УДК 004.94

Л. И. КОРОТКАЯ, Н. Ю. НАУМЕНКО

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ КОРРОДИРУЮЩИХ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ О ПАРАМЕТРАХ АГРЕССИВНОЙ СРЕДЫ

Проведено аналіз способів формалізації неповної або нечіткої інформації про параметри зовнішнього агресивного середовища при розв'язанні задач прогнозування довговічності та оптимального проектування конструкцій зі змінними геометричними характеристиками, що піддаються корозійному зносу. Для опису нечітких даних використано математичний апарат теорії нечітких множин та апарат інтервального аналізу. Розглянуто можливість використання запропонованих підходів. Проведено моделювання поведінки кородуючих конструкцій в умовах невизначеності.

Ключові слова: теорія нечітких множин, інтервальний аналіз, моделювання, прогнозування довговічності, оптимальне проектування.

Проведен анализ способов формализации неполной или неточной информации о параметрах внешней агрессивной среды при решении задач прогнозирования долговечности и оптимального проектирования конструкций с изменяющимися геометрическими характеристиками, подверженных коррозионному износу. Для описания нечётких данных использован математический аппарат теории нечётких множеств и аппарат интервального анализа. Рассмотрены возможности применимости предложенных подходов. Проведено моделирование поведения корродирующих конструкций в условиях неопределенности.

Ключевые слова: теория нечётких множеств, интервальный анализ, моделирование, прогнозирование долговечности, оптимальное проектирование.

The methods of formalization of incomplete or inaccurate information about the parameters of the external aggressive environment when solving problems of forecasting the durability and optimal design of structures with varying geometric characteristics subject to corrosive wear are analyzed. To describe the fuzzy data the mathematical apparatus of fuzzy set theory and interval analysis unit are used. The applicability of the proposed approaches is discussed. The behavior of corroding structures in undetermined conditions is simulated. The approaches allow to describe the environment close to the real conditions in which a mechanical system operates.

Key words: fuzzy set theory, interval analysis, modeling, durability forecasting, optimal design.

Введение. Механические системы с изменяющимися геометрическими характеристиками широко используются в различных отраслях промышленности и строительной индустрии, этим и обусловлена актуальность проблемы моделирования их поведения. Примером таких систем могут служить металлические конструкции, функционирующие в агрессивных внешних средах и подвергающиеся коррозионному износу.

Анализ последних исследований. Известные традиционные подходы решения рассматриваемого класса задач – детерминированный и вероятностно-стохастический – предполагают наличие полной информации о природе коррозионного процесса, либо знание законов и параметров его распределения. В реальных ситуациях такая информация отсутствует или имеет нечёткий характер.

Поэтому в работе предлагается рассматривать параметры агрессивной среды не постоянными, а величинами, которые могут изменяться в процессе функционирования системы. В качестве параметра агрессивной среды (АС) рассматривается *скорость коррозии*. Очевидно, что в процессе эксплуатации механической системы (в работе металлических конструкций) этот параметр зависит от ряда факторов, в том числе: влажности и температуры среды, степени нагрузок на элементы системы, насыщенности различными элементами внешней среды и пр. Диапазон изменения количественных характеристик указанных факторов достаточно велик, более того, весьма проблематично получить определенные их значения. Постановщику задачи, как правило, известен интервал изменения скорости коррозии, границы которого определяются значением лингвистической переменной – *степени агрессивности среды* [1, 3].

Следует отметить, что в работах, посвящённых прогнозированию долговечности и оптимальному проектированию корродирующих конструкций (КК), предлагались различные математические модели коррозионного износа, описывающие влияние внешней среды. Большое их количество делает проблематичным построение единого подхода к решению указанного класса задач. Однако следует отметить, что рассматриваемые модели феноменологически подобны, большая их часть может быть заменена единственной моделью, которая, при правильном выборе её параметров может рассматриваться как обобщение нескольких моделей [3]. Кроме того, следует отметить, что задача прогнозирования долговечности КК является частью более общей задачи оптимального проектирования, поэтому далее в работе они будут рассматриваться параллельно.

Предлагается исследовать стержневые конструкции с произвольной геометрией, граничными условиями и условиями нагружения. Внешними нагрузками являются сосредоточенные силы, приложенные в узлах. Предполагается также, что внешняя нагрузка носит детерминированный характер, а осевое усилие по длине элемента считается постоянной величиной. Под оптимальной конструкцией в данной работе понимается конструкция минимального объёма, которая удовлетворяет условиям прочности, устойчивости и конструктивным ограничениям, накладываемым на варьируемые параметры, и при этом она должна сохранять функциональную способность в течение заданного периода времени.

Постановка задачи. Для решения задачи прогнозирования долговечности КК традиционно применялся детерминированный подход (предполагалось, что скорость коррозии неизменная величина) и использовалась, так называемая, четкая постановка. При моделировании коррозионного процесса в работе учитывается влияние механических напряжений на скорость коррозии, что приводит к появлению обратной связи в схеме решения задачи прогнозирования долговечности [3, 4].

Долговечность системы в целом определяется по минимальному прогнозируемому значению долговечности одного из ее элементов с учетом изменения напряжений в них. Ввиду того, что информация о параметрах АС является неполной и скорость коррозии может быть задана некоторым интервалом $\tilde{v}_0 \in [v_0^-; v_0^+]$, границы которого определяются значением лингвистической переменной – степени агрессивности среды. Этот интервал трактуется как множество возможных значений, которые может принимать параметр скорость коррозии в процессе моделирования поведения корродирующей конструкции.

Нечёткая постановка задачи прогнозирования долговечности может быть записана так:

$$t^* = \min\{t_1, t_2, ..., t_N\};$$
$$t_i : \ [\sigma] - \sigma_i\left(t, \tilde{v}_0\right) = 0, \ \ i = \overline{1, N};$$
$$\sigma_j^* - \sigma_j\left(t, \tilde{v}_0\right) = 0, \ \ j \in J. \tag{1}$$

Здесь t^* – расчетное значение долговечности конструкции; N – количество элементов в системе; J – количество элементов, работающих на сжатие; $[\sigma]$ – допускаемое напряжение; $\sigma_i(t, \tilde{v}_0)$ – текущее напряжение в i – м элементе; $\sigma_j(t, \tilde{v}_0)$ – критическое напряжение потери устойчивости; $\tilde{v}_0$ – интервальная величина скорости коррозии ненагруженного материала.

Как отмечалось ранее, задача прогнозирования долговечности является подзадачей задачи оптимального проектирования. Рассмотрим ферму, состоящую из N элементов произвольного сечения, часть которых работает на растяжение, часть – на сжатие. Необходимо выбрать геометрические размеры сечений стержней таким образом, чтобы объём конструкции при этом был минимальным.

Постановки задачи оптимального проектирования (или задачи оптимизации) корродирующей системы в общем виде с учетом неполной информации о параметрах АС может быть представлена в следующем виде:

$$V\left(\bar{x}\right) = \sum_{i=1}^{N} l_i \cdot A_i(\bar{x}) \to \min;$$
$$\begin{cases} g_1 : \ [\sigma] - \sigma_i\left(\bar{x}, t^*, \tilde{v}_0\right) \geq 0, & i = \overline{1, N}; \\ g_2 : \ \sigma_j^*\left(\bar{x}, t^*, \tilde{v}_0\right) - \sigma_j\left(\bar{x}, t^*, \tilde{v}_0\right) \geq 0, & j \in J; \\ x_l \in \left[x_l^-; x_l^+\right], & l = \overline{1, L}. \end{cases} \tag{2}$$

Здесь $V\left(\bar{x}\right)$ – искомый оптимальный объём конструкции; $\bar{x}$ – вектор варьируемых параметров; l_i и $A_i\left(\bar{x}\right)$ – длина и площадь сечения i – го стержня; $[\sigma]$ – допускаемое напряжение; $\sigma_i\left(\bar{x}, t^*, v_0\right)$ – текущее напряжение в i – м элементе; $\sigma_j^*\left(\bar{x}, t^*, v_0\right)$ – критическое напряжение потери устойчивости; N – количество элементов в системе; J – множество стержней, работающих на сжатие; L – количество варьируемых параметров; x_l^+, x_l^- – верхняя и нижняя границы изменения l – го варьируемого параметра; t^* – заданная долговечность; g_1 – ограничения по прочности; g_2 – ограничения по устойчивости.

Таким образом, отличие данной постановки задачи оптимизации от известных заключается в том, что скорость коррозии является нечёткой величиной и представляется в виде *кортежа*, то есть одномерного массива, над которым не определены операции векторной алгебры.

Постановка (2) является задачей нелинейного программирования. Методам и алгоритмам ее решения в условиях неопределенности посвящены [2, 3].

Математическая модель. Поведение корродирующей конструкции может быть исследовано путём решения системы дифференциальных уравнений (СДУ), описывающей коррозионный процесс. Процедура вычисления прогнозной долговечности элемента, подверженного коррозионному воздействию, или определение его напряженно-деформированного состояния (НДС) в какой-либо момент времени предполагает совместное использование какого-либо численного метода расчёта НДС (в данной работе *метода конечных элементов* (МКЭ)) и численного метода решения *задачи Коши* для СДУ, описывающих коррозионный процесс. В качестве модели накопления геометрических повреждений рассматривается *модель В.М. Долинского* [2 – 4]:

$$\frac{d\delta_i}{dt} = \tilde{v}_0 \cdot \left[1 + k \cdot \sigma_i\left(\overline{\delta}\right)\right], \qquad (3)$$

где δ_i − глубина коррозионного поражения $i-$го элемента $\left(i = \overline{1, N}\right)$; σ_i − абсолютное значение напряжения в $i-$м элементе; $\overline{\delta}$ – вектор глубин коррозии всех элементов; k − коэффициент, учитывающий влияние напряжённого состояния на скорость коррозии.

Напряжение $\sigma_i\left(\overline{\delta}\right)$ является нелинейной функцией от δ, которая зависит от вида напряженного состояния элемента и, в большинстве случаев, не может быть представлена в аналитическом виде.

Решение системы дифференциальных уравнений (3) возможно только численно, например, *методом Эйлера*, при этом решение задачи НДС осуществляется в каждом узле временной сетки [2, 3]:

$$\delta_i^s = \delta_i^{s-1} + \Delta t^s \cdot \tilde{v}_0 \cdot \left(1 + k \cdot \sigma_i^{s-1}\left(\overline{\delta}^{s-1}\right)\right). \qquad (4)$$

Здесь s – номер итерации; Δt – шаг интегрирования.

Становится очевидным, что при решении указанного класса задач при нечеткой информации о параметрах АС традиционные подходы становятся малоэффективными. Альтернативными подходами являются математический аппарат *теории нечетких множеств* (ТНМ) или *интервального анализа* (ИА). Остановимся несколько подробней на каждом из них.

Как отмечалось в [4], использование интервалов оправдано в тех случаях, когда практически нет никакой экспертной информации о нечеткой величине (в работе о параметрах АС). Использование интервалов не требует знания законов или параметров распределения случайной величины. Интервальная величина может иметь, а может и не иметь на интервале распределение. Имеется достаточно большое количество интервальных методов численного решения систем уравнений [5] и СДУ в том числе. В результате применения математического аппарата ИА будет получено решение в виде интервала $[t^*_{\min};\ t^*_{\max}]$ и, возможно, для получения прогнозируемого значения долговечности использовать некоторые оценки, в том числе и усредненные. Следует отметить, что применение интервального анализа сопряжено с определенными вычислительными затратами и некоторыми специфическими особенностями, которые присущи указанным методам. Например, *эффект раскрутки Мура* или *эффект распаковывания*, который связан только с внутренними свойствами интервальных методов безотносительно к ошибкам численных решений [4, 5].

В том случае, когда имеется возможность получения экспертных оценок, то целесообразно их использовать. Для формализации нечеткой информации о параметрах агрессивной среды появляется возможность построения *функции принадлежности* $\mu(v_0)$ [1, 3, 6]. В работе использовался $\alpha-$*уровневый принцип обобщения*:

$$\tilde{v}_0 = \sum_{i=1}^{2\cdot N_\alpha - 1} \frac{\mu(v_0^i)}{v_o^i}, \quad v_0^i \in [v_0^-; v_0^+]; \qquad (5)$$

$$\mu(v_0^i) = \begin{cases} 0, & v_0^i \notin [v_0^-; v_0^+]; \\ \cos\left(\pi \cdot \dfrac{v_{cp} - v_0^i}{v_0^+ - v_0^-}\right), & v_0^i \in [v_0^-; v_0^+], \end{cases} \qquad (6)$$

где $v_{cp} = \dfrac{v_0^+ + v_0^-}{2}$; i – номер элемента кортежа; N_α – количество $\alpha-$уровней.

В формуле (5) символ $\sum$ обозначает дискретное нечёткое множество [6].

Скорость коррозии, как нечёткое число, представляется в виде разложения по $\alpha-$уровневым множествам (далее *операция фаззификации*):

$$\tilde{v}_0 = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} \left(v_0^-; v_0^+\right)$$

и будет представляться кортежем $\tilde{v}_0$, количество элементов v_0^i которого N_α определяется количеством $\alpha-$уровней. Таким образом, при решении задачи оптимизации при вычислении функций ограничений должны учитываться все значения кортежа $\tilde{v}_0$. Каждому элементу кортежа v_0^i будет соответствовать значение долговечности t^i, всё множество которых образует *кортеж долговечности* $\tilde{t}$.

Применение уровней множества даёт возможность получения не только интервала изменения значения долговечности $t \in [t^*_{\min}; t^*_{\max}]$, но и получения дефаззифицированного [3, 4, 6] его значения $t_{деф}$ одновременно с соответствующим значением функции принадлежности $\mu(t)$, например, *центроидным методом*:

$$t = t_{деф} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{2 \cdot N_\alpha - 1} t^i \cdot \mu(t^i)}{\sum\limits_{i=1}^{2 \cdot N_\alpha - 1} \mu(t^i)}, \qquad (7)$$

Численные результаты. Для численной иллюстрации рассматривается решение задачи прогнозирования долговечности стержня, растянутого силой Q. Исходные данные: $Q = 12$ кН; предельно допустимое напряжение $[\sigma] = 240$ МПа; начальные внешний и внутренний радиусы соответственно $R = 2,5$ см и $r = 1,25$ см; шаг интегрирования $\Delta t = 0,0001$ лет; коэффициент влияния напряжений $k = 0,003$ МПа$^{-1}$; заданное предельно допустимое значение погрешности численного решения $\varepsilon = 0,05$.

При решении задачи прогнозирования долговечности, во избежание описанных в [2, 3] нештатных ситуаций, был применён метод Эйлера. Количество $\alpha-$ уровней принималось равным шести.

Дефаззифицированное значение долговечности $t_{деф}$ при использовании теории нечётких множеств получено центроидным методом (7); $t_{ср}$ – среднее значение интервала долговечности $[t^*_{\min}; t^*_{\max}]$.

Для большей наглядности авторы преднамеренно приводят величину $t_{ср}$ с целью демонстрации того, что воспользоваться усреднённой оценкой получаемого прогнозируемого значения долговечности можно, но насколько это целесообразно или нет, следует определяться лицу, принимающему решение (табл. 1).

Очевидно, что при решении задачи определения оптимального объема конструкции вычислительные затраты при использовании предложенных способов формализации неполной информации о параметрах АС будут существенно возрастать. Некоторые аспекты повышения эффективности вычислительных методов решения указанной задачи рассмотрены в [2, 3].

Таблица 1 – Результаты численного решения задачи прогнозирования долговечности в различных постановках

v_0, см/год	t^*, лет	$t_{ср}$, лет	$t_{деф}$, лет
Чёткая постановка			
0,1	5,16	-	-
Нечёткая постановка (ИА)			
[0,90; 0,11]	[4,62; 5,68]	5,15	-
[0,08; 0,12]	[4,26; 6,41]	5,34	-
[0,07;0,13]	[3,93;7,34]	5,66	-
Нечёткая постановка (ТНМ)			
[0,90; 0,11]	[4,69; 5,74]	5,22	5,18
[0,08; 0,12]	[4,31; 6,46]	5,39	5,21
[0,07; 0,13]	[3,98; 7,38]	5,68	5,26

Предложенные в работе подходы позволяют формализовать неполную информацию о параметрах агрессивной среды и получить решение, соответствующее более реальным условиям эксплуатации механической системы. Выбор использования математического аппарата теории нечетких множеств или интервального анализа, безусловно, зависит от решаемой задачи. По своей сути метод интервального анализа достаточно хорошо формализован и алгоритмичен. Применение уровней множества даёт возможность получить дефаззифицированное значение долговечности с его функцией принадлежности $\mu(t)$, которая позволяет установить степень принадлежности $t_{деф}$ нечёткому множеству $\tilde{t}$. Ввиду того, что в работе рассматривается задача прогнозирования долговечности КК, как часть более общей задачи – оптимального проектирования, то приоритет остается за теорией нечетких множеств.

Выводы. Учет неполной или нечеткой информации о параметрах агрессивной среды отвечает реальным условиям функционирования механических систем, в том числе и металлических конструкций. Однако формализация такой информации требует дополнительных вычислительных и других затрат. Интерпретацию полученных результатов осуществляет лицо, принимающее решение – эксперт предметной области.

Список литературы

1. *Заде Л.* Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. – Москва : Мир, 1976. – 163 с.
2. *Зеленцов Д. Г., Короткая Л. И.* Способы повышения эффективности численного решения некоторых классов систем дифференциальных

уравнений // «Современные проблемы математики, механики и информатики». Сборник статей / Под. ред. Н. Н. Кизиловой, Г. Н. Жолтакевича. – Харьков, 2011. – С. 234 – 241.

3. *Зеленцов Д. Г., Короткая Л. И.* Использование принципа обобщения нечётких параметров агрессивной среды в моделях оптимизации конструкций // Математичне моделювання. – Вип. – 1 (24). – 2011. – С. 20 – 23.
4. *Короткая Л. И.* Способы формализации неточных данных в задачах прогнозирования долговечности корродирующих конструкций // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Вип. 5 (88). – 2013. – С. 98 – 105.
5. *Шарый С. П.* Конечномерный интервальный анализ. – Издательство «XYZ», 2010. – 597 с.
6. *Штовба С. Д.* Введение в теорию нечётких множеств и нечёткую логику / Винницкий технический университет. – 2014. – Режим доступа: http://matlab.exponenta.ru/fuzzylogic/book2/index.php. – Дата обращения : 25 июня 2016.

References (transliterated)

1. Zadeh L. *Ponyatie lingvisticheskoy peremennoy i ego primenenie k prinyatiyu priblizhennykh resheniy* [The concept of linguistic variable and its application to approximate reasoning]. Moscow, Mir Publ., 1976. p. 163.
2. Zelentsov D. G., Korotkaya L. I. Sposoby povysheniya effektivnosti chislennogo resheniya nekotorykh klassov sistem differentsial'nykh uravneniy [The methods for increasing the efficiency of solving numerically some classes of systems of differential equations]. *Sovremennye problemy matematiki, mekhaniki i informatiki. Sbornik statey* [Contemporary problems of mathematics, mechanics, and informatics. Collection of papers]. Ed. Kizilova N. N., Zholtakevich G. N. Kharkov, 2011, pp. 234–241.
3. Zelentsov D. G., Korotkaya L. I. Ispol'zovanie printsipa obobscheniya nechyotkikh parametrov agressivnoy sredy v modelyakh optimizatsii konstruktsiy [Using principle of generalized fuzzy parameter of aggressive medium in design optimization models]. *Matematichne modelyuvannya* [Mathematical modelling]. 2011, no. 1 (24), pp. 20–23.
4. Korotkaya L. I. Sposoby formalizatsii netochnykh dannykh v zadachakh prognozirovaniya dolgovechnosti korrodiruyuschikh konstruktsiy [The methods of formalizing fuzzy data in the problems of predicting corroding structures durability]. *Systemni tekhnologiyi*. *Regiona'nyy mizhvuzivs'kyy zbirnyk naukovykh prats'* [System technologies. Regional interuniversity collection of works]. 2013, no. 5 (88), pp. 98–105 p.
5. Sharyy S. P. *Konechnomernyy interval'nyy analiz* [Finite-dimensional interval analysis]. Izdatel'stvo "XYZ" Publ., 2010. p. 597.
6. Shtovba S. D. Vvedenie v teoriyu nechyotkikh mnozhestv i nechyotkuyu logiku [Introduction to fuzzy set theory and fuzzy logic]. *Vinnitskiy tehnicheskiy universitet* [Vinnytsia National Technical University]. Available at : http://matlab.exponenta.ru/fuzzylogic/book2/index.php. (accessed 25.06.2016).

Поступила (received) 29.06.2016

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Моделювання поведінки кородуючих конструкцій при неповній інформації про параметри агресивного середовища / Л. І. коротка, Н. Ю. Науменко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2016. – № 16 (1188). – С. 48 – 52. Бібліогр.: 6 назв. – ISSN 2222-0631.

Моделирование поведения корродирующих конструкций при неполной информации о параметрах агрессивной среды / Л. И. Короткая, Н. Ю. Науменко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2016. – № 16 (1188). – С. 48 – 52. Бібліогр.: 6 назв. – ISSN 2222-0631.

Modeling the behavior of corroding structures with incomplete information about the parameters of aggressive environment / L. I. Korotka, N. Yu. Naymenko // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2016. – № 16 (1188). – pp. 48 – 52. Bibliog.: 6 titles. – ISSN 2222-0631.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Коротка Лариса Іванівна – кандидат технічних наук, доцент, Державний вищий навчальний заклад «Український державний хіміко-технологічний університет», м. Дніпро, тел.: (0562) 47-38-77; e-mail: korliv@hotmail.com.

Короткая Лариса Ивановна – кандидат технических наук, доцент, Государственное высшее учебное заведение «Украинский государственный химико-технологический университет», г. Днепр, тел.: (0562) 47-38-77; e-mail: korliv@hotmail.com.

Korotka Larysa Ivanovna – Candidate of Technical Sciences, Assistant Professor, State Higher Educational Institution "Ukrainian State University of Chemical Technology", Dnipro city; tel.: (0562) 47-38-77; e-mail: korliv@hotmail.com.

Науменко Наталія Юріївна – кандидат технічних наук, доцент, Державний вищий навчальний заклад «Український державний хіміко-технологічний університет», м. Дніпро, тел.: (0562) 47-38-77; e-mail: nay_nata@i.ua.

Науменко Наталья Юрьевна – кандидат технических наук, доцент, Государственное высшее учебное заведение «Украинский государственный химико-технологический университет», г. Днепр, тел.: (0562) 47-38-77; e-mail: nay_nata@i.ua.

Naymenko Natalya Yuriivna – Candidate of Technical Sciences, Assistant Professor, State Higher Educational Institution "Ukrainian State University of Chemical Technology", Dnipro city; tel.: (0562) 47-38-77; e-mail: nay_nata@i.ua.