

Т.А. НЕМЧЕНКО, асист., НТУ «ХПІ»

ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ ГОЛОМОРФНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯННЯ $Aw' = w$

Запропоновано елементарне доведення теореми І.В. Тихонова про єдиність голоморфного розв'язку рівняння $Aw' = w$. Наведений приклад, який показує, що умова І.В. Тихонова не є необхідною для єдиності голоморфного розв'язку рівняння, але є істотною. Вивчені деякі загальні властивості голоморфних розв'язків рівняння $Aw' = w$.

Ключові слова: голоморфний розв'язок, лінійний оператор, квазінілпотентний оператор, оборотний оператор, степеневий ряд, банахів простір, резольвента, спектральний радіус, експоненціальний тип.

Вступ. Нехай A – лінійний оператор у банаховому просторі. Задача Коші на півосі

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t), & t > 0, \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

відіграє важливу роль і докладно вивчалась у теорії диференціальних рівнянь, у теорії операторів і в математичній фізиці (див., наприклад, [1] і [2]).

У роботі *А. Г. Руткаса* була досліджена задача Коші на півосі для лінійного рівняння з операторним коефіцієнтом при похідній

$$A\dot{x}(t) + Bx(t) = f(t), \quad (1)$$

(див. [3]).

У 2004 році *І.В. Тихонов* знайшов просту достатню умову єдиності розв'язку рівняння (1) і деяких більш загальних рівнянь (див. [4, теорема 5]). Доведення в роботі *І. В. Тихонова* базуються на достатньо тонкій *теоремі Полія* про цілі функції мінімального типу.

Ми вивчимо наступний окремий випадок рівняння (1):

$$Aw' = w, \quad (2)$$

де A – обмежений оператор у банаховому просторі й це рівняння розглядається в комплексній області. Під розв'язком рівняння будемо розуміти вектор-функцію комплексної змінної $w = w(z)$, яка є голоморфною в околі нуля й задовольняє в цьому околі рівнянню (2).

Випадок оборотного оператора. Нехай E – банахів простір і $A: E \rightarrow E$ – обмежений лінійний оператор. Будемо розглядати диференціальне рівняння $Aw' = w$. При цьому під *розв'язком рівняння* ми розуміємо E -значну вектор-функцію комплексної змінної $w = w(z)$, яка задовольняє умовам, що вказані вище.

Нехай тепер оператор A – оборотний і $w_0 \in E$. Відзначимо, що оборотність оператора A еквівалентна тому, що $0 \notin \sigma(A)$. Розглянемо задачу Коші

$$\{Aw' = w, w(0) = w_0. \quad (3)$$

Аналітичні властивості розв'язку цієї задачі описує наступна теорема.

Теорема 1.1. Для будь-якого вектору $w_0 \in E$ задача Коші (3) має єдиний розв'язок, причому цей розв'язок є цілою функцією експоненціального типу $\rho_{w_0}(A^{-1})$, де $\rho_{w_0}(A^{-1})$ – локальний спектральний радіус оператора A^{-1} , що відповідає вектору w_0 .

Доведення. Розглянемо оператор $B = A^{-1}$. Тоді рівняння $Aw' = w$ можна записати у вигляді $w' = Bw$. Розв'язок цього рівняння будемо шукати у вигляді суми степеневого ряду

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n, \text{ де } w_n \in E.$$

Відзначимо, що початкова умова виконана, тому що $w(0) = w_0$. Тоді

$$w'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n w_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) w_{n+1} z^n \text{ і } Bw(z) = \sum_{n=0}^{\infty} B w_n z^n.$$

Підставляючи ці рівності в рівняння $w' = Bw$, одержуємо:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) w_{n+1} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} B w_n z^n.$$

Звідси $(n+1)w_{n+1} = Bw_n$, тобто $w_{n+1} = \frac{1}{n+1} Bw_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Отже, $w_n = \frac{1}{n!} B^n w_0$, $n = 0, 1, 2, \dots$ і розв'язок задачі Коші (3) має вигляд

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} B^n w_0 z^n, \text{ тобто } w(z) = e^{zB} w_0,$$

причому отриманий ряд є збіжним для будь-якого $z \in \mathbb{C}$ і $w(z)$ – ціла функція. Дійсно,

$$\left\| \frac{1}{n!} B^n w_0 z^n \right\| = \frac{1}{n!} |z|^n \cdot \|B^n w_0\| \leq \frac{1}{n!} |z|^n \cdot \|B^n\| \cdot \|w_0\| \leq \frac{1}{n!} |z|^n \cdot \|B\|^n \cdot \|w_0\|$$

і ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} |z|^n \cdot \|B\|^n \cdot \|w_0\|$ збігається. Тому ряд $w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} B^n w_0 z^n$ є абсолютно

збіжним для будь-якого $z \in \mathbb{C}$.

Тоді одержуємо:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n! \left\| \frac{B^n w_0}{n!} \right\|} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|B^n w_0\|} = \rho_{w_0}(B) \quad (\text{див. [5, с. 95]}),$$

тобто $w(z)$ – ціла функція експоненціального типу $\rho_{w_0}(A^{-1})$.

Цікаво відзначити наступний факт, який ми наводимо разом з його доведенням.

Теорема 1.2. Нехай $A: E \rightarrow E$ – довільний лінійний обмежений оператор. Тоді рівняння $Aw' = w$ не має ненульових цілих розв'язків нульового експоненціального типу.

Доведення. Покладемо $w_0 = w(0)$. Нехай $w_0 \neq 0$. Будемо шукати розв'язок $w(z)$ у вигляді степеневого ряду $w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n$, де $w_n \in E$. Тоді

$$w'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n w_n z^{n-1} \quad \text{і} \quad Aw'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A n w_n z^{n-1}.$$

Підставляючи ці вирази в рівняння $Aw' = w$, одержуємо:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A n w_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} w_{n-1} z^{n-1}.$$

Звідси

$$A w_1 = w_0, \quad 2A w_2 = w_1, \quad \dots, \quad nA w_n = w_{n-1}, \quad \text{отже,} \quad A w_1 = w_0, \\ 2A^2 w_2 = w_0, \quad \dots, \quad n! A^n w_n = w_0.$$

Розглянемо тотожність $n! \|A^n w_n\| = \|w_0\|$. Оскільки $\|A^n w_n\| \leq \|A^n\| \cdot \|w_n\|$, то одержуємо нерівність $\|w_0\| \leq n! \|A^n\| \cdot \|w_n\|$. Візьмемо корінь n -того ступеня від лівої і правої частини цієї нерівності:

$$\sqrt[n]{\|w_0\|} \leq \sqrt[n]{\|A^n\|} \cdot \sqrt[n]{n! \|w_n\|}. \quad (4)$$

У свою чергу $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|w_0\|} = 1$, а з іншого боку послідовність $\left\{ \sqrt[n]{\|A^n\|} \right\}$ обмежена (див. [6, теорема 10.13]). Виходячи з нерівності (4), одержуємо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n! \|w_n\|} \neq 0$. Отже, $w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n$, де $w_n \in E$, не є цілою функцією нульового експоненціального типу (див. [5, с. 95]).

Тепер розглянемо випадок, коли $w_0 = 0$. Нехай $w_0 = w_1 = \dots = w_{m-1} = 0$, $w_m \neq 0$, $m \geq 1$. Підставимо розклад $w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n = \sum_{n=m}^{\infty} w_n z^n$ в рівняння $Aw' = w$ та одержимо:

$$A \left(\sum_{n=m}^{\infty} w_n z^n \right)' = \sum_{n=m}^{\infty} w_n z^n, \text{ тобто } \sum_{n=m}^{\infty} (A n w_n - w_{n-1}) z^{n-1} = 0.$$

Звідси

$$m A w_m = w_{m-1} = 0, n A w_n = w_{n-1} = 0, \text{ тоді } \frac{1}{m!} n! A^{n-m} w_n = w_m.$$

Далі ми будемо вважати, що $n > m$. Розглянемо тотожність

$$\frac{1}{m!} n! \|A^{n-m} w_n\| = \|w_m\| \text{ або } \frac{1}{m!} (n-m)! \|A^{n-m} w_n\| = \frac{\|w_m\|}{n(n-1) \dots (n-m+1)}.$$

Оскільки $\frac{1}{m!} (n-m)! \|A^{n-m} w_n\| \leq (n-m)! \|A^{n-m}\| \cdot \|w_n\|$, то приходимо до нерівності:

$$\frac{\|w_m\|}{n(n-1) \dots (n-m+1)} \leq (n-m)! \|A^{n-m}\| \cdot \|w_n\|.$$

Візьмемо корінь $(n-m)$ -того ступеня від лівої і правої частини цієї нерівності:

$$n^{-m} \sqrt[n(n-1) \dots (n-m+1)]{\|w_m\|} \leq n^{-m} \sqrt[n(n-1) \dots (n-m+1)]{(n-m)! \|A^{n-m}\| \cdot \|w_n\|}. \quad (5)$$

З одного боку,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-m} \sqrt[n(n-1) \dots (n-m+1)]{\|w_m\|} = 1,$$

а з іншого послідовність $\left\{ n^{-m} \sqrt[n(n-1) \dots (n-m+1)]{(n-m)! \|A^{n-m}\|} \right\}$ – обмежена (див. [6, теорема 10.13]).

Враховуючи (5), одержуємо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-m} \sqrt[n(n-1) \dots (n-m+1)]{(n-m)! \|w_n\|} \neq 0.$$

Оскільки

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n = \sum_{n=m}^{\infty} w_n z^n = z^m \sum_{n=m}^{\infty} w_n z^{n-m},$$

то ряди

$$w(z) = \sum_{n=m}^{\infty} w_n z^n \text{ і } w_m(z) = \sum_{n=m}^{\infty} w_n z^{n-m} = \sum_{n=0}^{\infty} w_{n+m} z^n$$

мають однакові характеристики. Згідно із цим одержуємо, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-m} \sqrt[n(n-1) \dots (n-m+1)]{(n-m)! \|w_n\|} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \sqrt[n(n-1) \dots (n-m+1)]{\|w_{n+m}\|} \neq 0.$$

Отже, функція $w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n = \sum_{n=m}^{\infty} w_n z^n$ не є цілою функцією нульового

експоненціального типу (див. [5, с.95]).

З теорем 1.1 і 1.2 одержуємо наступний

Наслідок 1.3. Нехай B – обмежений оборотний оператор і $w_0 \in E$, $w_0 \neq 0$. Тоді $\rho_{w_0}(B) > 0$.

Випадок квазінільпотентного оператора. У цьому пункті ми вивчимо рівняння $Aw' = w$ у випадку, що є діаметрально протилежним розглянутому. А саме, коли оператор A є квазінільпотентним, тобто спектр $\sigma(A) = \{0\}$.

При цьому виходить результат, протилежний твердженню теореми 1.1 (див. зауваження 2.4 і теорему 2.5).

Теорема 2.1. Нехай $A: E \rightarrow E$ – обмежений квазінільпотентний оператор. Тоді рівняння $Aw' = w$ не має ненульових цілих розв'язків експоненціального типу.

Доведення. Покладемо $w_0 = w(0)$. Розглянемо випадок, коли $w_0 \neq 0$. Будемо шукати розв'язок $w(z)$ у вигляді степеневого ряду $w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n$, де $w_n \in E$. Підставимо ці вирази в рівняння $Aw' = w$, одержимо:

$$A \left(\sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n.$$

Виконавши формальне диференціювання й зібравши відповідні коефіцієнти при z^n , одержуємо:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (Anw_n - w_{n-1}) z^{n-1} = 0.$$

Звідси $Aw_1 = w_0$, $2Aw_2 = w_1$, ..., $nAw_n = w_{n-1}$, тому

$$Aw_1 = w_0, 2A^2w_2 = w_0, \dots, n!A^n w_n = w_0.$$

Розглянемо тотожність $n! \|A^n w_n\| = \|w_0\|$. Оскільки $\|A^n w_n\| \leq \|A^n\| \cdot \|w_n\|$, то одержуємо нерівність $\|w_0\| \leq n! \|A^n\| \cdot \|w_n\|$. Візьмемо корінь n -того ступеня від лівої і правої частини цієї нерівності:

$$\sqrt[n]{\|w_0\|} \leq \sqrt[n]{\|A^n\|} \cdot \sqrt[n]{n! \|w_n\|}. \quad (6)$$

У свою чергу $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|w_0\|} = 1$. Відзначимо, що $\sigma(A) = \{0\}$ тоді й тільки тоді, якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} = 0$, оскільки $\rho(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}$ за формулою Гельфанда (див. [6, теорема 10.13]).

Нехай тепер $w_0 = 0$ і $w_0 = w_1 = \dots = w_{m-1} = 0, w_m \neq 0, m \geq 1$. Підставимо ряд $w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n = \sum_{n=m}^{\infty} w_n z^n$ в рівняння $Aw' = w$, одержимо:

$$A \left(\sum_{n=m}^{\infty} w_n z^n \right)' = \sum_{n=m}^{\infty} w_n z^n, \text{ тобто } \sum_{n=m}^{\infty} (A n w_n - w_{n-1}) z^{n-1} = 0.$$

Звідси $m A w_m = w_{m-1} = 0, (m+1) A w_{m+1} = w_m, \dots, n A w_n = w_{n-1}$, тоді

$$\frac{1}{m!} n! A^{n-m} w_n = w_m. \text{ Надалі будемо вважати, що } n > m.$$

Розглянемо тотожність

$$\frac{1}{m!} n! \|A^{n-m} w_n\| = \|w_m\| \text{ або } \frac{1}{m!} (n-m)! \|A^{n-m} w_n\| = \frac{\|w_m\|}{n(n-1) \dots (n-m+1)}.$$

Оскільки $\frac{1}{m!} (n-m)! \|A^{n-m} w_n\| \leq (n-m)! \|A^{n-m}\| \cdot \|w_n\|$, то маємо нерівність:

$$\frac{\|w_m\|}{n(n-1) \dots (n-m+1)} \leq (n-m)! \|A^{n-m}\| \cdot \|w_n\|.$$

Візьмемо корінь $(n-m)$ -того ступеня від лівої і правої частини цієї нерівності:

$$n^{-m} \sqrt[n(n-1) \dots (n-m+1)]{\|w_m\|} \leq n^{-m} \sqrt{\|A^{n-m}\|} n^{-m} \sqrt{(n-m)! \|w_n\|}. \quad (7)$$

Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-m} \sqrt[n(n-1) \dots (n-m+1)]{\|w_m\|} = 1$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-m} \sqrt{\|A^{n-m}\|} = 0$, то згідно (7)

одержуємо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-m} \sqrt{(n-m)! \|w_n\|} = +\infty$.

Враховуємо рівність $w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n = \sum_{n=m}^{\infty} w_n z^n = z^m \sum_{n=m}^{\infty} w_n z^{n-m}$, тоді ряди

$$w(z) = \sum_{n=m}^{\infty} w_n z^n \text{ і } w_m(z) = \sum_{n=m}^{\infty} w_n z^{n-m} = \sum_{n=0}^{\infty} w_{n+m} z^n$$

мають однакові характеристики. Значить,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-m} \sqrt{(n-m)! \|w_n\|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n! \|w_{n+m}\|} = +\infty.$$

Отже, функція $w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n = \sum_{n=m}^{\infty} w_n z^n$ і в цьому випадку не є цілою функцією експоненціального типу (див. [5, с. 95]).

Наслідок 2.2. Нехай E – скінченновимірний простір і спектр

$\sigma(A) = \{0\}$. Тоді рівняння $Aw' = w$ не має ненульових голоморфних розв'язків.

Доведення. Оскільки простір E – скінченновимірний, то оператор A є нільпотентним, тобто $A^k = 0$ для деякого $k \in \mathbb{N}$.

Нехай $w(z) = \sum_{m=0}^{\infty} w_m z^m$, де $w_m \in E$ – розв'язок рівняння $Aw' = w$. Для $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ покладемо $n = m + k$. Тоді $A^{n-m} = A^k = 0$ і з нерівності (7) ми одержуємо, що $w_m = 0$.

Відзначимо, що в нескінченновимірному просторі рівняння $Aw' = w$, де $\sigma(A) = \{0\}$, може мати ненульовий розв'язок.

Приклад 2.3. Нехай H – гільбертів простір з ортонормованим базисом $\{e_k : k = 0, 1, 2, \dots\}$. Задамо оператор A на базисних векторах наступними рівностями:

$$Ae_0 = 0, \quad Ae_k = \frac{1}{k} e_{k-1}, \quad k \geq 1.$$

Неважко перевірити, що A продовжується до обмеженого оператора в просторі H ,

$$A^n e_k = \begin{cases} \frac{(k-n)!}{k!} e_{k-n}, & k \geq n, \\ 0, & 0 \leq k < n, \end{cases} \quad \text{і} \quad \|A^n\| = \frac{1}{n!}.$$

З формули Гельфанда

$$\rho(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0, \quad \text{тобто} \quad \sigma(A) = \{0\}.$$

Покажемо тепер, що функція $w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e_n z^n$, $|z| < 1$ є розв'язком рівняння $Aw' = w$ при початковій умові $w(0) = e_0$:

$$Aw'(z) = A \sum_{n=0}^{\infty} n e_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} n A e_n z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{1}{n} e_{n-1} z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} e_{n-1} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} e_n z^n = w(z).$$

Зауваження 2.4. На відміну від випадку оборотного оператора, розв'язок $w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e_n z^n$ із прикладу 2.3 не є єдиним.

Дійсно, покажемо, що для оператора із прикладу 2.3 задача Коші $\{Aw' = w, w(0) = 0\}$ має ненульовий розв'язок. Покладемо $w(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e_{n-1} z^n$.

Тоді

$$w(0) = 0 \text{ і } Aw'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} n A e_{n-1} z^{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} e_{n-2} z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e_{n-1} z^n = w(z),$$

що й треба було показати.

Відзначимо, що в прикладі 2.3 розв'язок $w(z)$ мав скінченний радіус збіжності, причому оператор A мав властивість $\sqrt[n]{n! \|A^n\|} = 1$.

Наступна загальна теорема пояснює явище, що виникає в цьому прикладі.

Теорема 2.5. *Нехай A – такий лінійний обмежений оператор, що послідовність $\left\{ \sqrt[n]{n! \|A^n\|} \right\}$ обмежена. Тоді рівняння $Aw' = w$ не має ненульових цілих розв'язків.*

Доведення. Оскільки послідовність $\left\{ \sqrt[n]{n! \|A^n\|} \right\}$ обмежена і

$\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e} (n \rightarrow \infty)$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n! \|A^n\|} = 0$, тобто $\sigma(A) = \{0\}$. Покладемо $w(0) = w_0$.

Розглянемо випадок, коли $w_0 \neq 0$. Будемо шукати розв'язок $w(z)$ у вигляді степеневого ряду $w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n$, де $w_n \in E$. Проводячи міркування, аналогічні наведеним у доведенні теореми 2.1, одержимо нерівність

$$\sqrt[n]{\|w_0\|} \leq \sqrt[n]{n! \|A^n\|} \cdot \sqrt[n]{\|w_n\|}. \quad (8)$$

З одного боку, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|w_0\|} = 1$, а з іншого послідовність $\left\{ \sqrt[n]{n! \|A^n\|} \right\}$ обмежена за умовою теореми. Тоді згідно з нерівністю (8) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|w_n\|} \neq 0$. Отже,

$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n$ не є цілою функцією.

У випадку, коли $w_0 = 0$, також проводимо міркування, аналогічні наведеним у доведенні теореми 2.1. Таким чином, одержуємо нерівність:

$$n^{-m} \sqrt[n]{\frac{\|w_m\|}{n(n-1) \cdots (n-m+1)}} \leq n^{-m} \sqrt[n]{(n-m)! \|A^{n-m}\|} \cdot n^{-m} \sqrt[n]{\|w_n\|}. \quad (9)$$

У свою чергу,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-m} \sqrt[n]{\frac{\|w_m\|}{n(n-1) \cdots (n-m+1)}} = 1 \text{ і } \left\{ n^{-m} \sqrt[n]{(n-m)! \|A^{n-m}\|} \right\}$$

обмежена за умовою теореми. Беручи до уваги (9), одержуємо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n-m]{\|w_n\|} \neq 0.$$

Оскільки

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n = \sum_{n=m}^{\infty} w_n z^n = z^m \sum_{n=m}^{\infty} w_n z^{n-m}, \text{ то ряди } w(z) = \sum_{n=m}^{\infty} w_n z^n \text{ і}$$

$$w_m(z) = \sum_{n=m}^{\infty} w_n z^{n-m} = \sum_{n=0}^{\infty} w_{n+m} z^n$$

мають однаковий радіус збіжності. Згідно із цим одержуємо, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n-m]{\|w_n\|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|w_{n+m}\|} \neq 0.$$

Отже, $w(z) = \sum_{n=m}^{\infty} w_n z^n$ не є цілою функцією.

Зауваження 2.6. Умова обмеженості послідовності $\left\{ \sqrt[n]{n! \|A^n\|} \right\}$ еквівалентна тому твердженню, що *резольвента Фредгольма* оператора A є цілою функцією експоненціального типу.

Випадок, коли $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n! \|A^n\|} = 0$. У попередньому пункті було показано, що в нескінченновимірному просторі рівняння $Aw' = w$, де A – квазінільпотентний оператор, може мати ненульовий розв'язок (див. приклад 2.3). Наступна теорема містить достатню умову того, що рівняння $Aw' = w$ має тільки нульовий голоморфний розв'язок.

Теорема 3.1. *Нехай A – такий обмежений лінійний оператор, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n! \|A^n\|} = 0$. Тоді рівняння $Aw' = w$ має тільки тривіальний голоморфний розв'язок.*

Доведення. Покладемо $w(0) = w_0$. Розглянемо спочатку випадок, коли $w_0 \neq 0$. Будемо шукати розв'язок $w(z)$ у вигляді степеневого ряду

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n, \text{ де } w_n \in E.$$

Проводячи міркування, аналогічні наведеним у доведенні теореми 2.1, одержимо нерівність

$$\sqrt[n]{\|w_0\|} \leq \sqrt[n]{n! \|A^n\|} \cdot \sqrt[n]{\|w_n\|}. \quad (10)$$

З одного боку, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|w_0\|} = 1$, а з іншого $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n! \|A^n\|} = 0$ за умовою теореми. Тоді згідно з нерівністю (10) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|w_n\|} = \infty$.

Отже, за формулою Коші-Адамара радіус збіжності ряду $w = w(z)$ дорівнює $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|w_n\|}} = 0$. Звідси ми одержуємо, що ряд $w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n$, де $w_n \in E$, є збіжним лише при $z = 0$. Таким чином, у припущенні $w_0 \neq 0$ ми одержуємо, що рівняння $Aw' = w$ не має розв'язків.

У випадку, коли $w_0 = 0$, також проводимо міркування, аналогічні наведеним у доведенні теореми 2.1. Таким чином, одержуємо нерівність:

$$\sqrt[n-m]{\frac{\|w_m\|}{n(n-1)\dots(n-m+1)}} \leq \sqrt[n-m]{(n-m)! \|A^{n-m}\|} \sqrt[n-m]{\|w_n\|}. \quad (11)$$

У свою чергу,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n-m]{\frac{\|w_m\|}{n(n-1)\dots(n-m+1)}} = 1,$$

а з іншого боку,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n-m]{(n-m)! \|A^{n-m}\|} = 0$$

за умовою теореми. Беручи до уваги (11), одержуємо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n-m]{\|w_n\|} = \infty.$$

Оскільки

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n = \sum_{n=m}^{\infty} w_n z^n = z^m \sum_{n=m}^{\infty} w_n z^{n-m},$$

то ряди

$$w(z) = \sum_{n=m}^{\infty} w_n z^n \text{ і } w_m(z) = \sum_{n=m}^{\infty} w_n z^{n-m} = \sum_{n=0}^{\infty} w_{n+m} z^n$$

мають однаковий радіус збіжності. Згідно з формулою Коші-Адамара радіус

збіжності ряду $w_m(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w_{n+m} z^n$ дорівнює

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|w_{n+m}\|}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n-m]{\|w_n\|}} = 0,$$

оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n-m]{\|w_n\|} = \infty$.

Звідси ми одержуємо, що ряд $w(z) = \sum_{n=m}^{\infty} w_n z^n$ є збіжним лише при $z = 0$. Отже, рівняння $Aw' = w$ при $w_0 = 0$ має лише нульовий розв'язок.

Зауваження 3.2. Умова $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n! \|A^n\|} = 0$ еквівалентна тому, що резольвента Фредгольма оператора A є цілою функцією нульового експоненціального типу.

Наведемо приклад оператора, що задовольняє умові теореми 3.1.

Приклад 3.3. Нехай $E = L^2(0, 1)$. Для функції $\xi \in L^2(0, 1)$ покладемо

$$(B\xi)(x) = \int_0^x \xi(y) dy,$$

де B – оператор інтегрування. Розглянемо оператор $A = B^2$. Покажемо, що оператор A обмежений і задовольняє умові теореми 3.1.

Лема 3.4. Має місце оцінка $\|B^n\| \leq \frac{1}{n!}, \forall n \geq 1$.

Доведення. Незавжди перевірити, що

$$(B^n \xi)(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-y)^{n-1} \xi(y) dy.$$

Зокрема, $(A\xi)(x) = \int_0^x (x-y) \xi(y) dy$.

Отже, маємо

$$\|B^n \xi\|^2 = \int_0^1 \left| (B^n \xi)(x) \right|^2 dx = \int_0^1 \frac{1}{(n-1)!^2} \left| \int_0^x (x-y)^{n-1} \xi(y) dy \right|^2 dx.$$

За нерівністю Коші-Буняковського:

$$\left| \int_0^x (x-y)^{n-1} \xi(y) dy \right| \leq \left(\frac{x^{2n-1}}{2n-1} \right)^{1/2} \|\xi\|.$$

Тоді

$$\|B^n \xi\|^2 \leq \int_0^1 \frac{1}{(n-1)!^2} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \|\xi\|^2 dx = \frac{\|\xi\|^2}{2n(2n-1)(n-1)!^2} \leq \frac{\|\xi\|^2}{n!^2}.$$

Виходить, $\|B^n \xi\| \leq \frac{\|\xi\|}{n!}$, тобто $\|B^n\| \leq \frac{1}{n!}$. Зокрема, $\|A\| \leq \frac{1}{2!}$.

Покажемо тепер, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n! \|A^n\|} = 0$.

Згідно з лемою 3.4 $\|A^n\| = \|B^{2n}\| \leq \frac{1}{(2n)!}$. Тому $\sqrt[n]{n! \|A^n\|} \leq \sqrt[n]{\frac{n!}{(2n)!}}$.

За формулою Стерлінга

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \quad (n \rightarrow \infty); \quad (2n)! \sim \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{4\pi n} = \left(\frac{2}{e}\right)^{2n} n^{2n} \sqrt{4\pi n} \quad (n \rightarrow \infty).$$

Отже,

$$\frac{n!}{(2n)!} \sim \frac{1}{\left(\frac{n}{e}\right)^n 2^{2n} \sqrt{2}} \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{і} \quad \sqrt[n]{\frac{n!}{(2n)!}} \sim \frac{1}{\frac{n}{e} 2^{2 \cdot 2/n} \sqrt{2}} \sim \frac{c}{n}, \quad c \neq 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Таким чином, $\sqrt[n]{\frac{n!}{(2n)!}} \sim \frac{c}{n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$. Тому $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n! \|A^n\|} = 0$, що й

треба було показати.

Цікаво відзначити, що умова $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n! \|A^n\|} = 0$ не є необхідною для того, щоб рівняння $Aw' = w$ мало тільки нульовий голоморфний розв'язок.

Приклад 3.5. Нехай $E = C[0, 1]$ і A – оператор інтегрування, тобто

$$(A\xi)(x) = \int_0^x \xi(y) dy. \quad \text{Тоді } A \text{ – обмежений лінійний оператор у просторі } E \text{ і}$$

$$(A^n \xi)(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-y)^{n-1} \xi(y) dy, \quad \xi \in C[0, 1].$$

Отже,

$$\left| (A^n \xi)(x) \right| \leq \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-y)^{n-1} |\xi(y)| dy \leq \frac{1}{(n-1)!} \max_{y \in [0,1]} |\xi(y)| \int_0^x (x-y)^{n-1} dy = \frac{\|\xi\| x^n}{n!}.$$

Звідси $\|A^n \xi\| \leq \frac{\|\xi\|}{n!}$, тобто $\|A^n\| \leq \frac{1}{n!}$.

З іншого боку, якщо $\xi_0(x) = 1$, то

$$\|\xi_0\| = 1, \quad (A^n \xi_0)(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-y)^{n-1} dy = \frac{x^n}{n!}$$

і $\|A^n \xi_0\| = \max_{x \in [0,1]} |(A^n \xi_0)(x)| = \frac{1}{n!}$. Тому $\|A^n\| \geq \frac{1}{n!}$.

Таким чином, ми одержуємо, що $\|A^n\| = \frac{1}{n!}$, тобто оператор A не задово-

вольняє умові $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n! \|A^n\|} = 0$.

Покажемо тепер, що рівняння $Aw' = w$ має тільки нульовий голоморфний розв'язок. Будемо шукати розв'язок $w(z)$ у вигляді $w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^{n-1}$. Тоді

$$Aw'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nAw_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)Aw_{n+1}z^n.$$

Тому $(n+1)Aw_{n+1} = w_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$,

тобто

$$w_0(x) = \int_0^x w_1(y) dy, \quad w_1(x) = 2 \int_0^x w_2(y) dy,$$

$$w_2(x) = 3 \int_0^x w_3(y) dy, \dots, \quad w_n(x) = (n+1) \int_0^x w_{n+1}(y) dy, \quad x \in [0, 1], \quad n \geq 0.$$

Звідси ми одержуємо, що

$$w_n(0) = 0 \quad \text{і} \quad w'_n(x) = (n+1)w_{n+1}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Отже, всі функції $w_n(x)$ нескінченно диференційовані і $w_n^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Покажемо, що всі ці функції тотожно дорівнюють нулю на $[0, 1]$. Для цього відзначимо, що ряд $\sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n$ є збіжним у деякому околі нуля. Тому існують числа $z_0 \neq 0$ і $M > 0$ такі, що $\|w_n z_0^n\| \leq M$, тобто

$$\max_{x \in [0, 1]} |w_n(x)| \leq \frac{M}{|z_0|^n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Відмітимо, що $w_0^{(n)}(x) = n!w_n(x)$, $x \in [0, 1]$.

Таким чином, ми одержуємо, що

$$\max_{x \in [0, 1]} |w_0^{(n)}(x)| \leq M \frac{n!}{|z_0|^n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

тобто для функції $w_0(x)$ виконана достатня умова дійсної аналітичності на $[0, 1]$.

Оскільки $w_0^{(n)}(0) = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$, то функція $w_0(x)$ дорівнює нулю в деякому правосторонньому околі точки 0. Розглянемо тепер множину

$$D = \{x \in [0, 1] : w_0(t) = 0, t \in [0, x]\}.$$

Використовуючи дійсну аналітичність функції $w_0(x)$, неважко переви-

рити, що $D = [0, 1]$, $w_0(x) = 0$, $x \in [0, 1]$. Звідси одержуємо, що $w_n(x) = 0$, $x \in [0, 1]$, $n = 0, 1, 2, \dots$, тобто $w(z) = 0$.

Висновки. Основним результатом цієї роботи є елементарне доведення теореми І.В. Тихонова про єдиність голоморфного розв'язку рівняння (2) (див. теорему 3.1). Крім того, наведений приклад, який показує, що умова І.В. Тихонова не є необхідною для єдиності голоморфного розв'язку цього рівняння, але є істотною (див. приклади 2.3, 3.3 і зауваження 2.4). У випадках оборотного та квазінільпотентного операторів вивчені деякі загальні властивості голоморфних розв'язків рівняння (2) (див. теореми 1.2, 2.1, 2.5).

Список літератури: 1. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. – М.: Мир, 1977, – Т. 1. 357 с. 2. Хилле Э, Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. – М.: Издательство иностранной литературы, 1962. – 829 с. 3. Руткас А.Г. Задача Коши для уравнения $Ax'(t) + Bx(t) = f(t)$. // Дифференциальные уравнения, 1975. – Т. 11, – № 11, – С. 1996 – 2010. 4. Тихонов И. В. Абстрактные дифференциальные нуль-уравнения. Функциональный анализ и его приложения, 2004, т.38, вып. 2, с. 65 – 70. 5. Далецкий Ю. А., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 534 с. 6. Рудин У. Функциональный анализ. – М.: Мир, – 1975. – 443 с.

Надійшла до редколегії 24.05.2013

УДК 17.27

Деякі властивості голоморфних розв'язків рівняння $Aw' = w$ / Т. А. Немченко // Вісник НТУ «ХП». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХП», 2013. – №37 (1010). – С. 105 – 118. Бібліогр.: 6 назв.

Предложено элементарное доказательство теоремы И.В. Тихонова о единственности голоморфного решения уравнения $Aw' = w$. Приведен пример, показывающий, что условие И.В. Тихонова не является необходимым для единственности голоморфного решения уравнения, но является существенным. Изучены некоторые общие свойства голоморфных решений уравнения $Aw' = w$.

Ключевые слова: голоморфное решение, линейный оператор, квазинильпотентный оператор, обратимый оператор, степенной ряд, банахово пространство, резольвента, спектральный радиус, экспоненциальный тип.

Proposed elementary proof of the theorem I.V. Tikhonov of the uniqueness of holomorphic solutions of the equation $Aw' = w$. In addition, an example to show that the condition I.V. Tikhonov is not necessary for the uniqueness of holomorphic solutions of the equation, but it is essential. In this work the study of some general properties of holomorphic solutions of the equation $Aw' = w$.

Key words: holomorphic solution, the linear operator, quasinilpotent operator, invertible operator, power series, Banach space, resolvent, spectral radius, the exponential type.