**УДК 519.633:536.24**

**В. О. Яковенко,** кандидат
фізико-математичних наук, доцент кафедри
інформаційних систем і технологій
Академії митної служби України
**О. А. Щербина,** здобувач кафедри
інформаційних систем і технологій
Академії митної служби України

# МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТЕПЛООБМІНУ ПІД ДІЄЮ НВЧ ЕНЕРГІЇ В УМОВАХ ФАЗОВИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

*Побудовано математичну модель теплообміну при надвисокочастотному нагріванні для випадку сушіння пористого діелектричного матеріалу круглого поперечного перерізу за умови його сталих електрофізичних параметрів. Розв'язок задачі отримано в аналітичному вигляді, який відповідає інженерним розрахункам.*

*Построена математическая модель теплообмена при сверхвысокочастотном нагреве для случая сушки пористого диэлектрического материала круглого поперечного сечения при условии его постоянных электрофизических параметров. Решение задачи получено в аналитическом виде и отвечает инженерным расчетам.*

*The mathematical model of heat exchange in conditions of superhigh-frequency heating for a case of porous dielectric material's of a round cross-section drying under assumption of it's constant electrophysical properties was constructed. The solution of a problem was gained in an analytical view and corresponds to engineering calculations.*

**Ключові слова.** Математичне моделювання, НВЧ енергія, теплові поля.

**Вступ.** Одним з перспективних напрямків в інтенсифікації сушіння пористих діелектричних матеріалів, наприклад деревини, є використання енергії електромагнітного поля надвисоких частот (НВЧ). Під дією енергії НВЧ швидко підвищується температура всередині деревини і тиск водяної пари та з'являється надлишковий тиск пари всередині деревини відносно тиску середовища. Цей градієнт надлишкового тиску інтенсифікує процес сушіння, оскільки в цьому випадку перенесення пари відбувається шляхом як молекулярної дифузії, так і фільтрації через пори і капіляри деревини. Переваги в застосуванні НВЧ енергії для сушіння деревини такі: волога деревина має високу здатність до поглинання енергії НВЧ; можна зі швидкістю світла підвести і виділити в одиниці об'єму деревини потужність, недоступну жодному з традиційних способів підведення енергії; можна здійснити безконтактне вибіркове нагрівання й одержати необхідний розподіл температур у деревині; можна миттєво включити і вимкнути тепловий вплив, що забезпечує режим теплової безінерційності і високу точність регулювання нагрівання; практично 100 %-ний ККД перетворення НВЧ енергії в теплову; низькі втрати енергії в підвідних трактах і в робочих камерах; можна використовувати в сушінні деревини закладені природою механізми транспортування великих обсягів рідини уздовж волокон [1].

Сушіння деревини струмами НВЧ є складним процесом і перебуває на стику наук [2]. Тільки комплексне виконання поставленого завдання при об'єднанні таких наук, як електродинаміка і термодинаміка, дозволить отримати позитивні результати.

В умовах надвисокочастотного сушіння деревини основною рухомою силою вологи є тиск. Для руху вологи достатньо невеликого надмірного тиску. До 90 % надвисокочастотної енергії може бути перетворено в тепло у вологій частині деревини в умовах низького загального вмісту вологи [3]. Слід зазначити, що в умовах сушіння деревини швидкість ефективного перенесення вологи, яка міститься всередині матеріалу, до його поверхні визначає час сушіння. Якщо ця швидкість відповідає швидкості, з якою волога виводиться з поверхні, то руйнування структури матеріалу не відбувається, і навпаки.

**Постановка завдання.** Розглянемо нестаціонарний процес теплообміну під час сушіння деревини в умовах фазового перетворення "пара – рідина", що виникає під дією надвисокочастотного нагрівання. Цей процес визначатимемо системою нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних, яка складається з рівнянь Максвела і рівнянь теплопровідності такого виду:

$$rot\,\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial \tau}, \quad rot\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial \tau}, \quad div\,\vec{D} = 0, \quad div\,\vec{B} = 0,$$

$$\vec{D} = \varepsilon\ \ t\ \ \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu\ \ t\ \ \vec{H}, \quad \vec{j} = \sigma\ \ t\ \ \vec{E},$$

$$\frac{\partial\ \ c_i \rho_i t_i}{\partial \tau} + V_i \vec{\nabla} t_i = div\ \ \lambda_i \vec{\nabla} t_i\ \ + q\ \ t_i, \vec{E}\ \ ,$$

де $\vec{E}, \vec{H}$ – вектори напруженості електричного та магнітного полів відповідно, $\vec{D}, \vec{B}$ – вектори електричної та магнітної індукції відповідно, $\vec{j}$ – щільність струму провідності, $\varepsilon_i = \varepsilon' - i\varepsilon'' = \varepsilon' - i\sigma/\omega, \mu$ – абсолютні діелектрична і магнітна проникності матеріалу відповідно, $\sigma$ – провідність матеріалу, $\omega$ – кругова частота, $c_i$, $\rho_i$, $\lambda_i$ – коефіцієнт теплоємності, щільність і коефіцієнт теплопровідності матеріалу, що залежать від температури *i*-ї фази, $\vec{V_i}$ – вектор швидкості переміщення *i*-го матеріалу, $\vec{\nabla}$ – оператор Гамільтона, $q = 0{,}5\omega\varepsilon' tg\delta \left|\vec{E}\right|^2$ – питома поглинена потужність, $t_i$ – температура *i*-го матеріалу, $tg\delta = \varepsilon''/\varepsilon'$ – тангенс кута діелектричних втрат матеріалу.

Наведена система рівнянь доповнюється початковими та граничними умовами, а також умовою на межі поділу фаз "пара – рідина".

Слід зазначити, що розв'язок наведеної системи рівнянь пов'язаний із труднощами не тільки обчислювального характеру, але й принциповими. Це твердження ґрунтується на такому: умови на межі поділу фаз нелінійні, сформульована модель багатовимірна відносно просторових змінних, електрофізичні параметри матеріалів залежать від температури і є наближеними, алгоритми розв'язку таких задач потребують обґрунтування й використання комп'ютерних технологій.

Тому слід розглянути спрощену модель процесу, створену методами комп'ютерного моделювання. Для такої моделі необхідно довести її адекватність відомим моделям або порівняти отримані результати з експериментальними.

Розглянемо математичну модель надвисокочастотного нагрівання для практично важливого випадку сушіння лісоматеріалів круглого поперечного перерізу за умови сталих електрофізичних параметрів матеріалу. Для такого випадку теплообміну система диференціальних рівнянь та крайові умови в безрозмірному вигляді для сухої ($i$ = 1) та вологої ($i$ = 2) області має вигляд:

$$\frac{\partial T_i}{\partial Fo} = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial T_i}{\partial R}\right) + Q_i, \tag{1}$$

$$i = 1, Fo \rangle 0, 0 \langle R \langle \Delta\ \ Fo\ \ ; \quad i = 2, Fo \rangle 0, \Delta\ \ Fo\ \ \langle R \langle 1,$$

$$T_i(0,R)=0,\tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial T_1}{\partial R}\right|_{R=0}=T_1(Fo,\Delta(Fo))=0,\tag{3}$$

$$T_2(Fo,\Delta(Fo))=0,\quad T_2(Fo,1)=1,\tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial T_1}{\partial R}\right|_{R=\Delta(Fo)}+B\left.\frac{\partial T_2}{\partial R}\right|_{R=\Delta(Fo)}=K\frac{d\Delta}{dFo},\tag{5}$$

де $Fo=a_1\tau/r_0$, $B=\lambda_2(t_f-t_c)/\lambda_1(t_0-t_f)$, $K=a_1\rho L/\lambda_1(t_0-t_f)$, $T_1=(t_1-t_f)/(t_0-t_f)$, $T_2=(t_2-t_f)/(t_c-t_f)$, $R=r/r_0$, $Q_i=q_i/c_i\rho_i$, $q_i=2\alpha FS\exp(-2\alpha r)$, $F$ – коефіцієнт енергетичного проходження, $S=E^2/2W$ – вектор Пойнтинга у вакуумі, $E$ – амплітуда електричного поля, $\alpha=K_0\sqrt{\varepsilon' tg\delta}/\sqrt{2}\left(1+\sqrt{1+tg^2\delta}\right)$ – коефіцієнт згасання, $L$ – теплота фазового перетворення, $r_0$ – радіус деревини, $t_c$ – температура поверхні деревини, $t_f$ – температура фазового перетворення, $\Delta=\gamma(\tau)/r_0$, $\gamma(\tau)$ – межа поділу фаз.

**Результати дослідження.** Для розв'язання задачі (1)–(5) застосуємо метод, в основу якого закладено алгоритм скінченних інтегральних перетворень [4, 5].

Скінченне інтегральне перетворення та формула обертання ($i$ = 1) відповідно мають вигляд

$$\psi_n(Fo)=\int_0^{\Delta}RT_1J_0(\xi_nR/\Delta)\,dR,\tag{6}$$

$$T_1(Fo,R)=\frac{2}{\Delta^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi_n(Fo)}{J_1^2(\xi_n)}J_0(\xi_nR/\Delta),\tag{7}$$

де $\xi_n$ – додатні корені характеристичного рівняння $J_0(\xi)=0$.

Для визначення коефіцієнтів функціонального ряду (7) отримано таку задачу Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку

$$\frac{d\psi_n}{dFo}+\left(\frac{\xi_n}{\Delta}\right)^2\psi_n=\frac{\dot{\Delta}}{\Delta}\sum_{m=1}^{\infty}\beta_{nm}\psi_m+G,\tag{8}$$

$$\Psi_n(0)=0,\tag{9}$$

$$G=\int_0^{\Delta}RJ_0(\xi_nR/\Delta)Q_1\,dR,$$

$$\beta_{nm}=\frac{2\xi_n\xi_mJ_0(\xi_n)}{J_1(\xi_m)(\xi_m^2-\xi_n^2)},\quad n\neq m,$$

$$\beta_{nm}=1,\quad n=m.$$

Визначимо середню за перерізом температуру в сухій області

$$\bar{T}_1(Fo) = \frac{1}{\pi\Delta^2}\int_0^{\Delta} 2\pi T_1 R\,dR = \frac{4}{\Delta^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi_n}{\xi_n J_1(\xi_n)}. \tag{10}$$

Розподіл температури у вологій області матиме такий вигляд:

$$T_2(Fo, R) = \frac{R-\Delta}{1-\Delta} + \frac{\pi^2}{2\Delta^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(Fo)\,\nu_n^2 J_0^2(\nu_n)\,V_0(\nu_n R/\Delta)}{J_0^2(\nu_n) - J_0^2(\nu_n/\Delta)}, \tag{11}$$

$$\varphi_n(Fo) = \int_{\Delta}^{1}\left(T_2 - \frac{R-\Delta}{1-\Delta}\right) R V_0(\nu_n R/\Delta)\,dR,$$

де $\nu_n$ – додатні корені характеристичного рівняння,

$$V_0(V_n) = 0$$

де $V_0(\nu_n R/\Delta) = J_0(\nu_n R/\Delta)Y_0(\nu_n/\Delta) - J_0(\nu_n/\Delta)Y_0(\nu_n R/\Delta)$.

Задача Коші відносно коефіцієнтів $\varphi_n(Fo)$ ряду (11) має такий вигляд:

$$\frac{d\varphi_n}{dFo} + \left(\frac{\nu_n}{\Delta}\right)^2\varphi_n = \frac{\dot{\Delta}}{\Delta}\sum_{m=1}^{\infty}\beta_{nm}^2\varphi_m + \frac{\dot{\Delta}}{1-\Delta}\left\{\frac{\Delta^2}{\nu_n^2}\left[\frac{\nu_n}{\Delta}V_1(\nu_n/\Delta) - \nu_n V_1(\nu_n)\right] - J_{nm}^1\right\} + \frac{J_{nm}^2}{1-\Delta}, \tag{12}$$

$$\varphi_n(0) = \int_{\Delta(0)}^{1}\left(T_2(0, R) - \frac{R\Delta(0)}{1-\Delta(0)}\right) R V_0(\nu_n R/\Delta(0))\,dR, \tag{13}$$

$$\beta_{nm}^2 = \frac{\pi^2\nu_m^3 J_0(\nu_m)\,J_{nm}^3}{2\left[J_0^2(\nu_m) - J_0^2(\nu_m/\Delta)\right]}, \quad n \neq m,$$

$$\beta_{nm}^2 = \frac{\pi^2\nu_n^3 J_0(\nu_n)\,J_{nm}^3}{2\left[J_0^2(\nu_n) - J_0^2(\nu_n/\Delta)\right]}, \quad n = m..$$

Значення інтегралів $J_{nm}^1, J_{nm}^2, J_{nm}^3$ можуть бути отримані чисельно [6].

Середня за перерізом температура в сухій області може бути визначена як

$$\bar{t}_2(\tau) = \frac{2}{r_0^2 - \gamma^2(\tau)}\int_{\gamma(\tau)}^{r_0} r t_2(\tau, r)\,dr$$

і в безрозмірному вигляді

$$\bar{T}_2(Fo) = \frac{2}{3(1-\Delta^2)} - \frac{\Delta}{6(1-\Delta)} + \frac{\pi}{1-\Delta^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(Fo)\,J_0(\nu_n)}{J_0(\nu_n) + J_0(\nu_n/\Delta)}. \tag{14}$$

Закон руху межі фазового перетворення “рідина – пара” на основі співвідношення (5) може бути записано у вигляді:

$$\frac{d\Delta}{dFo}=\frac{2}{\Delta^3 K}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi_n\;\; Fo\;\; \xi_n}{J_1\;\; \xi_n}+\frac{\pi^2\beta}{2\Delta^3 K}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n\;\; Fo\;\; \nu_n^3 J_0\;\; \nu_n\;\; V_1\;\; \nu_n}{J_0^2\;\; \nu_n\;\; -J_0^2\;\; \nu_n/\Delta}-\frac{B}{1-\Delta K}, \qquad (15)$$

$$\Delta\;\; 0\;\; =\Delta_0 .$$

Слід зазначити, що функціональні ряди, які описують розподіл температур у сухій та вологій області, є рівномірно збіжними.

**Висновки.** Таким чином, рівняння (7), (11), а також задача Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку (8), (9), (12), (13), (15) визначають теплообмін у лісоматеріалі круглого поперечного перерізу під час сушіння його під дією енергії надвисоких частот.

Можна зробити висновок, що розв’язано задачу надвисокочастотного нагрівання діелектричного матеріалу циліндричної форми з подальшим його сушінням, визначено межу фазового перетворення в матеріалі. Розв’язок задачі отримано в аналітичному вигляді, який відповідає інженерним розрахункам. Комп’ютерне моделювання та обчислювальний експеримент дають можливість отримати розподіли температур у фазах, які залежать від часу, частоти джерела надвисокочастотної енергії та інших параметрів.

Література


1. Явчуновский В. Я. Микроволновая и комбинированная сушка: физические основы, технологии и оборудование / Явчуновский В. Я. – Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1999. – 217 с.
2. Яковенко В. О. Моделювання процесів переносу в областях з рухомими межами під дією енергії надвисоких частот : монографія / Яковенко В. О. – Дніпропетровськ : Академія митної служби України, 2009. – 196 с.
3. СВЧ-энергетика : пер. с англ. / под ред. Э. Окресса. – М. : Мир, 1971. – Т. 2. Применение энергии сверхвысоких частот в промышленности. – 272 с.
4. Яковенко В. О. Математичне моделювання процесу роздрібнення змерзлих насипних вантажів у залізничних вагонах з використанням мікрохвильової енергії / В. О. Яковенко // Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна. – 2008. – Вип. 20. – С. 208–212.
5. Поршнев С. Компьютерное моделирование физических процессов в пакете MATLAB / Поршнев С. – М. : Горячая линия – Телеком, 2003. – 592 с.
6. Яковенко В. О. Моделювання процесу теплообміну при сушінні лісоматеріалів енергією надвисоких частот / В. О. Яковенко // Проблемы машиностроения. – 2008. – Т. 11. – № 1. – С. 17–21.