

УДК 539:519.517.3

**О. П. Абрамова, С. В. Абрамов\***

\*ООО «HotSport», г. Донецк

**КОМПЛЕКСНОЕ ПОЛЕ ДЕФОРМАЦИИ ФРАКТАЛЬНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ПАРАБОЛОИДА В МНОГОСЛОЙНОЙ НАНОСИСТЕМЕ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ**

Исследовано поле деформации в многослойной наносистеме с объемной структурой типа фрактального эллиптического параболоида. В процессе итерационной процедуры возникают переменные параметры. Они приводят к появлению комплексных функций смещения узлов решетки и позволяют учесть внутри и межплоскостные переменные взаимодействия. Проведен анализ усредненных функций, выявлено наличие слоев с критическими значениями параметров. Показано, что при пересечении поверхности эллиптического параболоида критической плоскостью образуется линия особых точек (аттракторов) поля деформации – эллиптическая дислокация. Процесс самоорганизации приводит к эффектам поворота, смещения центра тяжести, изменению полуосей эллиптической дислокации.

*Ключевые слова:* фрактальная объемная структура, переменные параметры, комплексные функции смещения, аттракторы, самоорганизация, многослойная наносистема.

**Введение.** Активными наноструктурными элементами в реальных и искусственных многослойных наносистемах являются кластеры [1], квантовые точки [2], фрактальные осцилляторы [3], фрактальные ловушки [4]. Эти элементы могут найти свое применение в квантовой информатике, наномеханике, квантовой оптике, для квантовых компьютеров. В многослойных наносистемах характерно появление объемных фрактальных структур [5, 6].

С другой стороны модельные многослойные наносистемы и возникающие там объемные фрактальные структуры могут найти свое применение при описании нейронных сетей [7]. Мозг живых организмов представляет собой определенную нейронную сеть. Нобелевская премия 2014 года по физиологии и медицине была присуждена Джону О'Кифи, Мэй-Бритт Мозер и Эдварду Мозеру за открытие системы клеток в мозге, которые определяют положение в пространстве [8–10]. Дж. О'Киф в конце 60-х годов открыл активные нейроны, которые получили название топографических клеток или «клеток места». Импульсы топографических клеток отображают активность в сенсорных нейронах и представляют собой комплексное отображение пространства. Отдельные топографические клетки активируются при нахождении в той или иной точке пространства, то есть они предоставляют мозгу систему координат в пространстве. М.-Б. Мозер и Э. Мозер открыли новый тип клеток – координатные нейроны или «клетки решетки» (grid-cell), которые создают систему координат для более точного определения позиции и нахождения пути. Их дальнейшие исследования показали, как «клетки места» и «клетки решетки» делают возможными определение местоположения и навигацию. При этом активные клетки реагируют на пересечение узлов воображаемой гексагональной пространственной решетки, то есть на прохождение определенных расстояний в определенном направлении.

При описании фрактальных объемных структур [5, 6] в многослойной наносистеме в качестве активных элементов могут выступать узлы объемной решетки, которые являются аттракторами. Эти аттракторы образуют поверхность активных элементов поля деформации (поля смещений). Чтобы определить положение особых точек (аттракторов) поля смещений в активном слое необходимо пересечь эту поверхность плоскостью. В результате можно найти линии особых точек в отдельном слое. Параметры, которые характеризуют положение аттракторов, в общем случае, являются переменными и могут изменяться как в плоскости слоя, так и от слоя к слою.

Целью данной работы является описание комплексного поля деформации в модельной многослойной наносистеме с объемной фрактальной структурой и с параметрами, изменяющимися в процессе итерационной процедуры.

**Основные уравнения с переменными параметрами.** В работах [4–6] рассматривается модельная наносистема: объемная дискретная решетка  $N_1 \times N_2 \times N_3$ , узлы которой задаются целыми числами  $n, m, j$  ( $n = \overline{1, N_1}$ ;  $m = \overline{1, N_2}$ ;  $j = \overline{1, N_3}$ ). Безразмерное переменное смещение  $u$  узла решетки описывалось в виде [5]

$$u = (1 - \alpha)(1 - 2\text{sn}^2(u - u_0, k)) / Q, \quad (1)$$

где  $\alpha$  – фрактальная размерность поля деформации  $u$  вдоль оси  $Oz$  ( $\alpha \in [0, 1]$ );  $u_0$  – постоянное (кри-

тическое) смещение;  $k$  – модуль функции эллиптического синуса. Функция  $Q$  учитывает взаимодействие узлов, как в плоскости основной прямоугольной дискретной решетки, так и межплоскостные взаимодействия. Исходное выражение для  $Q$  имеет вид

$$Q = p'_0 + p'_1 n + p'_2 m + p'_3 j - b_1 \left( \frac{n' - n_0}{n_c} \right)^2 - b_2 \left( \frac{m' - m_0}{m_c} \right)^2 - b_3 \left( \frac{j' - j_0}{j_c} \right)^2. \quad (2)$$

В выражение (2) входят тринадцать параметров. Параметр  $p'_0$  не зависит от переменных  $n, m, j$ ; параметры  $p'_1, p'_2, p'_3$  входят в линейную форму; параметры  $b_1, b_2, b_3, n_0, n_c, m_0, m_c, j_0, j_c$  определяют поведение квадратичной формы. При этом параметры  $n_c, m_c, j_c$  выполняют роль полюсов объемных фрактальных структур в новой системе координат  $O'n'm'j'$ . Исходная система координат  $Onmj$  описывается в терминах переменных  $n, m, j$ .

Выполнив операцию пространственного поворота осей координат вокруг оси  $Oj$ , переходим от системы координат  $Onmj$  к системе координат  $O'n'm'j'$  по формулам [5]

$$\begin{aligned} n' &= n \cdot k'_1 \operatorname{cn}(u_{1\beta}, k_1) - m \cdot \operatorname{sn}(u_{1\beta}, k_1) + j \cdot k_1 \operatorname{cn}(u_{1\beta}, k_1); \\ m' &= n \cdot k'_1 \operatorname{sn}(u_{1\beta}, k_1) + m \cdot \operatorname{cn}(u_{1\beta}, k_1) + j \cdot k_1 \operatorname{sn}(u_{1\beta}, k_1); \\ j' &= -n \cdot k_1 + j \cdot k'_1; \quad k_1 = \operatorname{sn}(u_{1\theta}, k_{1\theta}); \quad k'_1 = \operatorname{cn}(u_{1\theta}, k_{1\theta}); \quad k_1^2 + k_{1\theta}^2 = 1. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь безразмерное смещение  $u_{1\beta}$  связано с полярным углом  $\varphi_{1\beta}$  в плоскости  $Onm$  соотношением  $u_{1\beta} = F(\varphi_{1\beta}, k_1)$ ;  $F$  – неполный эллиптический интеграл первого рода; безразмерное смещение  $u_{1\theta}$  связано с некоторым эффективным углом  $\theta_1$  соотношением  $u_{1\theta} = F(\theta_1, k_{1\theta})$ ;  $k_1, k_{1\theta}$  – модули эллиптических функций. Безразмерное смещение  $u_{1\beta}$  является нелинейной функцией двух параметров  $\varphi_{1\beta}$  и  $k_1$ , которые определяют различные механизмы перестройки фрактальной объемной структуры и управления ею. Параметр  $k_1$  является нелинейной функцией от  $u_{1\theta}$  и  $k_{1\theta}$ . В результате смещение  $u_{1\beta}$  становится сложной функцией, зависящей от трех параметров  $\varphi_{1\beta}, u_{1\theta}, k_{1\theta}$ .

Классификация исходных фрактальных объемных структур была приведена в работах [5, 6]. Также было исследовано решение уравнения (1) с  $Q$  в виде (2) методом итераций при  $\alpha = 0.5$  и фиксированных значениях параметров  $k = 0.5$ ;  $u_0 = 29.537$ ;  $u_{1\theta}$ ;  $u_{1\beta}$ .

В данной работе параметры  $k$  и  $u_0$  из (1) являются переменными. Это связано с тем, что в многослойной наносистеме фрактальные объемные структуры характеризуются наличием переменного параметра  $k = k_u$ , который может изменяться от узла к узлу, как в отдельной плоскости  $Onm$ , так и между отдельными плоскостями с различными значениями  $j$ . Указанные переменные параметры моделируем следующими выражениями

$$\begin{aligned} k_u^2 &= (1 - \alpha) / Q; \quad (k'_u)^2 = (Q - 1 + \alpha) / Q; \quad k_u^2 + (k'_u)^2 = 1; \quad u_0 = F(\varphi_0; k_u); \\ \varphi_0 &= \pi n_{\varphi 0} (1 - 2f_s) / 4; \quad f_s = s / d; \quad f'_s = (d - s) / d; \quad f'_s + f_s = 1. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $F$  – неполный эллиптический интеграл первого рода;  $k_u$  – модуль эллиптического синуса;  $n_{\varphi 0} = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  – целые числа;  $s, d$  – характерные параметры, связанные с размерами отдельных объектов в объемной фрактальной структуре модельной многослойной наносистемы. В качестве отдельных объектов выбираем кластеры с характерными размерами  $d = 50 \div 150 \text{ nm}$  [1]. Параметры  $k_u, k'_u$  явно зависят от узлов решетки  $(n, m)$ .

С учетом выражений (4) безразмерное переменное смещение  $u$  узла решетки (1) запишем в виде

$$u = u_1 = k_u^2 (1 - 2\operatorname{sn}^2(u_1 - u_0, k_u)). \quad (5)$$

Выражение (5) определяет первое решение. В зависимости от выбора начальных условий возможны еще три дополнительных решения

$$u = u_2 = k_u^2 (1 - 2\operatorname{sn}^2(u_2 - u_0, k'_u)); \quad (6)$$

$$u = u_3 = (k'_u)^2 (1 - 2\text{sn}^2(u_3 - u_0, k'_u)); \quad (7)$$

$$u = u_4 = (k'_u)^2 (1 - 2\text{sn}^2(u_4 - u_0, k'_u)). \quad (8)$$

Между этими решениями (5)–(8) существуют дополнительные связи типа

$$k_u^2 = u_1 / (1 - 2\text{sn}^2(u_1 - u_0, k_u)) = u_2 / (1 - 2\text{sn}^2(u_2 - u_0, k_u)); \quad (9)$$

$$(k'_u)^2 = u_3 / (1 - 2\text{sn}^2(u_3 - u_0, k'_u)) = u_4 / (1 - 2\text{sn}^2(u_4 - u_0, k'_u)). \quad (10)$$

Соотношения (9), (10) позволяют выполнять анализ поведения переменных параметров  $k_u, k'_u$  по найденным зависимостям  $u_1, u_2, u_3, u_4$ . С другой стороны эти выражения можно рассматривать как основные нелинейные итерационные уравнения относительно переменных  $k_u, k'_u$ .

В качестве примера рассмотрим элементарную ячейку высокотемпературного сверхпроводника  $YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$  (ВТСП 1-2-3) [11], размеры которой определяются параметрами  $a_1 = 3.822A$ ,  $a_2 = 3.891A$ ,  $a_3 = 11.677A$  (где  $A$  – ангстрем). Тогда характерные размеры рассматриваемой модельной наносистемы ( $N_1 = 30$ ;  $N_2 = 40$ ;  $N_3 = 67$ ) определяются выражениями  $L_1 = a_1(N_1 - 1) = 110.838A$ ,  $L_2 = a_2(N_2 - 1) = 151.749A$ ,  $L_3 = a_3(N_3 - 1) = 770.682A$ .

В качестве фрактальной объемной структуры в модельной многослойной наносистеме рассмотрим фрактальный эллиптический параболоид (ФЭП) с параметрами из [5]:  $b_1 = 1$ ;  $b_2 = 1$ ;  $b_3 = 0$ ;  $p'_0 \neq 0$ ;  $p'_1 = 0$ ;  $p'_2 = 0$ ;  $p'_3 \neq 0$ . Тогда  $Q$  из (2) без учета поворота осей координат ( $n' = n$ ,  $m' = m$ ,  $j' = j$ ) примет вид

$$Q = p'_0 + p'_3 j - \left( \frac{n - n_0}{n_c} \right)^2 - \left( \frac{m - m_0}{m_c} \right)^2. \quad (11)$$

Особые точки (аттракторы) поля деформации располагаются на поверхности ФЭП. Ядро этой фрактальной поверхности определяется из условия  $Q = 0$ , уравнение которой имеет вид

$$j = \left( \frac{-p'_0}{p'_3} \right) + \frac{1}{p'_3} \left( \frac{n - n_0}{n_c} \right)^2 + \frac{1}{p'_3} \left( \frac{m - m_0}{m_c} \right)^2. \quad (12)$$

Если поверхность (12) пересечь плоскостью  $j = j_k$ , то из (12) получим уравнение линии, которая определяет ядро эллиптической дислокации

$$\left( \frac{n - n_0}{n'_c} \right)^2 + \left( \frac{m - m_0}{m'_c} \right)^2 = 1; \quad n'_c = \chi_k n_c; \quad m'_c = \chi_k m_c; \quad \chi_k = (p'_3 j_k + p'_0)^{1/2}. \quad (13)$$

При выполнении условия  $p'_3 j_k + p'_0 \geq 0$  параметр  $\chi_k$  является действительной величиной, а критическое значение  $j_k$  определяется из соотношений:  $j_k \geq -p'_0 / p'_3$  при  $p'_3 \geq 0$  или  $j_k \leq -p'_0 / p'_3$  при  $p'_3 \leq 0$ . Параметры  $n'_c, m'_c$  определяют значения перенормированных полуосей эллипса. При  $\chi_k > 1$  эллипс расширяется, а при  $\chi_k < 1$  эллипс сжимается. При этом отношение полуосей эллипса не изменяется, параметр  $k_c = n'_c / m'_c = n_c / m_c$  не зависит от критического значения  $j_k$ .

Учет поворота системы координат вокруг оси  $Oj$  приводит к замене выражения для  $Q$  из (11) на

$$Q = p'_0 + p'_3 j - \left( \frac{n' - n_0}{n_c} \right)^2 - \left( \frac{m' - m_0}{m_c} \right)^2. \quad (14)$$

Связь  $n', m'$  новой системы координат  $O'n'm'j'$  со старой  $Onmj$  осуществляется по формулам (3). С целью извлечения информации о влиянии поворота системы координат на положение центра тяжести эллипса  $(n_0, m_0)$  перепишем выражение (14) в следующем виде

$$Q = p'_0 + p'_3 j - \left( \frac{n'' - n'_0}{n_c} \right)^2 - \left( \frac{m'' - m'_0}{m_c} \right)^2; \quad n'_0 = n_0 - j \cdot k_1 \text{cn}(u_{1\beta}, k_1); \quad m'_0 = m_0 - j \cdot k_1 \text{sn}(u_{1\beta}, k_1); \\ n'' = n \cdot k'_1 \text{cn}(u_{1\beta}, k_1) - m \cdot \text{sn}(u_{1\beta}, k_1); \quad m'' = n \cdot k'_1 \text{sn}(u_{1\beta}, k_1) + m \cdot \text{cn}(u_{1\beta}, k_1). \quad (15)$$

Тогда с учетом поворота системы координат уравнение линии, которая определяет ядро эллиптической дислокации, принимает вид

$$\left(\frac{n'' - n'_0}{n'_c}\right)^2 + \left(\frac{m'' - m'_0}{m'_c}\right)^2 = 1. \quad (16)$$

Положение смещенного центра тяжести эллипса определяется параметрами  $(n'_0, m'_0)$ , которые зависят от номера слоя  $j$ , модулей  $k_1, k_{1\theta}$  и смещений  $u_{1\beta}, u_{1\theta}$ . Отметим, что при  $k_{1\theta} = 0, u_{1\beta} = 0, u_{1\theta} = 0$  выражение для  $Q$  из (15) строго переходит в выражение (11).

Для исследования поведения стохастического поля деформации фрактальных объемных структур в многослойной наносистеме в рамках статистического подхода вводим усредненные функции по аналогии с [5]. Необходимость усреднения связана с тем, что элементы матрицы смещений узлов решетки, в общем случае, являются случайными комплексными функциями. В случае усреднения по узлам в плоскости  $N_1 \times N_2$  прямоугольной дискретной решетки вводятся операторы полей смещений  $\hat{u}$  и плотности состояний  $\hat{\rho}$ . Этим операторам ставятся в соответствие прямоугольные матрицы  $\hat{u}$  и  $\hat{\rho}$  с размерами  $N_1 \times N_2$  и  $N_2 \times N_1$ , матричными элементами  $u_{nm}$  и  $\rho_{mn} = 1 / N_2 N_1$ , соответственно. Для однородного распределения оператор  $\hat{\rho}$  имеет вид  $\hat{\rho} = \hat{\xi}_{N_2}^T \hat{\xi}_{N_1} / N_2 N_1$ , где значок « $T$ » означает операцию транспонирования;  $\hat{\xi}_{N_1}, \hat{\xi}_{N_2}$  – вектор-строки с элементами равными единице. Усредненная функция  $M$  имеет вид

$$M(j) = \text{Sp}(\hat{M}) = M' + iM''; \quad \hat{M} = \hat{\rho}\hat{u}; \quad M' = \text{Re} M; \quad M'' = \text{Im} M. \quad (16)$$

Здесь  $\text{Sp}$  – операция вычисления следа квадратной матрицы;  $i$  – мнимая единица;  $\hat{M}$  – квадратная матрица с размерами  $N_2 \times N_2$ . В отличие от работ [5] функции смещения (5)–(8) и усредненные функции (16) для всех четырех решений являются комплексными. Это связано с тем, что величина  $Q$  из (2) может изменять знак, поэтому переменные  $k_u, k'_u, u_0$  из (3) становятся комплексными.

**Особенности поведения комплексных смещений и усредненных функций.** Применим метод численного моделирования для исследования решений нелинейных уравнений (5), (6). Безразмерные функции смещений  $u_1, u_2$  получены методом итераций по  $m$ . Исходные параметры были следующими:  $p'_0 = 1.0123$ ;  $n_0 = 14.3267$ ;  $n_c = 9.4793$ ;  $m_0 = 19.1471$ ;  $m_c = 14.7295$ ;  $n_{\varphi 0} = 1$ ;  $\varphi_0 = \pi(1 - 2f_s) / 4$ ;  $k_{1\theta} = 0$ ;  $u_{1\theta} = 0$ ;  $u_{1\beta} = 0$ . При этом параметр  $k_c = n_c / m_c = 0.6436$ . Выбор параметров  $k_{1\theta} = 0$ ;  $u_{1\theta} = 0$ ;  $u_{1\beta} = 0$  означает отсутствие поворотов системы координат  $Onmj$ . В данном разделе исследуются зависимости функций смещений от решеточных индексов  $(n, m)$  для различных слоев  $j$  и усредненных функций от номера слоя  $j$  и некоторых значений параметров  $f_s, p'_3$ . Исследование решений нелинейных уравнений (7), (8) в данной работе не приводим.

На рис. 1, 2 представлены зависимости реальных и мнимых частей безразмерной функции смещения  $u = u_1$  от решеточных индексов  $(n, m)$  для различных слоев  $j$  и некоторых значений параметров  $f_s, p'_3$ . Для рис. 1, 2 параметр  $p'_3 = -0.3375$  [5]. Полученные численные результаты подтверждают теоретический вывод о том, что функция смещения является комплексной: при  $f_s = 0$  для слоя  $j = 1$  (рис. 1, а, з), для слоя  $j = 67$  (рис. 1, б, д); при  $f_s = 0.5$  для слоя  $j = 3$  (рис. 2, а, з), для слоя  $j = 4$  (рис. 2, б, д), для слоя  $j = 5$  (рис. 2, в, е), для слоя  $j = 67$  (рис. 1, в, е). Для нижнего граничного слоя  $j = 1$  наблюдается структура типа фрактальной эллиптической дислокации (рис. 1, а, з) как для реальной, так и мнимой частей комплексной функции смещения. Для верхнего граничного слоя  $j = 67$  характерным является отсутствие реальной части смещения  $\text{Re} u_1 = 0$  и ярко выраженное стохастическое поведение мнимой части (рис. 1, б, д). При переходе от слоя к слою в многослойной наносистеме происходит изменение структуры фрактальной дислокации (рис. 2). Так, для  $f_s = 0.5$  при  $j = 3$  область локализации структуры типа фрактальной дислокации является сжатой с ярко выраженным стохастическим поведением внутри этой области (рис. 2, а, з). При переходе через критическое значение от слоя  $j = 4$  (рис. 2, б, д) к слою  $j = 5$  (рис. 2, в, е) стохастическое поведение изменяется на регулярное поведение  $\text{Re} u_1$  (рис. 2, в) и стохастическое поведение с малыми амплитудами  $\text{Im} u_1$  в сжатой области (рис. 2, е). При дальнейшем увеличении  $j$  область локализации сжатого состояния начинает расширяться. Так для верхнего гранич-

ного слоя  $j = 67$  (рис. 1, в, е) наблюдается стохастическое поведение  $\text{Im}u_1$  (рис. 1, е) и регулярное поведение  $\text{Re}u_1$  (рис. 1, в) во всей области изменения  $n, m$ . Перестраивать структуру отдельного слоя можно также за счет изменения параметра  $f_s$ :  $f_s = 0$  (рис. 1, б, д),  $f_s = 0.5$  (рис. 1, в, е).

Отметим, что качественное поведение  $\text{Re}u_1$  согласуется с результатами из работы [5], однако наличие  $\text{Im}u_1$  является характерной особенностью в данной работе.

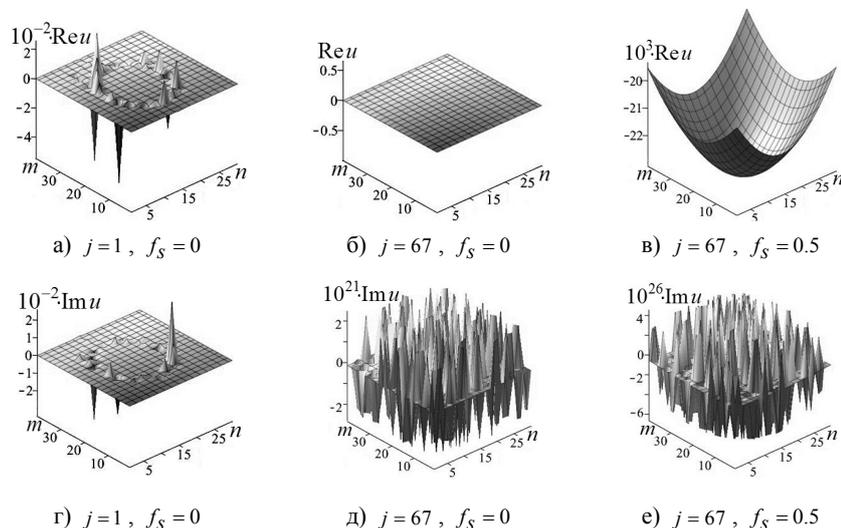


Рис. 1. Зависимости реальных (а–в) и мнимых (г–е) частей функции смещения  $u_1$  для ФЭП от решеточных индексов  $n, m$  для различных  $j$  и  $f_s$  при  $p'_3 = -0.3375$

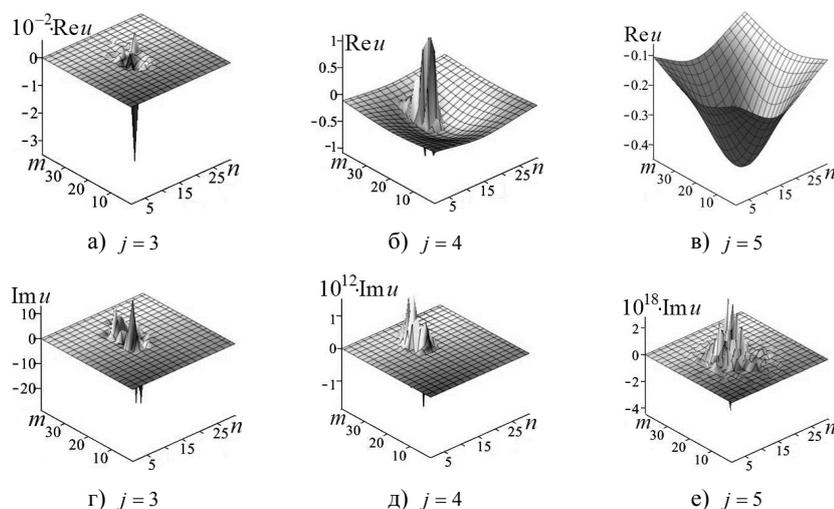


Рис. 2. Зависимости реальных (а–в) и мнимых (г–е) частей функции смещения  $u_1$  для ФЭП от решеточных индексов  $n, m$  для различных  $j$  при  $f_s = 0.5, p'_3 = -0.3375$

Влияние параметра  $f_s$  на поле смещений удобно проводить в терминах усредненных функций  $M$ . Дальнейшие результаты получены для измененного значения параметра  $p'_3 = -0.03375$ . На рис. 3–6 приведены зависимости  $M'$  и  $M''$  усредненных функций  $M$  из (16) от номера слоя  $j = \overline{1, 67}$  для различных значений  $f_s$  решений  $u_1, u_2$ . Элементы квадратной  $(N_2 \times N_2)$  матрицы  $\hat{M}$  из (16) являются случайными комплексными величинами. Эта матрица описывает «растянутые» состояния поля деформации узлов решетки по сравнению со «сжатыми» состояниями, которые описываются квадратной  $(N_1 \times N_1)$  матрицей  $\hat{M} = \hat{u}\hat{\rho}$ . В данном случае зависимости усредненных функций для «растянутых» и «сжатых» состояний практически совпадают, поэтому все нижеприведенные результаты описывают

«растянутые» состояния поля деформации узлов решетки (с характерными размерами  $L_2 \times L_2$  модельной наносистемы в плоскости). На зависимостях  $M'_1$  и  $M'_2$  при  $j = 23$  наблюдаются основные пики вверх (рис. 3, а, в – б, а, в). Увеличение параметра  $f_s$  приводит к появлению дополнительных пиков вблизи  $j = 23$ . Для  $u_1$  эти пики локализованы при  $j = 21$  (рис. 4, а) и  $j = 25$  (рис. 6, а). При превышении критического значения  $j > 30$  амплитуды усредненных функций  $M', M''$  практически приближаются к нулю. При  $j < 30$  зависимости являются стохастическими и существенно различаются.

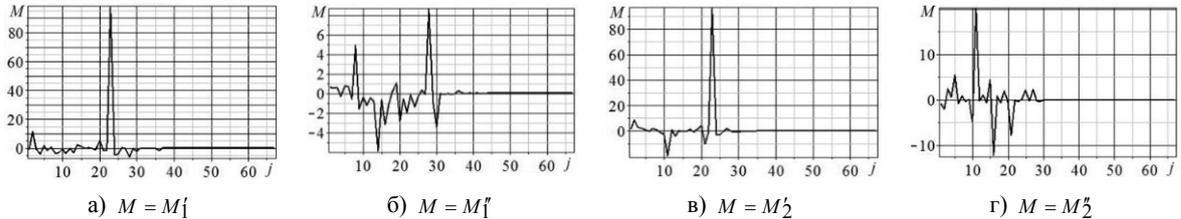


Рис. 3. Поведение функций  $M$  от  $j$  при  $f_s = 0$ ,  $\varphi_0 = \pi/4$ ,  $p'_3 = -0.03375$  для:  $u_1$  (а, б);  $u_2$  (в, г)

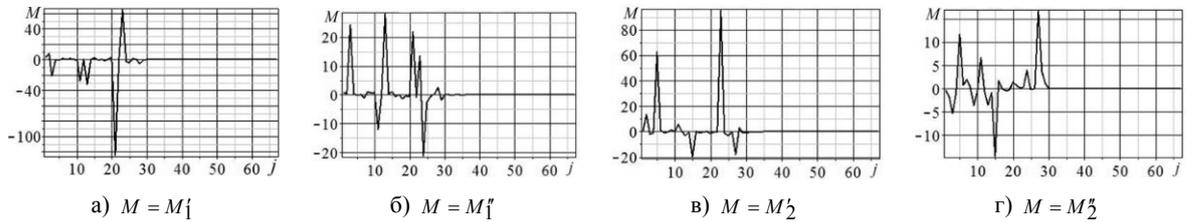


Рис. 4. Поведение функций  $M$  от  $j$  при  $f_s = 1/6$ ,  $\varphi_0 = \pi/6$ ,  $p'_3 = -0.03375$  для:  $u_1$  (а, б);  $u_2$  (в, г)

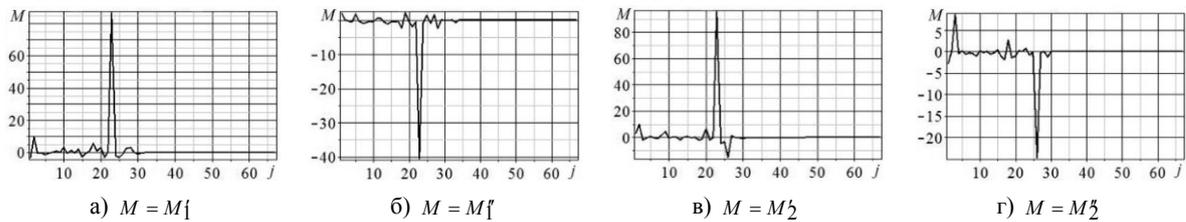


Рис. 5. Поведение функций  $M$  от  $j$  при  $f_s = 0.5$ ,  $\varphi_0 = 0$ ,  $p'_3 = -0.03375$  для:  $u_1$  (а, б);  $u_2$  (в, г)

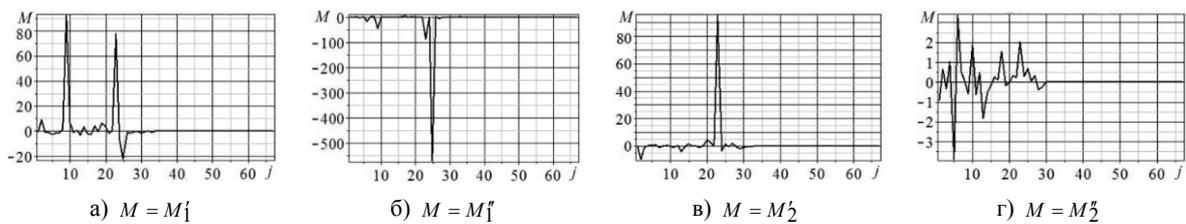


Рис. 6. Поведение функций  $M$  от  $j$  при  $f_s = 1$ ,  $\varphi_0 = -\pi/4$ ,  $p'_3 = -0.03375$  для:  $u_1$  (а, б);  $u_2$  (в, г)

Наличие характерных пиков на зависимостях усредненных функций  $M', M''$  от  $j$  дает возможность определить номер критического слоя  $j_k$ , в котором находятся критические точки (аттракторы). Дополнительную информацию можно получить для конкретного критического слоя из зависимостей указанных функций от  $f_s$ , как от параметра (рис. 3–6). Так, например, для смещения  $u_1$  на зависимостях  $M'_1$  при изменении  $f_s$  происходит изменение амплитуды основного пика при  $j_k = 23$  (рис. 3–6, а). Для значений  $f_s = 1/6$ ,  $\varphi_0 = \pi/6$  появляется ярко выраженный дополнительный пик вниз в критическом слое  $j_k = 21$  (рис. 4, а). При этом зависимости  $M''_1$  также имеют свои особенности поведения для слоя  $j_k = 23$  (рис. 3–6, б) и для слоя  $j_k = 21$  (рис. 4, б).

**Аттракторы и самоорганизация в объемной фрактальной структуре.** Поверхность ядра особых точек (аттракторов) из (12) для ФЭП без учета поворота системы координат  $Onmj$  ( $k_{1\theta} = 0$ ,  $u_{1\beta} = 0$ ,  $u_{1\theta} = 0$ ) приведена на рис. 7, а. При этом зависимость  $j$  от узлов решетки  $n, m$  представляет собой поверхность эллиптического параболоида выпуклостью вверх. Вершина параболоида находится вблизи узла объемной решетки с координатами  $(n, m, j) = (n_0, m_0, j_k) = (14, 19, 30)$ . Поверхность является гладкой во всей области изменения  $n, m$ . При этом ядро эллиптической дислокации из (13) для конкретных значений  $j_k$  дано на рис. 7, б, в, г. Выбор таких критических слоев определен на основе анализа поведения усредненных функций из рис. 3–6. Так для слоя  $j_k = 9$  (рис. 7, б) значения полуосей  $n'_c = 7.9792$ ,  $m'_c = 12.3986$  и  $\chi_k = 0.8418$ . Для слоя  $j_k = 23$  (рис. 7, в) значения полуосей  $n'_c = 4.6055$ ,  $m'_c = 7.1563$  и  $\chi_k = 0.4858$ . Для слоя  $j_k = 29$  (рис. 7, г) значения полуосей  $n'_c = 1.7363$ ,  $m'_c = 2.6980$  и  $\chi_k = 0.1832$ . Анализ результатов показывает, что положение центра ядра эллиптической дислокации  $(n_0, m_0)$  не меняется при переходе от одного критического слоя к другому. Однако размеры полуосей эллипсов уменьшаются при увеличении номера слоя  $j_k$ . Форма ядра эллиптической дислокации для  $j_k = 29$  становится близкой к структуре гексагонального типа (рис. 7, г).

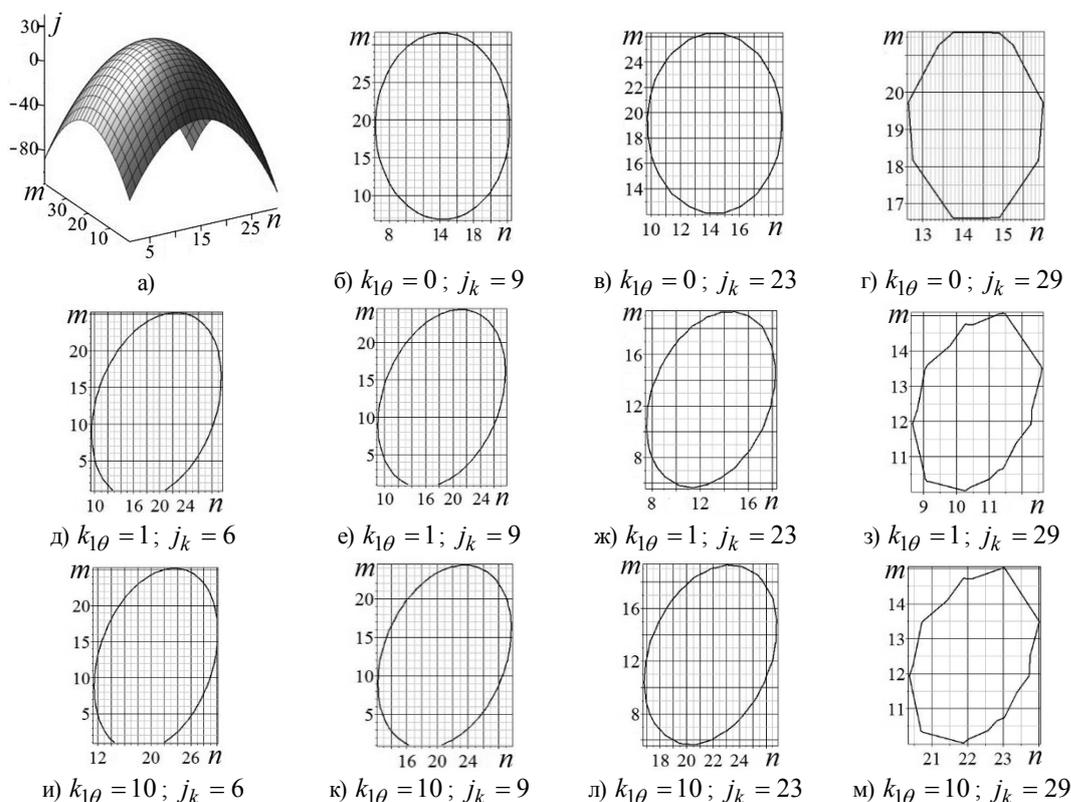


Рис. 7. Поверхность (а) и линии (б, в, г) ядра особых точек ФЭП для различных  $j_k$  без поворота  $k_{1\theta} = u_{1\theta} = u_{1\beta} = 0$ ; линии ядра особых точек с поворотом при  $u_{1\theta} = 0.37941$ ,  $u_{1\beta} = 0.37941$ :  $k_{1\theta} = 1$  (д-з),  $k_{1\theta} = 10$  (и-м)

Исследуем влияние поворота системы координат на ядро дислокации. В качестве примера рассмотрим поведение ядра дислокации при выборе параметров поворота  $u_{1\beta} = 0.37941$ ,  $u_{1\theta} = 0.37941$  и двух значениях  $k_{1\theta} = 1$  (рис. 7, д-з),  $k_{1\theta} = 10$  (рис. 7, и-м). При этом изменяются значения положений центра ядра дислокации  $(n'_0, m'_0)$  по отношению к  $(n_0, m_0)$ . Так при  $k_{1\theta} = 1$  для слоя  $j_k = 6$  (рис. 7, д)  $n'_0 = 12.3071$ ,  $m'_0 = 18.3446$ ,  $n'_c = 8.5303$ ,  $m'_c = 13.2549$  и  $\chi_k = 0.8999$ . Для слоя  $j_k = 9$  (рис. 7, е) значения полуосей  $n'_0 = 11.2974$ ,  $m'_0 = 17.9433$ . Для слоя  $j_k = 23$  (рис. 7, ж) значения полуосей  $n'_0 = 6.5851$ ,  $m'_0 = 16.0707$ . Для слоя  $j_k = 29$  (рис. 7, з) значения полуосей  $n'_0 = 4.5655$ ,  $m'_0 = 15.2681$ .

При  $k_{1\theta} = 10$  для слоя  $j_k = 6$  (рис. 7, *у*)  $n'_0 = 14.6614$ ,  $m'_0 = 19.2805$ . Для слоя  $j_k = 9$  (рис. 7, *к*) значения полюсов  $n'_0 = 14.8288$ ,  $m'_0 = 19.3473$ . Для слоя  $j_k = 23$  (рис. 7, *л*) значения полюсов  $n'_0 = 15.6098$ ,  $m'_0 = 19.6586$ . Для слоя  $j_k = 29$  (рис. 7, *м*) значения полюсов  $n'_0 = 15.9445$ ,  $m'_0 = 19.7921$ .

Для варианта с  $k_{1\theta} = 1$  при увеличении  $j_k$  положение центра  $(n'_0, m'_0)$  смещается влево – вниз по отношению к  $(n_0, m_0)$ : значения  $n'_0, m'_0$  уменьшаются по сравнению с  $n_0, m_0$  с различной скоростью вдоль осей  $On$ ,  $Om$ , соответственно. Для варианта с  $k_{1\theta} = 10$  при увеличении  $j_k$  положение центра  $(n'_0, m'_0)$  смещается вправо – вверх по отношению к  $(n_0, m_0)$ : значения  $n'_0, m'_0$  увеличиваются по сравнению с  $n_0, m_0$  с меньшими значениями скоростей (по сравнению с вариантом  $k_{1\theta} = 1$ ) вдоль осей  $On$ ,  $Om$ , соответственно. Ядро эллиптической дислокации (рис. 7, *д–м*) является повернутым на некоторый угол по сравнению с рис. 7, *б–з*. При этом форма эллипса существенно изменяется: появляются особенности типа разрывов (рис. 7, *д, е, и, к*), угловых точек с изменяющейся кривизной линией между ними (рис. 7, *з, м*).

Если параметры  $k_{1\theta}$ ,  $u_{1\theta}$ ,  $u_{1\beta}$  являются переменными, то следует ожидать изменения областей локализации особых точек (аттракторов) в объемной структуре многослойной наносистемы с ФЭП. Такие изменения могут возникать в процессе итерационной процедуры. Сам стохастический процесс при этом можно понимать как процесс самоорганизации. Для итерационного процесса по индексу  $m$  при переменном параметре  $k_{1\theta} = k_u$  из (4) и  $u' = 0.37941$  были реализованы следующие схемы: 1)  $u_{1\theta} = u$ ,  $u_{1\beta} = 0$ ; 2)  $u_{1\theta} = u$ ,  $u_{1\beta} = u'$ ; 3)  $u_{1\theta} = u'$ ,  $u_{1\beta} = u$ . Для смещения  $u_1$  при  $f_s = 0$  поведения реальных  $M'_1$  и мнимых  $M''_1$  частей усредненных функций  $M_1$  от  $j$  приведены на рис. 8, *а, з* (схема 1), рис. 8, *б, д* (схема 2), рис. 8, *в, е* (схема 3). Из этих рисунков видно, что существует критический слой  $j_k = 30$ , при переходе через который стохастическое поведение комплексной функции  $M_1$  изменяется на практически регулярное поведение. Существование такого критического слоя согласуется с критическим значением  $j_k = 29$  для ядра особых точек ФЭП (рис. 7) и поведением  $M_1$  (рис. 3, *а, б*) при  $j > 30$ . Однако учет самоорганизации для всех выбранных схем приводит к тому, что основной пик при  $j = 23$  практически исчезает по сравнению с рис. 3, *а, б*. Амплитуды пиков для всех схем существенно меньше амплитуд пиков из рис. 3. Основные пики при  $j_k = 23$  (рис. 3–6) могут выступать как элементы пространственной памяти. Включение процессов самоорганизации приводит к исчезновению основного пика (эффекту стирания пространственной памяти).

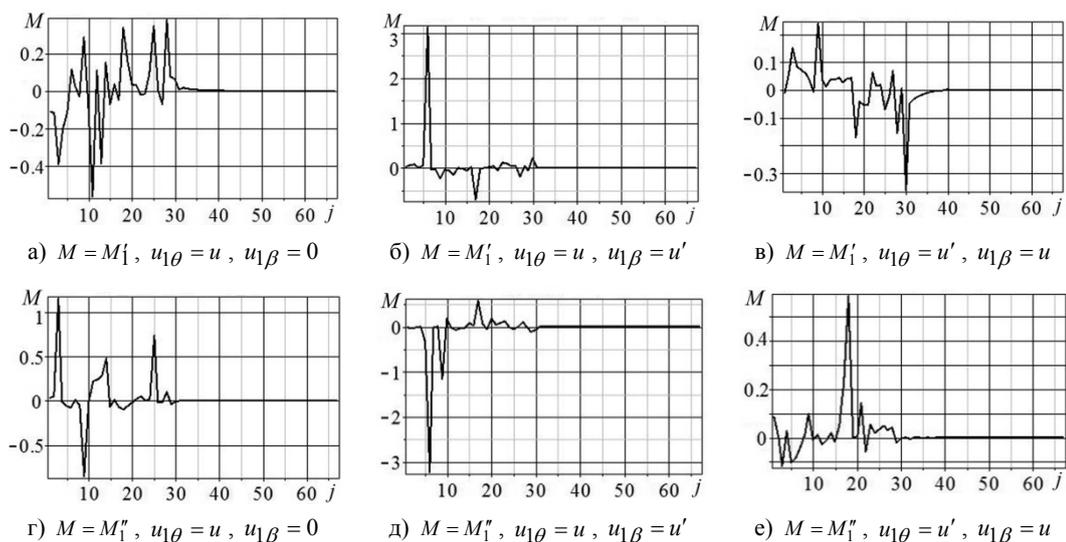


Рис. 8. Поведение функций  $M$  от  $j$  при  $f_s = 0$ ,  $\varphi_0 = \pi / 4$ ,  $p'_0 = 1.0123$ ,  $p'_3 = -0.03375$ ,  $k_{1\theta} = k_u$  для  $u_1$  при различных  $u_{1\theta}$ ,  $u_{1\beta}$ ,  $u' = 0.37941$

**Выводы.** Показано, что в многослойной наносистеме с объемной структурой типа ФЭП переменные параметры  $k_u$ ,  $u_0$  приводят к появлению комплексных функций смещения узлов решетки. При пе-

реходе от слоя к слою происходит изменение фрактальной объемной структуры. Из анализа зависимостей реальных частей усредненных функций от  $j$ ,  $f_s$  установлено наличие основных пиков для слоя с  $j = 23$ , слоя с некоторым критическим значением  $j$  вблизи 30. Мнимые части у усредненных функций несут информацию о наличии эффективного затухания.

Поверхность ядра особых точек (аттракторов) для ФЭП представляет собой поверхность эллиптического параболоида. При пересечении этой поверхности с плоскостью критического слоя  $j_k$  возникает линия особых точек – эллиптическая дислокация. При переходе к слоям с другими  $j_k$  происходит изменение параметров полуосей эллипса. Форма ядра эллиптической дислокации для  $j_k = 29$  становится близкой к структуре гексагонального типа. Поворот системы координат приводит к повороту самого эллипса и смещению его центра тяжести. Включение процессов самоорганизации приводит к эффекту затухания основных пиков и подтверждает наличие основного критического слоя  $j_k = 30$ .

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Шпак А. Н. Кластерные и наноструктурные материалы. Т. 1 / А. Н. Шпак, Ю. А. Куницкий, В. Л. Карбовский. – К.: Издательский дом «Академперіодика», 2001. – 588 с.
2. Абрамов В. С. Переходные процессы в модельной наносистеме с фрактальной квантовой точкой / В. С. Абрамов // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А: Природн. науки. – 2014. – № 1. – С. 116–123.
3. Abramov V. S. Model of Nonlinear Fractal Oscillator in Nanosystem / V. S. Abramov // In book Applied Non-Linear Dynamical Systems (Editor: Jan Awrejcewicz). – Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, 2014. – Vol. 93 – P. 337–350.
4. Abramova O. P. Fractal nanotraps based on quasi-two-dimensional fractal structures / O. P. Abramova, S. V. Abramov // Dynamical Systems Theory (Editors J. Awrejcewicz et al.) DSTA 2013 (Poland, Lodz, December 2-5, 2013). – 2013. – P. 71–80.
5. Абрамова О. П. Фрактальные объемные структуры в многослойной наносистеме / О. П. Абрамова, С. В. Абрамов // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А: Природн. науки. – 2014. – № 1. – С. 7–13.
6. Abramova O. P. Governance of Alteration of the Deformation Field States of Fractal Volumetric Structures in a Multilayer Nanosystem / O. P. Abramova, S. V. Abramov // Proceedings of the 7th Chaotic Modeling and Simulation International Conference (Lisbon, Portugal: 7-10 June, 2014). Published by: ISAST (Editor: Christos H Skiadas). – 2014. – P. 11–21.
7. Heyman K. The Map in the Brain: Grid Cells May Help Us Navigate / K. Heyman // Science. – 2006. – Vol. 312. – P. 680–681.
8. Spatial representation in the entorhinal cortex / M. Fyhn, S. Molden, M. P. Witter, E.I. Moser // Science. – 2004. – Vol. 305. – P. 1258–1264.
9. Microstructure of spatial map in the entorhinal cortex / T. Hafting, M. Fyhn, S. Molden, M.-B. Moser // Nature. – 2005. – Vol. 436. – P. 801–806.
10. Conjunctive representation of position, direction, and velocity in the entorhinal cortex / F. Sargolini, M. Fyhn, T. Hafting et al. // Science. – 2006. – Vol. 312. – P. 758–762.
11. Гинзберг Д. М. Физические свойства высокотемпературных сверхпроводников / Д. М. Гинзберг, М. Б. Саламон, А. П. Малоземофф. – М.: Мир, 1990. – 543 с.

Поступила в редакцию 28.05.2014 г.

## РЕЗЮМЕ

Досліджено поле деформації у багатошаровій наносистемі з об'ємною структурою типу фрактального еліптичного параболоїда. В процесі ітераційної процедури виникають змінні параметри. Вони призводять до появи комплексних функцій зміщення вузлів решітки і дозволяють врахувати всередині і міжплощинні змінні взаємодії. Проведено аналіз усереднених функцій, виявлено наявність шарів з критичними значеннями параметрів. Показано, що при перетині поверхні еліптичного параболоїда критичної площиною утворюється лінія особливих точок (аттракторів) поля деформації – еліптична дислокація. Процес самоорганізації призводить до ефектів повороту, зміщення центру ваги, зміни полуосей еліптичної дислокації.

*Ключові слова:* фрактальна об'ємна структура, змінні параметри, комплексні функції зміщення, аттрактори, самоорганізація, багатошарова наносистема.

## SUMMARY

The deformation field in the multilayer nanosystem with a bulk structure of the type of the fractal elliptical paraboloid has been investigated. During the iteration procedure variable parameters arise. They lead to the appearance of the complex displacement functions of the lattice nodes and allow to take into account inside and interplanar variables of interactions. The analysis of the average functions is performed, the presence of layers with critical values of the parameters is founded. It is shown that when crossing the surface of the elliptical paraboloid critical planes formed a line of singular points (attractors) of the deformation field - elliptical dislocation. The process of self-organization leads to the effects of rotation, shift the center of gravity, change the semi-axes of the elliptical dislocation.

*Keywords:* fractal volumetric structures, variable parameters, complex displacement functions, alteration of the structure, attractors, self-organization, multilayer nanosystem.