УДК 539.3

В. А. Пасічник, кандидат фізико-математичних наук, експерт МАКНС, доцент кафедри математичного моделювання Дніпропетровського національного університету ім. Олеся Гончара

РОЗРАХУНОК КРИТИЧНИХ ЗУСИЛЬ ОСЬОВОГО СТИСКУ ЗАЩЕМЛЕНОЇ ПО КОНТУРУ ПРЯМОКУТНОЇ ПЛАСТИНИ МЕТОДОМ ЗБУРЕННЯ

На основі методу збурення виду крайових умов запропоновано метод розрахунку критичних зусиль осьового стиску защемленої по контуру прямокутної пластини.

На основе метода возмущения вида краевых условий предложен метод расчета критических усилий осевого сжатия защемленной по контуру прямоугольной пластины.

On the basis of the perturbation method of a type of boundary conditions the method of analysis of critical force of axle compressing of rectangular plate clamped by contour is proposed.

Ключові слова. Критичне зусилля, защемлена пластина, метод збурень.

Вступ. Дослідження стійкості пластин та оболонок являє собою важливе з практичного погляду завдання, якому присвячено значну кількість наукових досліджень Удосконалення розв'язків задач стійкості пластин з мішаними крайовими умовами – достатньо актуальна проблема, яка наполегливо розробляється в наукових дослідженнях [1–4]. Зараз найбільше застосування для визначення критичних зусиль мають числові та наближені методи обчислень. Але при цьому слід зазначити, що для випадків мішаних крайових умов закріплення контуру пластини їх застосування досить складне і не дозволяє отримати задовільну точність обчислень. Особливість цих задач полягає в тому, що характер хвилеутворення, змінність напруженого стану не задаються попередньо, а визначаються як параметрами конструкції, так і навантаженням. Тому розробка наближеного аналітичного методу розрахунку критичних зусиль осьового стиску прямокутної пластини з мішаними крайовими умовами закріплення контуру має важливе практичне значення.

У даній праці для розрахунку критичних зусиль осьового стиску прямокутної пластини з крайовими умовами защемлення контуру застосовується метод збурення виду крайових умов [5, 6].

Постановка завдання. Розглянемо прямокутну пластину, защемлену по контуру $(-a/2 \le x \le a/2; -b/2 \le y \le b/2)$, яка стискується в напрямку осі x силою $\overline{N}$.

Результати дослідження.

Відповідне диференціальне рівняння у безрозмірному вигляді запишеться так:

$$\nabla^4 W + N W_{\xi\xi} = 0\,. \tag{1}$$

де $N = \overline{N} b^2 / D$, D – циліндрична жорсткість пластини, $\xi = x/b$, $\eta = y/b$, $k = a/b$.

Крайові умови для рівняння (1) подамо у вигляді:

$$W = 0 \quad (1-\varepsilon) W_{\xi\xi} \pm \varepsilon k W_{\xi} = 0 \text{ за } \xi = \pm 0.5k\,, \tag{2}$$

$$W = 0 \quad (1-\varepsilon) W_{\eta\eta} \pm W_{\eta} = 0 \text{ за } \eta = \pm 0.5\,. \tag{3}$$

За ε = 0 реалізуються умови шарнірного обпирання пластини по контуру, а за ε = 1 – умови защемлення. Для проміжних значень ε реалізуються умови пружного закріплення контуру пластини з коефіцієнтом пружності $\mu = \varepsilon / (1-\varepsilon)$.

Для побудови розв'язку крайової задачі (1)–(3) відповідно до методу збурення подамо критичне зусилля N та прогин пластини W у вигляді рядів збурення за параметром ε :

$$N = \sum_{i=0}^{\infty} N_i \varepsilon^i; \qquad W = \sum_{i=0}^{\infty} W_i \varepsilon^i. \tag{4}$$

Після підстановки рядів (4) у диференціальне рівняння (1) і крайові умови (2), (3) та застосування процедури розщеплення за степенем параметра ε отримуємо таку рекурентну послідовність крайових задач:

$$\varepsilon^0: \quad \nabla^4 W_0 + N_0 W_{0\xi\xi} = 0\,, \tag{5}$$

$$W_0 = 0 \quad W_{0\xi\xi} = 0 \text{ за } \xi = \pm 0{,}5k\,, \tag{6}$$

$$W_0 = 0 \quad W_{0\eta\eta} = 0 \text{ за } \mu = \pm 0{,}5\,. \tag{7}$$

$$\text{в } j: \quad W_j + N_0 W_{j\xi\xi} = -\sum_{i=0}^{j-1} N_{j-i} W_{i\xi\xi}, \tag{8}$$

$$W_j = 0 \quad W_{j\xi\xi} = \mp k \sum_{i=0}^{j-1} W_{i\xi} \quad \text{за } \xi = \pm 0{,}5k, \tag{9}$$

$$W_j = 0 \quad W_{j\eta\eta} = \mp \sum_{i=0}^{j-1} W_{i\eta} \quad \text{за } \eta = \pm 0{,}5. \tag{10}$$

Крайова задача нульового наближення являє собою задачу стійкості прямокутної пластини, що стискується в напрямку осі x поздовжнім зусиллям N_0. Ураховуючи, що мінімальне значення критичного зусилля осьового стиску N_0 досягається під час втрати стійкос-
ті пластини з утворенням прямосиметричних форм, покладаємо:

$$W_0 = C\, Cos \frac{\pi m}{k} \xi \; Cos \pi n \eta \qquad m, n = 1, 3, 5, \dots . \tag{11}$$

З урахуванням співвідношення (11) із крайової задачі (5)–(7) отримаємо значення критичного зусилля в нульовому наближенні:

$$N_0 = \pi^2 \frac{k^2}{m^2} \left(n^2 + \frac{m^2}{k^2} \right)^2 . \tag{12}$$

Підставляючи значення W_0 і N_0 у співвідношення (8)–(10), отримуємо крайову задачу першого наближення у вигляді:

$$\nabla^4 W_1 + \pi^2 \frac{k^2}{m^2} \left(n^2 + \frac{m^2}{k^2} \right)^2 W_{1\xi\xi} = N_1 Cos \frac{\pi m}{k} \xi \; Cos \pi n \eta, \tag{13}$$

$$W_1 = 0 \quad W_{1\xi\xi} = \pm k \frac{\pi m}{k} (-1)^{\frac{m-1}{2}} Cos \pi n \eta \quad \text{за } \xi = \pm 0.5k, \tag{14}$$

$$W_1 = 0 \quad W_{1\eta\eta} = \pm \pi n (-1)^{\frac{n-1}{2}} Cos \frac{\pi m}{k} \xi \quad \text{за } \eta = \pm 0.5 . \tag{15}$$

Розв’язок крайової задачі (13)–(15) подамо в такому вигляді:

$$, \tag{16}$$

$$N_1 = N_{1\xi} + N_{1\eta}. \tag{17}$$

Підставляючи вирази (16), (17) у крайову задачу першого наближення, а також у крайову задачу (13)–(15) та відокремлюючи змінні, отримуємо дві крайові задачі для змінних ξ_1 і η_1:

$$\eta_1^{IV} - 2\pi^2 \frac{m^2}{k^2} \eta_1'' - \pi^4 n^2 \left(n^2 + 2\frac{m^2}{k^2} \right) \eta_1 = \frac{\pi^2 m^2}{k^2} N_{1\eta} \cos \pi n \eta, \tag{18}$$

$$\eta_1 = 0 \quad \eta_1'' = \pm \pi n (-1)^{\frac{n-1}{2}} \quad \text{за } \eta = \pm 0.5; \tag{19}$$

$$\xi_1^{IV} + \pi^2 \frac{k^2}{m^2} \left(\frac{m^4}{k^4} + n^4 \right) \xi_1'' + \pi^4 n^4 \xi_1 = \frac{\pi^2 m^2}{k^2} N_{1\xi} \cos \frac{\pi m}{k} \xi, \tag{20}$$

$$\xi_1 = 0 \quad \xi_1'' = \pm k \frac{\pi m}{k} \pi n (-1)^{\frac{m-1}{2}} \quad \text{за } \eta = \pm 0.5k. \tag{21}$$

Крайові задачі (18)–(19) і (20)–(21) мають неоднорідні рівняння і неоднорідні крайові умови, тобто тут має місце певна ситуація неоднорідності асимптотичного розкладення, пов’язана з тим, що неможливо побудувати розв’язок, який задовольняє неоднорідні крайові умови й неоднорідне диференціальне рівняння за довільних параметрів $N_{1\xi}$ і $N_{1\eta}$. Тому умова побудови розв’язку для крайової задачі (18)–(19) запишеться так:

$$-\eta_1''\eta_0\Big|_{-0.5}^{0.5} = \frac{\pi^3 m^3}{k^3} N_{1\eta}\int_{-0.5}^{0.5}\eta_0^3\,d\eta. \qquad (22)$$

Із співвідношення (22) отримуємо вираз для $N_{1\eta}$ і η_1:

$$N_{1\eta} = 4\frac{n^2}{m^2}k^2, \qquad (23)$$

$$\eta_1 = \frac{n}{\pi^2\alpha}\left[\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\frac{2Ch\,\pi\beta_1}{2}}Ch\,\pi\beta_1\eta - \eta Sin\,\pi n\eta\right], \qquad (24)$$

де $\alpha = n^2 + \frac{m^2}{k^2}; \quad \beta_1 = \sqrt{2\frac{m^2}{k^2} + n^2}.$

Для крайової задачі (20)–(21) умова побудови розв'язку запишеться аналогічно:

$$-\xi_1''\xi_0'\Big|_{-0.5k}^{0.5k} = \frac{\pi^3 m^3}{k^3} N_{1\xi}\int_{-0.5k}^{0.5k}\xi_0^3\,d\xi. \qquad (25)$$

Звідки

$$N_{1\xi} = 4. \qquad (26)$$

При визначенні ξ_1 слід урахувати два можливих випадки:

1) коли $n \neq \frac{m}{k}$, тоді

$$\xi_1 = -\frac{2}{\pi}\frac{\frac{m^3}{k^3}}{\left(n^4 - \frac{m^4}{k^4}\right)}\left[\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2Cos\frac{\pi}{2}n^2\frac{k^2}{m}}Cos\,\pi n^2\frac{k}{m}\xi - \xi Sin\frac{\pi m}{k}\xi\right], \qquad (27)$$

2) за $n = \frac{m}{k}$ маємо

$$\xi_1 = -\frac{1}{2}\xi^3 Cos\frac{\pi m}{k}\xi. \qquad (28)$$

У завершеному вигляді перша поправка до критичного навантаження N_1 з урахуванням співвідношень (17), (23), (26) запишеться так:

$$N_1 = 4\frac{k^2}{m^2}\left(\frac{m^2}{k^2} + n^2\right). \qquad (29)$$

А відповідно перша поправка до форми W_1 з урахуванням співвідношень (16), (24), (27), (28) матиме такий вигляд:

$$W = \frac{n}{\pi^2\alpha}\left[\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\frac{2ch\,\pi\beta_1}{2}}ch\,\pi\beta_1\eta - \eta\sin\pi n\eta\right]\cos\frac{\pi m}{k}\xi + \qquad (30)$$

$$+\left\{\begin{array}{l} -\dfrac{2}{\pi}\dfrac{\dfrac{m^3}{k^3}}{\left(n^4-\dfrac{m^4}{k^4}\right)}\left[\dfrac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2\cos\dfrac{\pi}{2}n^2\dfrac{k^2}{m}}\cos\pi n^2\dfrac{k}{m}\xi-\xi\sin\dfrac{\pi m}{k}\xi\right],\; n\neq\dfrac{m}{k} \\ -\dfrac{1}{2}\xi^2\cos\dfrac{\pi m}{k}\xi,\; n=\dfrac{m}{k} \end{array}\right\}\cos\pi n\eta.$$

Аналогічно будується розв’язок крайової задачі другого наближення. З неї отримаємо вираз для другої поправки до критичного навантаження:

$$N_2 = N_{2\xi} + N_{2\eta}, \tag{31}$$

де

$$N_{2\xi}=\frac{4}{k}\frac{\pi^2 m^2}{k^2}-\left\{1+\left(\frac{n^2-\dfrac{m^2}{k^2}}{2\pi^2\alpha^2}-\left\{\begin{array}{c}\dfrac{2}{\pi}\dfrac{\dfrac{m^2}{k^2}}{\left(n^4-\dfrac{m^4}{k^4}\right)}\left(\dfrac{\pi}{2}n^2\dfrac{k}{m}tg\dfrac{\pi}{2}n^2\dfrac{k^2}{m}+1\right) \\ \dfrac{k^2}{8}\end{array}\right\}\right)\right\}+$$

$$+\frac{8}{k\pi^2}\frac{k^4}{m^4}\alpha\left\{\begin{array}{c}-\dfrac{2}{\pi}\dfrac{\dfrac{m^3}{k^3}}{\left(n^4-\dfrac{m^4}{k^4}\right)}\left[\dfrac{\dfrac{m^3}{k^3}}{\left(n^4-\dfrac{m^4}{k^4}\right)}n^4\dfrac{k^3}{m^3}tg\dfrac{\pi}{2}\dfrac{n^2}{m}k^2+\dfrac{3}{4}m\right] \\ \dfrac{k}{8}\dfrac{\pi^2 m^2}{k^2}\left(\dfrac{k^2}{6}-1\right)\end{array}\right\};$$

$$N_{2\eta}=4n^2\frac{k^2}{m^2}\left[1-\frac{1}{\pi\alpha}\left(\frac{\pi\beta_1}{2}th\frac{\pi\beta_1}{2}-1\right)\frac{2}{\pi\alpha}-4n(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{k}{\pi m}\right]\times$$

$$\left\{\begin{array}{c}-\dfrac{2}{\pi}\dfrac{\dfrac{m^3}{k^3}}{\left(n^4-\dfrac{m^4}{k^4}\right)}\left[\dfrac{2}{k}\dfrac{1}{\pi}\dfrac{\dfrac{m^3}{k^3}}{n^4-\dfrac{m^4}{k^4}}tg\dfrac{\pi}{2}n^2\dfrac{k^2}{m}-\dfrac{k}{2\pi m}\right] \\ \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{k^2}{6}-1\right)\end{array}\right\};\quad \left\{\begin{array}{l} n\neq\dfrac{m}{k} \\ n=\dfrac{m}{k}\end{array}\right\}.$$

Таким чином, відрізок ряду збурення для визначення критичного зусилля осьового стиску запишеться так:

$$N = N_0 + N_1\varepsilon + N_2\varepsilon^2 + \ldots . \tag{32}$$

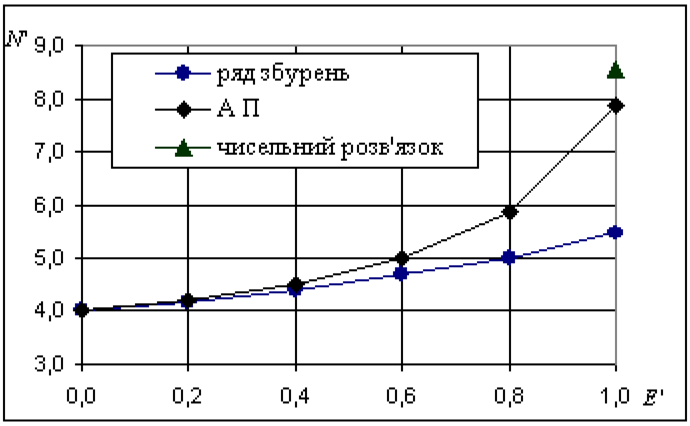
Тут N_0 визначається формулою (12); N_1 – формулою (17); N_2 – формулою (31).

На основі апроксимації Паде перших трьох членів ряду збурень (32) розв’язок задачі запишеться так:

$$N=\frac{N_0N_1+(N_1^2-N_0N_2)\varepsilon}{N_1-N_2\varepsilon}. \tag{33}$$

Аналіз результатів. Для оцінки точності запропонованого підходу порівняємо отримані результати з числовим розв’язком для квадратної пластини [2] – $N = 8{,}5540\,\pi^2$. Відрізок ряду (32) за ε = 1 дає – $N = 5{,}4512\pi^2$ (похибка – 56,9 %). АП (33) за $\varepsilon = I - N =$
$= 7{,}8662\pi^2$ (похибка – 8,04 %).

На рис. 1 наведено графік залежності критичного навантаження від параметра ε. Кривою 1 позначено результати, отримані на основі відрізку ряду збурень (32); кривою 2 – результати, побудовані із застосуванням АП (33); точка 3 – числовий розв’язок [2]. Аналіз наведених даних показує, що графіки 1 і 2 для значень параметра $\varepsilon < 0{,}5$ відрізняються один від іншого менше ніж на 5 %. Тому значення $\varepsilon = 0{,}5$ можна вважати межею можливого застосування методу збурень.



числовий розв’язок

Рис. 1. Порівняння результатів числових розрахунків
критичного навантаження для квадратної пластини

Висновки. Таким чином, метод збурення виду крайових умов у комплексі з апроксимацією Паде можна досить ефективно застосовувати для визначення критичних зусиль для пластин, коли крайові умови перешкоджають відокремленню просторових змінних. Застосування запропонованого підходу дозволяє отримати достатньо якісну інформацію про можливі типи поведінки пластинчастих конструкцій.

Література

1. Амбарцумян С. А. Теория аназотропных пластин: прочность, устойчивость и колебания [Текст] / С. А. Амбарцумян. – М. : Наука, 1987. – 360 с.

2. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем [Текст] / А. С. Вольмир. – М. : Наука, 1967. – 984 с.

3. Оробей В. Ф. Устойчивость пластин, сжатых сосредоточенными силами [Текст] / В. Ф. Оробей, А. Ф. Дащенко, Н. Г. Сурьянинов // Труды Одесского политехнического университета. – 2006. – Вып. 1(25). – С. 9–16.

4. Тимошенко С. П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек [Текст] / С. П. Тимо- шенко. – М. : Наука, 1971. – 808 с.

5. Гузь А. Н. Методы возмущений в пространственных задачах теории упругости [Текст] / А. Н. Гузь, Ю. Н. Немиш. – К. : Вища шк., 1982. – 352 с.

6. Образцов И. Ф. Асимптотические методы в строительной механике тонкостенных конструкций [Текст] / И. Ф. Образцов, Б. В. Нерубайло, И. В. Андрианов. – М. : Машиностроение, 1991. – 416 с.