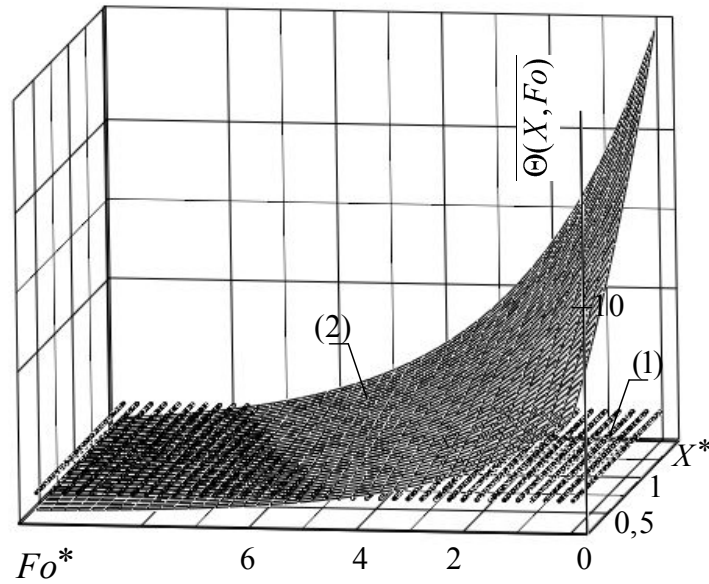


Рисунок 2б - Температурне поле параболічного(1) та гіперболічного(2) рівнянь при часах імпульсного нагрівання $Fo^* = Fo \cdot 10^{-9}$, $X^* = x_V / \Delta x_V$

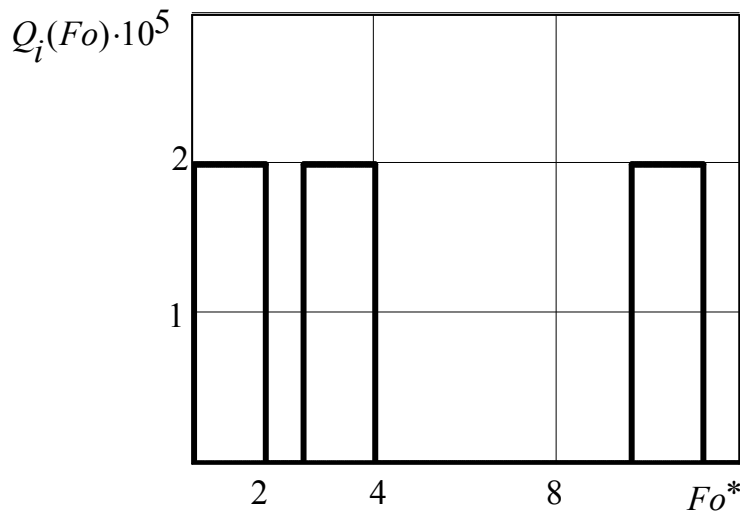


Рисунок 3а - Імпульсне нагрівання матеріалу точковим зовнішнім джерелом, час нагрівання $Fo^* = Fo_i \cdot 10^{-9}$

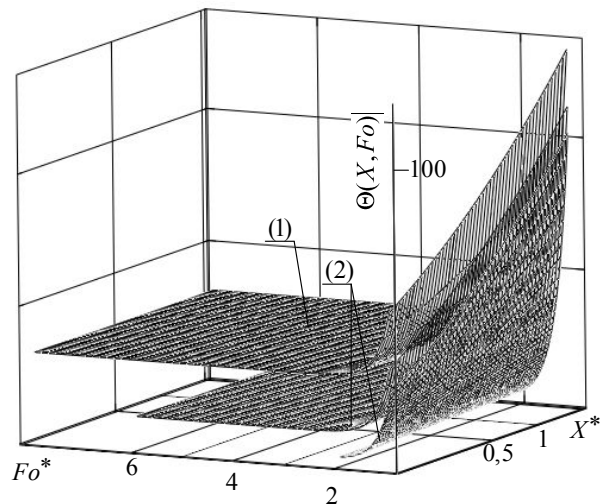


Рисунок 3б - Розповсюдження температурного поля в пластині при імпульсному режимі:
 (1)- інтегро-диференціального рівняння, (2) – гіперболічного рівняння

Для оксиду алюмінію Al_2O_3 коефіцієнт температуропровідності складає для випадку інтегро-диференціального рівняння таку ж величину, як і для гіперболічного рівняння τ_T час релаксації теплового потоку дорівнює 10^{-9} , $\tau_E = 10^{-11}$ с-час релаксації внутрішньої енергії[12].

Як бачимо з рисунка (4), для оксиду алюмінію, за прийнятих крайових умов, розв'язок рівняння теплопровідності інтегро-диференціального типу має особливості на початкових стадіях нагрівання, який виражається у виявленні двох відхилень температури, виражених явним стрибком на величину t_{pik} , фізична інтерпретація даного феномену полягає в обліку теплової пам'яті минулих станів нагрівання (або охолодження), які в математичній постановці виражені у вигляді функцій релаксації теплового потоку і внутрішньої енергії.

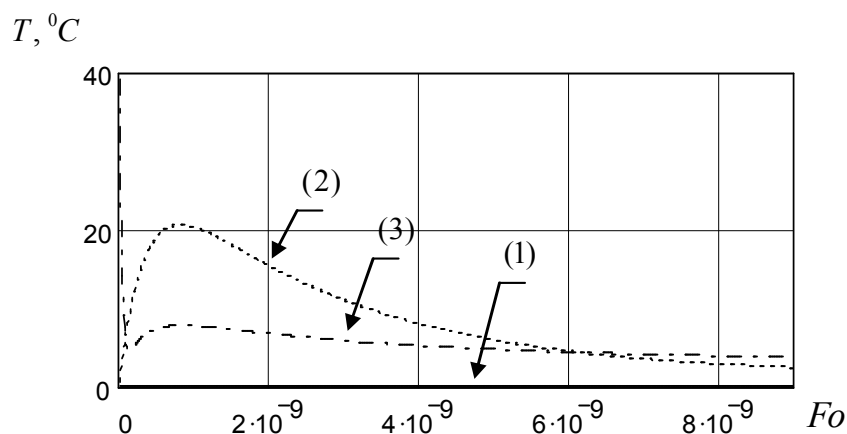


Рисунок 4 - Температурне поле поверхневого шару Al_2O_3 товщиною $L = 10^{-4}$ м, температура

зразка $T = 1500^\circ C$: (1) - параболічний розв'язок, (2) – гіперболічний розв'язок,
 (3)- інтегро-диференціальний розв'язок

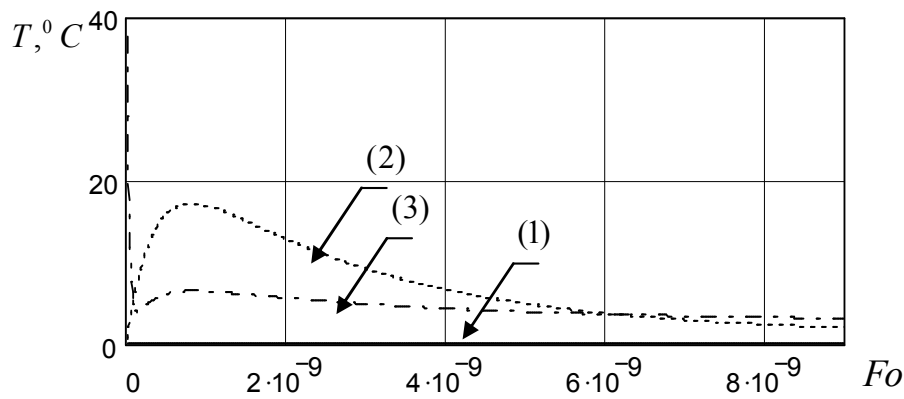


Рисунок 5 - Температурне поле внутрішнього шару –сталь-15 з товщиною $L = 10^{-4}$ м, температура зразка $T = 1500^{\circ}\text{C}$: (1)-параболічний розв'язок, (2) – гіперболічний розв'язок, (3)- інтегро-диференціальний розв'язок

Висновки. Отримані результати при імпульсному зміцненні і руйнуванні твердих матеріалів дозволяють визначати як глибину проникнення в поверхневому шарі матеріалу, так і величину зовнішньої дії на конструкцію. Внаслідок цього виникає локальна нерівноважність, яка приводить до теплових і механічних властивостей матеріалу, які, в свою чергу, помітно знижуються. Можливість визначити товщину прогрівання багат шарової конструкції зовнішнім джерелом, використовуючи структурний розв'язок інтегро-диференціального рівняння, приводить до раціональної ефективності використання теплозахисних конструкцій і матеріалів.

Література

1. Бабей Ю.И. Физические основы импульсного упрочнения стали и чугуна.- Киев: Наук. думка, 1988.- 240с.
2. Тихонов А.С., Герасимов А.П., Прохорова И.И. Применение эффекта памяти формы в современном машиностроении. - М.: Машиностроение, 1981.-80с.
3. Шашков А.Г., Бубнов В.А., Яновский С.Ю. Волновые явления теплопроводности. Системно-структурный подход. – М.: Едиториал УРСС, 2004.-296с.
4. Веселовский В.Б., Босенко Т.М. Математическое моделирование импульсного нагрева твёрдых тел // Металлургическая теплотехника. – Днепропетровск: Пороги, 2008. – С. 91-101.
5. Веселовский В.Б., Босенко Т.М. Структурный метод решения задач теплопроводности для составных тел при экстремальных воздействиях с учётом тепловой памяти// VI Минский международный форум по теплообмену.- Минск.-2008.- С. 256-258.
6. Веселовский В.Б., Сова Ю. А., Босенко Т. М. Задачи теплопроводности для составных сред с тепловой памятью // Металлургическая теплотехника. – Д.: Пороги, 2005. – С. 20 – 31.
7. Веселовский В.Б., Малая Ю.А., Босенко Т.М. Задачи теплопроводности для составных сред при экстремальных условиях // Вестник Херсонского национального университета – Херсон, 2006.- С.101-105.
8. Веселовский В.Б., Босенко Т.М., Горелова К.В. Структурный метод решения задач теплопроводности для составных тел при экстремальных воздействиях с учетом тепловой памяти// Металлургическая теплотехника. – Днепропетровск: Пороги, 2007. – С. 91-101.
9. Веселовский В.Б., Босенко Т.М., Горелова К.В. Решение задач теплопроводности для составных тел при экстремальных воздействиях с учетом тепловой памяти. // Вестник ХНТУ. – Херсон. – Вып.2 (28), 2007. – С. 87-92.
10. Босенко Т.М. Численный метод решения задачи теплопроводности для составных тел при экстремальных воздействиях с учетом тепловой памяти// Диференціальні рівняння та їх застосування. – Д.: Зб. наук. пр. ДНУ. – 2007. – С.111-117.
11. Босенко Т.М. Численное моделирование тепловых процессов в средах с тепловой памятью // Матеріали міжнародної науково-технічної конференції пам'яті академіка НАН України В.І. Моссаковського «Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій». – Дніпропетровськ. – 2007. – С.305-306.
12. David I.N. Wall, Peter Olsson. Invariant imbedding and hyperbolic heat waves // I. Math. Phys. – 38(3). – March. – 1997. – pp. 1723 – 1749.