Наука, 1979. – 832 с., с ил. **13.** *Lifanov I.K*., *Poltavskii L.N*., *Vainikko G.M*. Hypersingular Integral Equation and Their Applications. – London: Teilor and Francis, 2003. **14.** *Носич А.И*., *Шестопалов В.П.* Свободные и вынужденные электромагнитные колебания кругового цилиндра с продольной щелью. Препринт ИРЭ АН УССР № 78, Харьков, 1977, – 52 с.

**Bibliography (transliterated): 1.** Richard, W. Ziolkowski, and J. Brian Grant. "Scattering from Cavity-Backed Apertures: The Generalized Dual Series Solution of the Concentrically Loaded E-Pol Slit Cylinder Problem." *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. Vol. AP-35. №5. 1987. 504–528. Print. **2.** Johnson, W. A., and R. W. Ziolkowski. "The scattering of an H-polarized plane wave from an axially slotted infinite cylinder: a dual series approach." *Radio Sci*. Vol. 19. No. 1. 1984. 275–291. Print. **3.** Nazarchuk, Z. T. *Chislennoe issledovanie difrakcii voln na cilindricheskih strukturah*. Kiev: Nauk. dumka, 1989. Print. **4.** Nosich, A. I. "O vlijanii rezonansnyh rezhimov na harakteristiki rassejanija nezamknutogo cilindra." *Radiotehnika i jelektron*. No. 8. 23. 1978. 1733–1737. Print. **5.** Goldstone, L. O., and A. A. Oliner. "Leaky wave antennas II: Circular waveguides." *IRE Trans. Antennas Propagat*. Vol. 9. 1961. 280–290. Print. **6.** Duhopel'nikov, S. V. "Matematicheskie modeli dlja rascheta izluchenija iz prodol'nyh shhelej v volnovode krugovogo sechenija." *Vestnik Kharkov. nac. un-ta. Ser.: Matematicheskoe modelirovanie. Informacionnye tehnologii. Avtomatizirovannye sistemy upravlenija.* No. 661. 2005. 104–113. Print. **7.** Gandel', Ju. V., S. V. Eremenko and T. S. Poljanskaja. *Matematicheskie voprosy metoda diskretnyh tokov. Obosnovanie chislennogo metoda diskretnyh osobennostej reshenija dvumernyh zadach difrakcii jelektromagnitnyh voln. Uchebnoe posobie*. Kharkov: HGU, 1992. Print. **8.** Gandel', Ju. V. "O parnyh rjadah Fur'e nekotoryh smeshannyh kraevyh zadach matematicheskoj fiziki." *Teorija funkcij, funkcion. anal. i ih prilozh*. Vol. 38. Kharkov: Vishha shkola, 1982. 15–18. Print. **9.** Gandel', Ju. V. "Parametricheskie predstavlenija singuljarnyh integral'nyh preobrazovanij i kraevye zadachi matematicheskoj fiziki." *Nelinejnye kraevye zadachi matematicheskoj fiziki i ih prilozhenija*. Kiev: NAN Ukrainy, 1995. 65–66. Print. **10.** Gandel', Ju. V. "Parametricheskie predstavlenija singuljarnyh integral'nyh preobrazovanij v aksial'no-simmetrichnyh kraevyh zadachah matematicheskoj fiziki." *Nelinejnye kraevye zadachi matematicheskoj fiziki i ih prilozhenija*. Kiev: NAN Ukrainy, in-t matematiki, 1996. 72–73. Print. **11.** Gandel' Ju. V. *Vvedenie v metody vychislenija singuljarnyh i gipersinguljarnyh integralov*. Kharkov: HNU im. V.N. Karazina, 2001. Print. **12.** *Spravochnik po special'nym funkcijam s formulami, grafikami i matematicheskimi tablicami*. Ed. M. Abramovic, and I. Stigan. Per. s angl. Ed. V. A. Ditkin, and L. N. Karmazina. Moscow: Nauka, 1979. Print. **13.** Lifanov, I. K., L. N. Poltavskii and G. M. Vainikko. *Hypersingular Integral Equation and Their Applications*. London: Teilor and Francis, 2003. Print. **14.** Nosich, A. I., and V. P. Shestopalov. "Svobodnye i vynuzhdennye jelektromagnitnye kolebanija krugovogo cilindra s prodol'noj shhel'ju." *Preprint IRJe AN USSR*. No. 78. Kharkov. 1977. Print.

*Поступила (received) 30.09.2015*

***Духопельников Сергій Володимирович*** – кандидат технічних наук, доцент кафедри вищої математики, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (098) 777-86-37; e-mail: sergey_dukh@ukr.net.

***Духопельников Сергей Владимирович*** – кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (098) 777-86-37; e-mail: sergey_dukh@ukr.net.

***Dukhopelnykov Sergey Vladimirovich*** – Candidate of Engineering Science, Associate Professor at the Department of Higher Mathematics, National Technical University «Kharkov Polytechnic Institute», Kharkov; tel.: (098) 777-86-37; e-mail: sergey_dukh@ukr.net.

УДК 517.98

***А. В. КОРОБСКАЯ***

## ОБ ОДНОМ ОПЕРАТОРЕ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Изучен оператор, который является линейной комбинацией модельного оператора интегрирования и его сопряженного. Показано, что данный оператор ограничен, и найден сопряженный к нему оператор. Для исследуемого несамосопряженного оператора построен локальный узел, вычислена характеристическая функция этого узла. Получена полугруппа, которую порождает изучаемый оператор, при этом возникает задача Коши для уравнения второго порядка. Отметим, что изучаемый в работе оператор не всегда является диссипативным, а характеристическая функция узла, соответствующего данному оператору, имеет ряд особенностей, которые изучены в работе. Предложены направления дальнейших исследований.

**Ключевые слова:** оператор интегрирования, узел, характеристическая функция, полугруппа оператора.

**Введение**. Одним из активно развивающихся направлений функционального анализа является *теория модельных представлений несамосопряженных операторов*, которая играет важную роль в решении задач теории спектральных представлений, а также при конструировании некоторых классов неоднородных случайных полей. Многие из аспектов данного направления функционального анализа получили свое развитие в научных исследованиях по теории характеристических функций и треугольных моделей [1, 2], функциональных моделей [3], аналитических функций [4], треугольных представлений линейных операторов [5], спектральных представлений несамосопряженных операторов [6, 7], линейных операторов в гильбертовом пространстве [8, 9], в задачах базисности и полноты [10], в вопросах управляемости и наблюдаемости [11]. В связи с этим возникает необходимость в изучении различных типов линейных операторов средствами спектрального анализа.

**Анализ предыдущих исследований**. Основу спектрального анализа несамосопряженных операторов составляет теория характеристических функций и треугольных моделей, представленная в работах [1, 2]. Для несамосопряженного оператора аналогом спектрального разложения принято считать треугольную или функциональную модели. Подход, предложенный в [1; 2], привлек внимание достаточно широкого круга исследователей [5, 6, 7]. Следует отметить, что оператор, который представляет собой линейную комбинацию модельного оператора интегрирования и его сопряженного, в данном контексте не изучался. При этом, изучаемый в работе оператор не всегда является диссипативным, а характеристическая функция узла, соответствующего данному оператору, имеет ряд особенностей.

**Постановка задачи**. Распространить подход, предложенный в [2, 6], на модельный оператор интегрирования вида

$$Bf=\left(a+b\right)\alpha\left(x\right)f\left(x\right)+ai\int_0^x f\left(t\right)dt+bi\int_x^l f\left(t\right)dt,$$

который действует в пространстве $L^2_{[0;l]}$, где $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$, $\alpha(x)$ – вещественная неубывающая, ограниченная функция.

Построить локальный *узел*, вычислить *характеристическую функцию* этого узла и соответствующую *полугруппу* этого оператора.

**Метод вычисления**. Рассмотрим в $L^2_{[0;l]}$ оператор вида

$$Bf=\left(a+b\right)\alpha\left(x\right)f\left(x\right)+ai\int_0^x f\left(t\right)dt+bi\int_x^l f\left(t\right)dt, \tag{1}$$

где $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$, $\alpha(x)$ – вещественная неубывающая ограниченная функция.

В работе [12] было доказано, что оператор $B$ ограничен в $L^2_{[0;l]}$ при $\alpha(x)=0$. Докажем ограниченность операторов $B$ и $B_1 f=(a+b)\alpha(x)f(x)$:

$$\left\|B_1 f\right\|=\left\|\left(a+b\right)\alpha\left(x\right)f\left(x\right)\right\|\le\left(a+b\right)\left\|\alpha\right\|\cdot\left\|f\right\|.$$

Действительно, для $B_1$ справедливо неравенство

$$\left\|B_1 f\right\|\le C\left\|f\right\|,$$

где $C=(a+b)\left\|\alpha\right\|$, то есть, $B_1$ ограничен в $L^2_{[0;l]}$. Тогда оператор (1) ограничен в $L^2_{[0;l]}$.

Найдем сопряженный оператор $B^*$ к $B$, то есть $\left\langle Bf,\,g\right\rangle=\left\langle f,\,B^*g\right\rangle$:

$$\left\langle Bf,g\right\rangle=\int_0^l\left(a+b\right)\alpha\left(x\right)f\left(x\right)\overline{g\left(x\right)}dx+\int_0^l ai\int_0^x f\left(t\right)dt\cdot\overline{g\left(x\right)}dx+\int_0^l bi\int_x^l f\left(t\right)dt\cdot\overline{g\left(x\right)}dx=$$

$$=\int_0^l f\left(x\right)\overline{\left(a+b\right)\alpha\left(x\right)g\left(x\right)}dx+\int_0^l f\left(t\right)dt\cdot\overline{\left(-ai\right)\int_t^l g\left(x\right)dx}+\int_0^l f\left(t\right)dt\cdot\overline{\left(-bi\right)\int_0^t g\left(x\right)dx}=$$

$$=\left\langle g,\left(a+b\right)\alpha\left(x\right)f\left(x\right)-ai\int_x^l f\left(t\right)dt-bi\int_0^x f\left(t\right)dt\right\rangle.$$

В результате получаем, что $B^*$ имеет вид:

$$B^*f=\left(a+b\right)\alpha\left(x\right)f\left(x\right)-ai\int_x^l f\left(t\right)dt-bi\int_0^x f\left(t\right)dt.$$

**Построение локального узла.** Включим оператор $B$, определяемый правилом (1), в узел:

$$\Delta=\left(B,H,\varphi,E,\sigma\right).$$

Для нахождения $\varphi$ вычислим $(B-B^*)/i=\varphi^*\sigma\varphi$:

$$\frac{B-B^*}{i}f=\frac{1}{i}\left(ai\int_0^x f\left(t\right)dt+bi\int_x^l f\left(t\right)dt+ai\int_x^l f\left(t\right)dt+bi\int_0^x f\left(t\right)dt\right)=\left(a+b\right)\int_0^l f\left(t\right)dt. \tag{2}$$

То есть

$$\varphi^*\sigma\varphi f=\left(a+b\right)\int_0^l f\left(t\right)dt, \tag{3}$$

где

$$\varphi f=\int_0^l f\left(t\right)dt,\ \varphi:\ L^2_{[0;l]}\to\mathbb{C}\ \text{и}\ E=\mathbb{C}, \tag{4}$$

а оператор $\sigma$ действует в $\mathbb{C}$ по формуле:

$$\sigma = a + b, \tag{5}$$

и $\varphi^* g = g_x$, где $g_x$ – постоянная на $[0;l]$, функция равная $g$.

Итак, на основе (2), (3), (4), (5) установлено, что *операторный узел* для $B$ имеет вид:

$$\Delta = \left(B, L^2_{[0;l]}, \varphi, \mathbb{C}, \sigma = a + b\right). \tag{6}$$

**Характеристическая функция узла.** Найдем характеристическую функцию узла (6), которая определена равенством

$$S_\Delta(\lambda) = I - i\varphi(B - \lambda I)^{-1}\varphi^*\sigma .$$

Рассмотрим функцию $f(x)$:

$$f(x) = (B - \lambda I)^{-1}\varphi^*\sigma g ,$$

где $g \in \mathbb{C}$. Тогда

$$\sigma g = (B - \lambda I) f(x). \tag{7}$$

Распишем левую и правую части равенства (7):

$$(a+b)g = \left[(a+b)\alpha(x) - \lambda\right] f(x) + ai\int_0^x f(t)\,dt + bi\int_x^l f(t)\,dt . \tag{8}$$

Обозначим $F(x) = \left[(a+b)\alpha(x) - \lambda\right] f(x)$ и выразим $f(x)$:

$$f(x) = \frac{F(x)}{(a+b)\alpha(x) - \lambda} . \tag{9}$$

Подставив (9) в (8), получим такое равенство:

$$(a+b)g = F(x) + ai\int_0^x \frac{F(t)}{(a+b)\alpha(t) - \lambda}dt + bi\int_x^l \frac{F(t)}{(a+b)\alpha(t) - \lambda}dt . \tag{10}$$

Подставим значения $x = l$ и $x = 0$ в (10) и придем к следующей системе:

$$\left\{ F(l) + ai\int_0^l \frac{F(t)}{(a+b)\alpha(t) - \lambda}dt = (a+b)g;\ F(0) + bi\int_0^l \frac{F(t)}{(a+b)\alpha(t) - \lambda}dt = (a+b)g. \right. \tag{11}$$

Отсюда

$$bF(l) - aF(0) = \left(b^2 - a^2\right)g . \tag{12}$$

Продифференцируем уравнение (10) по $x$:

$$F'(x) + i(a-b)\cdot\frac{F(x)}{(a+b)\alpha(x) - \lambda} = 0,\ F'(x) = i(b-a)\cdot\frac{F(x)}{(a+b)\alpha(x) - \lambda} . \tag{13}$$

Решение уравнения (13) будет иметь вид:

$$F(x) = C\exp\left\{ i(b-a)\cdot\int_0^x \frac{dt}{(a+b)\alpha(t) - \lambda} \right\}. \tag{14}$$

Подставим полученное выражение (14) в (12) и получим:

$$bF(l) - aF(0) = C\left( b\cdot\exp\left\{ i(b-a)\cdot\int_0^l \frac{dt}{(a+b)\alpha(t) - \lambda} \right\} - a \right) = \left(b^2 - a^2\right)g ,$$

$$C = \frac{\left(b^2 - a^2\right)g}{b\exp\left\{ i(b-a)\cdot\int_0^l \frac{dt}{(a+b)\alpha(t) - \lambda} \right\} - a} . \tag{15}$$

С учетом (4) получим характеристическую функцию вида

$$S_\Delta(\lambda)g = g - i\varphi f = g - i\int_0^l f(t)\,dt . \tag{16}$$

Для нахождения $\int_0^l f(t)\,dt$ возьмем систему (11) и, с учетом (9), запишем ее в виде:

$$F(l) - F(0) + (a-b)i\int_0^l f(t)\,dt = 0,\ i\int_0^l f(t)\,dt = \frac{F(l) - F(0)}{b-a} = \frac{C\left( \exp\left\{ i(b-a)\cdot\int_0^l \frac{dt}{(a+b)\alpha(t) - \lambda} \right\} - 1 \right)}{b-a} . \tag{17}$$

Подставим (17) в (16):

$$S_{\Delta}(\lambda)g = g - \frac{C\left(\exp\left\{i(b-a)\cdot\int\limits_0^l \frac{dt}{(a+b)\alpha(t)-\lambda}\right\}-1\right)}{b-a}. \quad (18)$$

Подставим в (18) значение $C$ по (15):

$$S_{\Delta}(\lambda)g = g - \frac{g\left(b^2-a^2\right)}{b\cdot\exp\left\{i(b-a)\cdot\int\limits_0^l \frac{dt}{(a+b)\alpha(t)-\lambda}\right\}-a}\cdot$$

$$\cdot\frac{\exp\left\{i(b-a)\cdot\int\limits_0^l \frac{dt}{(a+b)\alpha(t)-\lambda}\right\}-1}{b-a} = g\left(\frac{b-a\cdot\exp\left\{i(b-a)\cdot\int\limits_0^l \frac{dt}{(a+b)\alpha(t)-\lambda}\right\}}{b\cdot\exp\left\{i(b-a)\cdot\int\limits_0^l \frac{dt}{(a+b)\alpha(t)-\lambda}\right\}-a}\right).$$

***Теорема 1.*** *Характеристическая функция узла* $\Delta = \left(B, L^2_{[0;l]}, \varphi, \mathbb{C}, \sigma = a+b\right)$ *(6) определяется формулой:*

$$S_{\Delta}(\lambda) = \frac{b-a\cdot\exp\left\{i(b-a)\cdot\int\limits_0^l \frac{dt}{(a+b)\alpha(t)-\lambda}\right\}}{b\cdot\exp\left\{i(b-a)\cdot\int\limits_0^l \frac{dt}{(a+b)\alpha(t)-\lambda}\right\}-a}. \quad (19)$$

Обозначим

$$\gamma = i(b-a)\cdot\int\limits_0^l \frac{dt}{(a+b)\alpha(t)-\lambda}. \quad (20)$$

Тогда, с учетом (19), (20), окончательно получаем представление для $S_{\Delta}(\lambda)$:

$$S_{\Delta}(\lambda) = \frac{a}{b}\cdot\frac{\frac{b}{a}-e^{\gamma}}{e^{\gamma}-\frac{a}{b}}. \quad (21)$$

Обозначим $k = \frac{b}{a}$, тогда из (21) следует, что

$$S_{\Delta}(\lambda) = \frac{1}{k}\cdot\frac{k-e^{\gamma}}{e^{\gamma}-\frac{1}{k}}. \quad (22)$$

Пусть $e^{\psi} = k$ ($\psi = \ln k$, причем, не ограничивая общности можно считать, что $k > 0$), тогда

$$\frac{1}{k} = e^{-\psi}. \quad (23)$$

Подставим (23) в (22), тогда характеристическая функция будет иметь вид:

$$S_{\Delta}(\lambda) = e^{-\psi}\,\frac{e^{\psi}-e^{\gamma}}{e^{\gamma}-e^{-\psi}} = -\frac{sh\frac{\gamma-\psi}{2}}{sh\frac{\gamma+\psi}{2}}.$$

***Теорема 2.*** *Характеристическая функция узла* $\Delta = \left(B, L^2_{[0;l]}, \varphi, \mathbb{C}, \sigma = a+b\right)$ *(6) определяется формулой:*

$$S_{\Delta}(\lambda) = -\frac{sh\frac{\gamma-\psi}{2}}{sh\frac{\gamma+\psi}{2}}, \quad (24)$$

*где* $\gamma = i(b-a)\cdot\int\limits_0^l \frac{dt}{(a+b)\alpha(t)-\lambda}$, $e^{\psi} = k$ *и* $k = \frac{b}{a}$.

Изучим *особенности характеристической функции* (24) узла (6) оператора (1).

Характеристическая функция (24) имеет особенность в точке, которая удовлетворяет равенству:

$$sh\frac{\gamma+\psi}{2}=0\,. \tag{25}$$

Обозначим $\frac{\gamma+\psi}{2}=x+iy$, тогда (25) примет вид:

$$sh\left(x+iy\right)=0\,; \tag{26}$$

$$sh\,x\cdot ch\left(iy\right)+sh\left(iy\right)\cdot ch\,x=0\,;\ sh\,x\cdot\cos y+i\cdot\sin y\cdot ch\,x=0\,;\ \left\{sh\,x\cdot\cos y=0;\ \sin y\cdot ch\,x=0.\right. \tag{27}$$

Система (27) имеет решение только тогда, если $sh\,x=0$ и $\sin y=0$, то есть $x=0$, $y=\pi k$, где $k\in\mathbb{Z}$. Подставим найденное решение в (26), тогда $0,5(\gamma+\psi)=i\pi k$, где $k\in\mathbb{Z}$. При этом

$$\gamma=2i\pi k-\psi\,, \tag{28}$$

где $k\in\mathbb{Z}$.

С учетом замен $e^{\psi}=k$ и $k=b/a$ получает, что $e^{\psi}=b/a$.

Рассмотрим *следующие случаи для* $e^{\psi}=b/a$.

*Случай 1.* Если $\frac{b}{a}>0$, то $\psi=\ln\frac{b}{a}$. С учетом (20) и (28) получим:

$$i\left(b-a\right)\cdot\int_0^l\frac{dt}{\left(a+b\right)\alpha\left(t\right)-\lambda}=2i\pi k-\ln\frac{b}{a}\,,\ \frac{1}{i}\cdot\frac{b+a}{b-a}\cdot\left(2i\pi k-\ln\frac{b}{a}\right)=\int_0^l\frac{dt}{\alpha\left(t\right)-\frac{\lambda}{b+a}}\,. \tag{29}$$

Обозначим $\mu=\frac{\lambda}{b+a}$, а $\varphi=-\frac{b+a}{b-a}\cdot\left(2i\pi k-\ln\frac{b}{a}\right)$; тогда равенство (29) примет вид:

$$i\varphi=\int_0^l\frac{dt}{\alpha\left(t\right)-\mu}\,.$$

*Случай 2.* Если $\frac{b}{a}<0$, то $e^{\psi}=e^{i\pi}e^{|\psi|}=\frac{b}{a}$, и тогда $\psi=\ln\left|\frac{b}{a}\right|-i\pi$. С учетом (20) и (28) имеем:

$$i\left(b-a\right)\cdot\int_0^l\frac{dt}{\left(a+b\right)\alpha\left(t\right)-\lambda}=2i\pi k-\ln\left|\frac{b}{a}\right|+i\pi\,,\ \frac{1}{i}\cdot\frac{b+a}{b-a}\cdot\left(\left(2k+1\right)i\pi-\ln\left|\frac{b}{a}\right|\right)=\int_0^l\frac{dt}{\alpha\left(t\right)-\frac{\lambda}{b+a}}\,. \tag{30}$$

Обозначим $\mu=\frac{\lambda}{b+a}$, а $\varphi=-\frac{b+a}{b-a}\cdot\left(\left(2k+1\right)i\pi-\ln\left|\frac{b}{a}\right|\right)$, тогда равенство (30) получит вид:

$$i\varphi=\int_0^l\frac{dt}{\alpha\left(t\right)-\mu}\,.$$

***Теорема 3.*** *Особенности характеристической функции (24)* $S_{\Delta}\left(\lambda\right)$ *определяются решениями* $\mu=\lambda/(b+a)$ *уравнения*

$$i\varphi=\int_0^l\frac{dt}{\alpha\left(t\right)-\mu}\,,$$

*где* $\lambda=(a+b)\alpha(t)$ *при* $t\in\left[0;l\right]$, *а*

$$\varphi=\left[\begin{array}{l}-\frac{b+a}{b-a}\cdot\left(2i\pi k-\ln\frac{b}{a}\right),\ \text{при}\ \ \frac{b}{a}>0;\\ -\frac{b+a}{b-a}\cdot\left(\left(2k+1\right)i\pi-\ln\left|\frac{b}{a}\right|\right),\ \text{при}\ \ \frac{b}{a}<0.\end{array}\right.$$

**Полугруппа оператора.** Вычислим полугруппу $Z_t$, отвечающую оператору $B$ (1).

Рассмотрим полугруппу

$$Z_t f\left(x\right)=e^{iBt}f\left(x\right), \tag{31}$$

порождаемую оператором $B$ (1), и пусть

$$f\left(x,t\right)=Z_t f\left(x\right). \tag{32}$$

Продифференцируем (32) по $t$ и получим

$$f_t'(x,t) = iB\big(f(x,t)\big). \tag{33}$$

Если в $f(x,t)$ подставить $t=0$, то получим функцию, зависящую только от $x$:

$$f(x,0) = f(x). \tag{34}$$

Равенство (33) означает, что

$$f_t'(x,t) = i(a+b)\alpha(x) f(x,t) - a\int_0^x f(x,\xi)\,d\xi - b\int_x^l f(x,\xi)\,d\xi. \tag{35}$$

Продифференцируем (35) по $x$:

$$f_{xt}''(x,t) = i(a+b)\big[\alpha(x) f(x,t)\big]_x' + (b-a) f(x,t),\ \big[f_t'(x,t) - i(a+b)\alpha(x) f(x,t)\big]_x' = (b-a) f(x,t). \tag{36}$$

Заметим, что

$$\begin{cases} f_t'(l,t) = i(a+b)\alpha(l) f(l,t) - ai\int_0^l f(\xi,t)\,d\xi;\ f_t'(0,t) = i(a+b)\alpha(0) f(0,t) - bi\int_0^l f(\xi,t)\,d\xi. \end{cases}$$

Умножим первое равенство на $b$, а второе на $-a$, и сложим, получим:

$$bf_t'(l,t) - af_t'(0,t) = i(a+b)\cdot\big[bf(l,t)\alpha(l) - af(0,t)\alpha(0)\big]. \tag{37}$$

Объединяя условия (36), (37) и (34), получаем *краевую задачу Дарбу-Гурса*:

$$\begin{cases} f_{xt}''(x,t) = i(a+b)\big[\alpha(x) f(x,t)\big]_x' + (b-a) f(x,t);\ bf_t'(l,t) - af_t'(0,t) = i(a+b)\cdot\big[bf(l,t)\alpha(l) - af(0,t)\alpha(0)\big];\ f(x,0) = f(x). \end{cases}$$

Обозначим:

$$g(x,t) = f_t'(x,t) - i(a+b)\alpha(x) f(x,t). \tag{38}$$

Продифференцируем (38) по $x$ и получим:

$$g_x'(x,t) = f_{xt}''(x,t) - i(a+b)\big[\alpha(x) f(x,t)\big]_x' = (b-a) f(x,t). \tag{39}$$

Продифференцируем (39) по $t$:

$$g_{xt}''(x,t) = (b-a) f_t'(x,t). \tag{40}$$

Выразим $f_t'(x,t)$ из (38):

$$f_t'(x,t) = g(x,t) + i(a+b)\alpha(x) f(x,t). \tag{41}$$

Подставим (41) в (40) и получим:

$$g_{xt}''(x,t) = (b-a)\big[g(x,t) + i(a+b)\alpha(x) f(x,t)\big], \tag{42}$$

Выразим $f(x,t)$ из (39); имеем:

$$f(x,t) = \frac{g_t'(x,t)}{b-a}. \tag{43}$$

Подставим (43) в (42) и получим, что

$$g_{xt}''(x,t) - (b-a) g(x,t) - i(a+b)\alpha(x) g_t'(x,t) = 0. \tag{44}$$

Далее подставим (43) и (41) в (37):

$$bf_t'(l,t) - af_t'(0,t) = bg(l,t) - ag(0,t) + ib(a+b)\alpha(l)\frac{g_x'(l,t)}{b-a} -$$
$$- ia(a+b)\alpha(0)\frac{g_x'(0,t)}{b-a} = ib(a+b)\alpha(l)\frac{g_x'(l,t)}{b-a} - ia(a+b)\alpha(0)\frac{g_x'(0,t)}{b-a} +$$
$$+ bg(l,t) - ag(0,t) = i(a+b)\big[b\alpha(t) f(l,t) - a\alpha(0) f(0,t)\big].$$

В итоге получаем, что

$$bg(l,t) - ag(0,t) = 0. \tag{45}$$

Получили следующую *задачу Коши* с граничными условиями для функции $g(x,t)$:

$$\begin{cases} g_{xt}''(x,t) - (b-a) g(x,t) - i(a+b)\alpha(x) g_t'(x,t) = 0;\ bg(l,t) - ag(0,t) = 0. \end{cases}$$

Решим дифференциальное уравнение (44) методом разделения переменных. Представим $g(x,t)$ в виде:

$$g(x,t) = X(x)T(t). \tag{46}$$

Тогда уравнение (44) будет таким:

$$X'(x)T'(t) = \big[(b-a)X(x) + i(a+b)\alpha(x)X'(t)\big]T(t).$$

Обозначим

$$\frac{X'(t)}{(b-a)X(x)+i(a+b)\alpha(x)X'(x)}=\frac{T(t)}{T'(t)}=\lambda$$

и получим уравнения для функций $X(x)$ и $T(t)$:

$$X'(x)=\lambda\left[(b-a)X(x)+i(a+b)\alpha(x)X'(x)\right], \tag{47}$$

$$T(t)=\lambda T'(t). \tag{48}$$

С учетом (45) и (46) получаем дифференциальное уравнение для $X(x)$ с заданными граничными условиями:

$$\left\{X'(x)=\lambda\left[(b-a)X(x)+i(a+b)\alpha(x)X'(x)\right];\ bX(l)-aX(0)=0.\right.$$

Из (47) следует, что

$$X(x)=C\exp\left\{\int_0^x\frac{\lambda(b-a)}{1-\lambda i(a+b)\alpha(s)}ds\right\}. \tag{49}$$

Подставим в (49) граничное условие $bX(l)-aX(0)=0$ и получим равенство для $\lambda$:

$$b\exp\left\{\int_0^l\frac{\lambda(b-a)}{1-\lambda i(a+b)\alpha(s)}ds\right\}-a=0,\ \int_0^l\frac{\lambda(b-a)}{1-\lambda_n i(a+b)\alpha(s)}ds=\ln\frac{a}{b}+2\pi nib, \tag{50}$$

где $n\in\mathbb{Z}$.

Итак, мы получили равенство для $X_n(x)$:

$$X_n(x)=C_n\exp\left\{\int_0^x\frac{\lambda_n(b-a)}{1-\lambda_n i(a+b)\alpha(s)}ds\right\},$$

где $\lambda_n$ удовлетворяют уравнению (50).

Система функций $X_n(x)$ будет полна в $L^2_{[0;l]}$ в силу известной *теоремы Келдыша* [9]. Последнее следует из того, что

$$X_n(x)=C_n\exp\left\{\frac{\lambda_n x(b-a)}{1-\lambda_n i(a+b)\alpha(\xi)}\right\},$$

где $\xi\in(0;x)$, при этом дробь в показателе равномерно ограничена.

Обозначим

$$B=\frac{\ln\frac{a}{b}+2\pi ni}{b-a},\ \text{причём}\ B_R=\frac{\ln\frac{a}{b}}{b-a},\ B_I=\frac{2\pi n}{b-a},\ \text{тогда (50) будет иметь вид:}$$

$$\int_0^l\frac{\lambda_n}{1-\lambda_n i(a+b)\alpha(s)}ds=B_R+iB_I;\ \int_0^l\frac{\lambda_n}{\frac{1}{\lambda_n}-i(a+b)\alpha(s)}ds=B_R+iB_I. \tag{51}$$

Обозначим $i\mu=\frac{1}{\lambda_n}$, $\beta(s)=(a+b)\alpha(s)$, тогда (51) будет выглядеть так:

$$\int_0^l\frac{1}{\beta(s)-\mu}ds=B_I-iB_R. \tag{52}$$

Это отображение переводит $\mathbb{C}_+$ в $\mathbb{C}_+$, если $\beta(s)$ – вещественная функция. Поскольку $\alpha(s)$ – неубывающая функция, то и $\beta(s)$ тоже неубывает. Заменим $\beta(s)=\xi$, тогда $s=\beta^{-1}(\xi)=\sigma(\xi)$. При этом $\sigma(\xi)>0$.

Подставим в (52) полученные замены:

$$\int_a^b\frac{d\sigma(\xi)}{\xi-\mu}=B_I-iB_R,$$

где $a=\beta(0)$, $b=\beta(l)$.

Пусть $F_\mu=\int_a^b\frac{d\sigma(\xi)}{\xi-\mu}=B_I-iB_R=B'$. Для того, чтобы $F_\mu\in\mathbb{C}_+$, нужно, чтобы $B'\in\mathbb{C}_+$, то есть $\frac{\ln\frac{a}{b}}{b-a}<0$ при условии, что $a,b>0$.

Рассмотрим следующие два случая для $\mu$:

1) $\mu \in \mathbb{C}_-$, тогда $F_\mu \in \mathbb{C}_-$, $B' \in \mathbb{C}_+$, а $F_\mu = B'$, что приводит к противоречию;

2) $\mu \in \mathbb{C}_+$, тогда $F_\mu \in \mathbb{C}_+$, $B' \in \mathbb{C}_+$, $F_\mu = B'$, такой вариант выполняется.

Приходим к выводу, что $\mu \in \mathbb{C}_+$, а $F_\mu = \int\limits_a^b \frac{d\sigma(\xi)}{\xi - \mu} : \ \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}_+$.

Рассмотрим возможные *случаи для функции* $\beta(s) = (a+b)\alpha(s)$.

*Случай 1.* Если $\beta(s)$ – монотонная возрастающая функция, то есть $\xi = \beta(t)$ монотонно возрастает, то $F_\mu = \int\limits_a^b \frac{d\sigma(\xi)}{\xi - \mu} = B_I - iB_R$.

Обозначим $z = \int\limits_a^b \frac{d\sigma(\xi)}{\xi - \mu}$. Найдем мнимую и вещественную части $z$: $\mathrm{Re}\ \ z = \frac{z + \bar{z}}{2}$, $\mathrm{Im}\ \ z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$,

$$\mathrm{Re}\ \ z = \frac{1}{2}\left[\int\limits_a^b \frac{d\sigma(\xi)}{\xi - \mu} + \int\limits_a^b \frac{d\sigma(\xi)}{\xi - \bar{\mu}}\right] = \frac{1}{2}\int\limits_a^b \frac{2\xi d\sigma(\xi)}{|\xi - \mu|^2} + \frac{\mu + \bar{\mu}}{2}\int\limits_a^b \frac{d\sigma(\xi)}{|\xi - \mu|^2}, \tag{53}$$

$$\mathrm{Im}\ \ z = \frac{1}{2i}\left[\int\limits_a^b \frac{d\sigma(\xi)}{\xi - \mu} + \int\limits_a^b \frac{d\sigma(\xi)}{\xi - \bar{\mu}}\right] = \frac{\mu - \bar{\mu}}{2i}\int\limits_a^b \frac{d\sigma(\xi)}{|\xi - \mu|^2}. \tag{54}$$

Из (54) следует, что:

$$\int\limits_a^b \frac{d\sigma(\xi)}{|\xi - \mu|^2} = \frac{2i\,\mathrm{Im}\,z}{\mu - \bar{\mu}}. \tag{55}$$

Подставим (55) в (53):

$$\mathrm{Re}\ \ z = \int\limits_a^b \frac{\xi d\sigma(\xi)}{|\xi - \mu|^2} + i\frac{\mu + \bar{\mu}}{\mu - \bar{\mu}}\mathrm{Im}\,z. \tag{56}$$

А поскольку, с другой стороны, $\mathrm{Re}\,z = B_I$, $\mathrm{Im}\,z = -B_R$, то из (56) получаем характеристическое уравнение для спектра:

$$B_I = \int\limits_a^b \frac{\xi d\sigma(\xi)}{|\xi - \mu|^2} + i\frac{\mu + \bar{\mu}}{\mu - \bar{\mu}}B_R,$$

где $B_R = \frac{\ln\frac{a}{b}}{b-a}$, $B_I = \frac{2\pi n}{b-a}$, $\mu = \frac{1}{i\lambda}$.

*Случай 2.* Если $\beta(s)$ – кусочно-монотонная возрастающая функция, то

$$F_\mu = \int\limits_{\cup I_k} \frac{d\sigma(\xi)}{\xi - \mu},$$

где $I_k$ – разбиение $[a; b]$, $k = \overline{1, n}$, и тогда

$$F_\mu = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma(\xi)}{t_k - \mu},$$

где $t_k \in I_k$.

Найдем теперь $T_n(t)$ из уравнения (48): $T_n(t) = C_n e^{\frac{1}{\lambda_n}t}$.

Получим следующий ряд:

$$g(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n T_n = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{\frac{t}{\lambda_n}} X_n, \ \ X_n(x) = C_n \exp\left\{\int\limits_0^x \frac{\lambda_n(b-a)}{1 - \lambda_n i(a+b)\alpha(s)}ds\right\}, \tag{57}$$

где $\lambda_n$ удовлетворяют уравнению (51).

С учетом (46) получаем граничное условие:

$$g(x,0) = g(x). \tag{58}$$

Из равенства (57) и условия (58) следует, что:

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{\int_0^x \frac{\lambda_n(b-a)}{1-\lambda_n i(a+b)\alpha(s)}ds} T_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{\int_0^x \frac{\lambda_n(b-a)}{1-\lambda_n i(a+b)\alpha(s)}ds} = g(x), \ \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp\left\{\int_0^x \frac{\lambda_n(b-a)}{1-\lambda_n i(a+b)\alpha(s)}ds\right\} = g(x). \quad (59)$$

Теперь можем выписать разложение функции $g(x,t)$ с учетом равенства (57):

$$g(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n T_n = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp\left\{\frac{t}{\lambda_n} + \int_0^x \frac{\lambda_n(b-a)}{1-\lambda_n i(a+b)\alpha(s)}ds\right\},$$

где $\lambda_n$ из (50), $C_n$ из (59).

С учетом (43) имеем:

$$f(x,t) = \frac{g_t'(x,t)}{b-a} = \frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{\infty} C_k \frac{1}{\lambda_k}\exp\left\{\frac{t}{\lambda_k} + \int_0^x \frac{\lambda_k(b-a)}{1-\lambda_k i(a+b)\alpha(s)}ds\right\}.$$

***Теорема 4.*** *Полугруппа* $Z_t f(x) = e^{iBt} f(x)$ *(31), где* $B$ *имеет вид (1), задается выражением:*

$$Z_t f(x) = \frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{\infty} C_k \frac{1}{\lambda_k}\exp\left\{\frac{t}{\lambda_k} + \int_0^x \frac{\lambda_k(b-a)}{1-\lambda_k i(a+b)\alpha(s)}ds\right\},$$

*где* $C_k$ *определяются из (59) по функции* $g(x)$, *а* $\lambda_k$ *удовлетворяют уравнению (50).*

**Выводы.** Таким образом, в данной работе изучен оператор вида

$$Bf = (a+b)\alpha(x) f(x) + ai\int_0^x f(t)\,dt + bi\int_x^l f(t)\,dt,$$

который действует в пространстве

$L^2_{[0;l]}$, ($a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $\alpha(x)$ – вещественная неубывающая, ограниченная функция)

и является линейной комбинацией модельного оператора интегрирования и его сопряженного. Осуществлено включение данного оператора в узел, вычислена характеристическая функция узла и исследованы ее особенности. Получена соответствующая полугруппа, которую порождает изучаемый оператор.

Результаты статьи могут служить основой для получения новых модельных представлений операторов, а также для построения спектральных разложений некоторых классов нестационарных случайных функций и получения модельных представлений для корреляционных функций нестационарных случайных процессов, которые можно использовать для обработки статистических данных.

**Список литературы:** **1.** *Лившиц М.С.* Операторы колебания волны. Открытые системы. – М.: Наука, 1966. – 298 с. **2.** *Лившиц М.С.*, *Янцевич А.А.* Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах. – Х.: Изд-во Харьк. ун-та, 1971. – 160 с. **3.** *Надь Б.С.*, *Фояш Ч.* Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Мир, 1970. – 431 с. **4.** *Гарнет Дж.* Ограниченные аналитические функции. – М.: Мир, 1984. – 496 с. **5.** *Бродский М.С.* Треугольные и жордановы представления линейных операторов. – М.: Наука, 1969. – 287 с. **6.** *Золотарев В. А.* Аналитические методы спектральных представлений несамосопряженных и неунитарных операторов. – Х.: ХНУ, 2003. – 342 с. **7.** *Бродский М.С.*, *Лившиц М.С.* Спектральный анализ несамосопряженных операторов и промежуточные системы // УМН, 1958. – XII, 1/79. – С. 3 – 86. **8.** *Ахиезер Н.И.*, *Глазман И.М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, Физматлит, 1966. – 544 с. **9.** *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. – М.: Гос. изд-во техн.-теор. лит-ры, 1954. – 352 с. **10.** *Nikolski N.K.* Operators, Functions, and Systems: An Easy Reading. Volum 2: Model Operators and Systems. Mathem. Surv. and Monogr, Vol. 92. – Amer. Mathem. Soc., 2002. – 438 p. **11.** *Arov D.Z.*, *Dym H.* J-contractive matrix-valued functions and related topics. – Cambridge: Cambridge University Press, 2008. – 575 p. **12.** *Коробская А.В.* Полугруппа оператора интегрирования и его свойства // Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». – Х.: ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2014. – № 1105 – Вип. 24. – С. 85 – 98.

**Bibliography (transliterated):** **1.** Livshic, M. S. *Operatory kolebanija volny. Otkrytye sistemy*. Moscow: Nauka, 1966. Print. **2.** Livshic, M. S., and A. A. Jancevich. *Teorija operatornyh uzlov v gil'bertovyh prostranstvah*. Kharkiv: Izd-vo Khark. un-ta, 1971. Print. **3.** Nad', B. S., and Ch. Fojash. *Garmonicheskij analiz operatorov v gil'bertovom prostranstve*. Moscow: Mir, 1970. Print. **4.** Garnet, Dzh. *Ogranichennye analiticheskie funkcii*. Moscow: Mir, 1984. Print. **5.** Brodskij, M. S. *Treugol'nye i zhordanovy predstavlenija linejnyh operatorov*. Moscow: Nauka, 1969. Print. **6.** Zolotarev, V. A. *Analiticheskie metody spektral'nyh predstavlenij nesamosoprjazhennyh i neunitarnyh operatorov*. Kharkiv: KhNU, 2003. Print. **7.** Brodskij, M. S., and M. S Livshic. "Spektral'nyj analiz nesamosoprjazhennyh operatorov i promezhutochnye sistemy." *UMN*, No. XII, 1/79. 1958. 3–86. Print. **8.** Ahiezer, N. I. and I. M. Glazman. *Teorija linejnyh operatorov v gil'bertovom prostranstve*. Moscow: Nauka, Fizmatlit, 1966. Print. **9.** Najmark, M. A. *Linejnye differencial'nye operatory*. Moscow: Gos. izd-vo tehn.-teor. lit-ry, 1954. Print. **10.** Nikolski, N. K. *Operators*, *Functions*, *and Systems: An Easy Reading. Vol. 2: Model Operators and Systems.* Mathem. Surv. and Monogr. Vol. 92. Amer. Mathem. Soc., 2002. Print. **11.** Arov, D. Z., and H. Dym. *J-contractive matrix-valued functions and related topics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2008. Print. **12.** Korobskaja, A. V. "Polugruppa operatora integrirovanija i ego svojstva." *Visnyk Harkivs'kogo nacional'nogo universytetu imeni V. N. Karazina. Serija «Matematychne modeljuvannja. Informacijni tehnologii'. Avtomatyzovani systemy upravlinnja»*. No. 1105. Vol. 24. Kharkiv: KhNU imeni V. N. Karazina, 2014. 85–98. Print.

*Поступила (received) 01.09.2015*

***Коробська Ганна Вікторівна*** – кандидат педагогічних наук, доцент кафедри вищої математики та інформатики, Харківський національний університет ім. В. Н. Каразіна, м. Харків; тел.: (050) 831-87-42; e-mail: korobskayaanna@gmail.com.

***Коробская Анна Викторовна*** – кандидат педагогических наук, доцент кафедры высшей математики и информатики, Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина, г. Харьков; тел.: (050) 831-87-42; e-mail: korobskayaanna@gmail.com.

***Korobska Ganna Vyktorivna*** – Candidate of Pedagogic Sciences, Associate Professor at the Department of Higher Mathematics and Informatics, V. N. Karazin Kharkov National Univarsity, Kharkov; tel.: (050) 831-87-42; e-mail: korobskayaanna@gmail.com.

УДК 517.95+518.517

***Ю. С. ЛИТВИНОВА***

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ R-ФУНКЦИЙ В ЗАДАНИИ ИНФОРМАЦИИ О СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЯХ ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ 3D ПЕЧАТИ

Проведен обзор информации об использовании возможностей $3D$ печати в создании строительных объектов. В статье автор, используя методы теории $R$ – функций, построил математическую и компьютерную модели коттеджного дома с целью реализации его $3D$ печати. Проведено поэтапное построение уравнений конструктивных элементов дома. Значительное внимание уделено построению внутренних конструкций дома. Для удобства выбора реализовано несколько вариантов построения крыши дома.

**Ключевые слова:** $R$ – функции, визуализация $3D$ объектов, строительные конструкции, $3D$ печать, конструктивные элементы.

**Введение.** В настоящее время для создания трёхмерных физических объектов весьма перспективным является использование $3D$ принтеров. В основе технологии $3D$ печати лежит принцип послойного создания твердой модели. Преимуществами подобных устройств перед обычными способами создания моделей являются высокая скорость, простота и низкая стоимость. Сегодня сложно сказать, кто первым додумался попробовать напечатать на $3D$ принтере жилой дом, но уже сейчас понятно, что в недалеком будущем технология трехмерной печати станет неотъемлемой частью строительного дела. В начале двухтысячных годов сразу несколько независимых друг от друга групп ученых начали исследования в области применения технологии $3D$ печати в строительстве.

**Анализ последних исследований.** Группе инженеров британского Университета Лафборо, работающих под руководством *доктора Сунгву Лима*, удалось создать уникальный цементный состав, позволяющий печатать изделия любых форм: выпуклые, краеугольные, изогнутые, кубические. Усовершенствованная цементная формула укладывается методом экструдирования, что позволяет значительно упростить строительные работы, поскольку исключается необходимость в опалубке. Готовые бетонные фигуры легко поддаются корректировке и отделочным работам. Эксперименты британских инженеров не прошли бесследно. Их идея вызвала живой интерес ученых из Южно-Калифорнийского университета. Они предложили использовать огромные машины для $3D$ печати непосредственно на строительных площадках.

В патентное бюро США был направлен проект под названием Contour Crafting, на основе которого планируется собрать огромный принтер, который сможет печатать дома в сборе: не только несущие стены, но и проводку вместе с сантехникой.

В Амстердаме команда архитекторов работает над проектом, призванным освоить одно из самых важных направлений развития $3D$ печати – строительство зданий. Руководители фирмы намерены возвести здание в северной части Амстердама на канале Buiksloter, и оно будет функционировать в качестве образца и исследовательского центра для технологий 3D печати [1, 2].

В шанхайской компании Shanghai WinSun Decoration Design Engineering Co не стали дожидаться, пока американские конструкторы соберут футуристическую машину. Вместо этого предприимчивые инженеры собрали собственный $3D$ принтер WinSun, поразивший мировую общественность в первую очередь своими размерами. Аппарат 150 метров длиной и 10 метров шириной способен всего за несколько часов напечатать здание высотой до 6 метров. $3D$ строительный принтер WinSun в качестве «чернил» использует цемент, усиленный стекловолокном (рис. 1).

Компания уже применила свое изобретение на практике. Пока речь идет про недорогое, несложное одноэтажное жилье, однако в Shanghai WinSun переполнены энтузиазмом. Тестовые образцы обошлись предприятию на 50% дешевле, чем при использовании классических методов строительства. Технология очень простая и дешевая. Принтер слой за слоем наносит раствор. Стены получаются примерно 30 см в ширину. Но самое главное – скорость. Всего за 24 часа можно построить целый дом, а за неделю большой павильон площадью 1400 ì $^{2}$. Машина может работать круглые сутки сама по себе, без наблюдателя. Экономия не только на рабочей силе, но