



## МЕТОДИКА ВИЩОЇ ОСВІТИ

УДК 514.18 (076.6)

Стеблянко В.Г., канд. техн. наук, доц.,  
Жданов І.В., канд. техн. наук

Донецький національний університет економіки і торгівлі імені Михайла Туган-Барановського, м. Донецьк, Україна,  
e-mail: engineer@kaf.donduet.edu.ua

### КЛАСИФІКАЦІЯ І РОЗВ'ЯЗАННЯ КОНСТРУКТИВНИХ ПЛОЩИННИХ ЗАДАЧ З НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Steblianko V.G., Cand. Sc. (Tech.),  
Assoc. Prof.,  
Zhdanov I.V., Cand. Sc. (Tech.)

Donetsk National University of Economics and Trade named after Mykhayilo Tugan-Baranovsky, Donetsk, Ukraine,  
e-mail: engineer@kaf.donduet.edu.ua

### CLASSIFICATION AND CONSTRUCTIVE SOLUTION OF PLANE TASKS IN DESCRIPTIVE GEOMETRY

**Мета статті** – виконання наочних зображень, що пояснюють зміст геометричних властивостей, закладених у самому зв'язку між даними і шуканими елементами простору, які використовуються для розв'язання конструктивних задач.

**Методика.** Для побудови наочних зображень зв'язків між даними і шуканими елементами простору використовувались команди 3D моделювання системи КОМПАС. Розв'язання конструктивної задачі включає, як правило, два етапи: аналіз і побудову. Мета аналізу – встановлення залежностей між заданими та шуканими фігурами і складання плану побудов. Ідея аналізу – розділення умови задачі на частини з їх незалежним (спочатку) і спільним (наприкінці) розглядом; реалізується шляхом визначення нескінченних множин фігур, що відповідають окремим зв'язкам. Шукана фігура є перетином цих множин. Для нетривіальних зв'язків наведено поетапний план побудови, приводяться приклади розв'язання задач з використанням таких зв'язків.

**Результати.** Розглянуто вісім зв'язків, з яких у різних сполученнях складаються умови елементарних площинних задач. Детальніше розглянуто нетривіальний зв'язок, в якому шукана площина рівнонахилена до заданої прямої і площини. Розглянуто приклад з використанням цього зв'язку і поетапним розв'язанням задачі.

**Наукова новизна.** Виконано геометричне моделювання множин елементів простору, за допомогою яких розв'язувались конструктивні задачі. Побудовані у системі КОМПАС 3D моделі дають можливість зрозуміти геометричну сутність зв'язку між заданою і побудованою фігурами.

**Практична значущість.** Матеріал статті може бути використаний для роботи в наукових студентських гуртках і під час підготовки до олімпіад з нарисної геометрії.

**Ключові слова:** елементи простору, точкові завдання, лінійчасті задачі, площинні задачі, сфера, циліндрична поверхня, конічна поверхня, дотична площина.

**Постанова проблеми у загальному вигляді та зв'язок із найважливішими науковими чи практичними завданнями.** Ця стаття є продовженням робіт [2; 6], в яких розглянуто класифікацію і розв'язання конструктивних точкових і лінійчастих за-



дач з нарисної геометрії. Зокрема зазначалось, що актуальність роботи обумовлена тим, що серед навчальних посібників і спеціальних досліджень, пов'язаних з методикою розв'язання задач з нарисної геометрії, більшість присвячена так званим позиційним і метричним задачам [1; 3-5], під якими зазвичай розуміються задачі на розташування і вимірювання. У цих публікаціях наведено алгоритми їхнього розв'язання, розглянуто геометричні та методологічні особливості. У той час, як позиційним і метричним задачам присвячена велика кількість навчальної і спеціальної літератури, конструктивним задачам, які пов'язані з побудовою геометричних фігур, що відповідають певним умовам, приділено значно менше уваги.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** У літературі минулих років для розв'язання конструктивних задач використовуються відомості про множину елементів простору, геометрію  $m$ -площин, зокрема лінійчасту геометрію (конгруенції, комплекси), проєктивні перетворення, нетривіальну варіацію епюра Монжа. Однак ці розділи геометрії не входять у традиційний курс нарисної геометрії, що викликає у студентів труднощі в розумінні геометричної сутності зв'язків, які використовуються для розв'язання конструктивних задач.

**Метою статті** є виконання наочних зображень, що пояснюють зміст геометричних властивостей, закладених у самому зв'язку між даними і шуканими елементами простору.

Для нетривіальних зв'язків наведено поетапний план побудови, приводяться приклади розв'язання задач з використанням таких зв'язків.

**Виклад основного матеріалу дослідження.** Конструктивна задача у загальному вигляді формулюється таким чином.

Задані фігури  $\Phi_1 \dots \Phi_n$ . Побудувати фігуру  $\Theta$ , пов'язану з  $\Phi_1 \dots \Phi_n$ , деякими вимогами (умовами).

Розв'язання конструктивної задачі включає, як правило, чотири етапи: аналіз, побудову, доказ і дослідження.

Мета аналізу – встановлення залежностей між заданими та шуканими фігурами і складання плану побудов. Ідея аналізу – розділення умови задачі на частині з їхнім незалежним (спочатку) і спільним (наприкінці) розглядом; реалізовується шляхом визначення нескінченних множин фігур, що відповідають окремим зв'язкам. Шукана фігура є перетином цих множин.

Розглянемо деяку підмножину конструктивних задач, особливість яких полягає в тому, що шукана і задана фігури є елементами простору. Усі задачі, що нас цікавлять, формулюються так.

Задані елементи простору  $\Phi_1 \dots \Phi_n$ . Побудувати елемент простору  $\Theta$ , пов'язаний з  $\Phi_1 \dots \Phi_n$  заданими ненульовими відстанями (відношеннями відстаней) або кутами (відношеннями кутів).

Залежно від розмірності шуканого елемента  $\Phi$  задачі називаються точковими (шукане – точка), лінійчастими (шукане – пряма лінія) і площинними (шукане – площина).

Кожному зв'язку відповідатиме певна геометрична множина (поверхня, зокрема площина) із властивістю, закладеною у самому зв'язку. У роботі розглядаються тільки площинні задачі.

Існує вісім зв'язків, з яких у різних сполученнях складаються умови елементарних площинних завдань.

1. Зв'язку  $A_i\beta = R_i$  (відстань між заданою точкою  $A_i$  і шуканою площиною  $\beta$  дорівнює  $R_i$ ) відповідає множина площин, дотичних до сфери із центром  $A_i$  і радіусом  $R_i$  – рисунок 1.



2. Зв'язку  $a_i\beta = r_i$  (відстань між заданою прямою  $a_i$  і шуканою площиною  $\beta$  дорівнює  $r_i$ ) відповідає множина площин, дотичних до циліндра обертання з віссю  $a_i$  і радіусом  $r_i$  – рисунок 2.

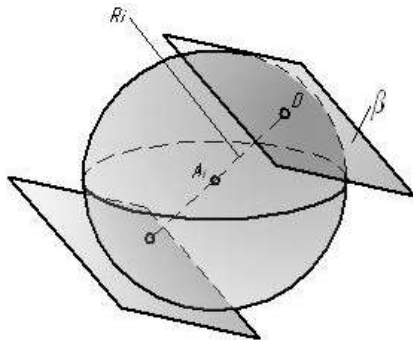


Рисунок 1 – Множина площин, дотичних до сфери

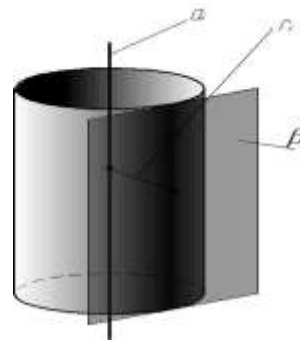


Рисунок 2 – Множина площин, дотичних до циліндра

3. Зв'язку  $a_i\beta = \varphi$  (кут між заданою прямою  $a_i$  і шуканою площиною  $\beta$  дорівнює  $\varphi$ ) відповідає множина площин, паралельних конусу обертання  $x$  з віссю  $a_i$  і кутом  $\varphi$  між твірною і віссю – рисунок 3.

4. Зв'язку  $\alpha_i\beta = \gamma$  (кут між заданою площиною  $\alpha_i$  і шуканою площиною  $\beta$  дорівнює  $\gamma$ ) відповідає множина площин, паралельних конусу обертання з віссю, що перпендикулярна до площини  $\alpha_i$ , і кутом  $90^\circ - \gamma$  між твірною і віссю – рисунок 4.

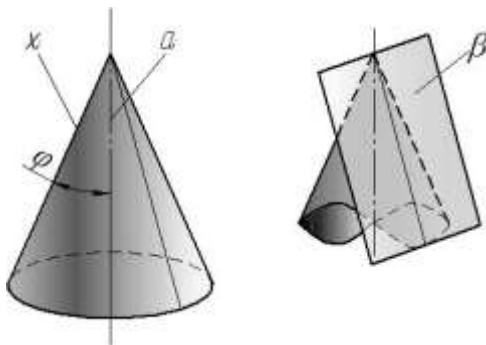


Рисунок 3 – Множина площин, паралельних конусу обертання з віссю  $a_i$  і кутом  $\varphi$  між твірною і віссю

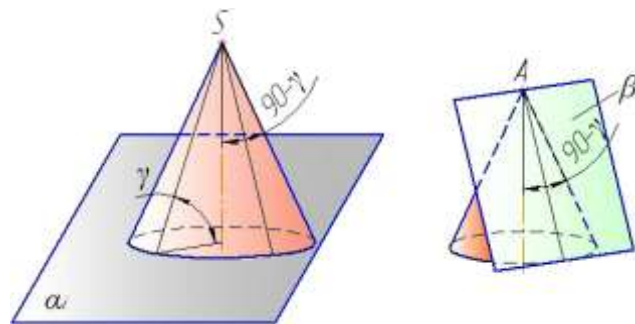


Рисунок 4 – Множина площин, паралельних конусу обертання з віссю, перпендикулярною до площини  $\alpha_i$ , і кутом  $90^\circ - \gamma$  між твірною і віссю

5. Зв'язку  $A_1\beta = A_2\beta$  (шукана площина  $\beta$  рівновіддалена від заданих точок  $A_1, A_2$ ) відповідає множина площин, що проходять через середину відрізка  $A_1A_2$  – рисунок 5.

6. Зв'язку  $a_i\beta = \alpha_i\beta$  (шукана площина  $\beta$  рівнонахилена до заданих прямих  $a_1, a_2$ ) відповідає множина площин, паралельних бісектрисі  $m_1$ , і площинам, паралельним бісектрисі  $m_2$  кутів, утворених прямими, що перетинаються  $b_1 \parallel a_1$  і  $b_2 \parallel a_2$  – рисунок 6.

7. Зв'язку  $a_i\beta = \alpha_i\beta$  (шукана площина  $\beta$  рівнонахилена до заданих прямої  $a_i$  і площини  $\alpha_i$ ) відповідає множина площин, паралельних конусу 2-го порядку з вершиною  $S$  на бісектрисі  $l$  кута між прямою  $a$  і її проекцією на площину  $\alpha$  і напрямним колом  $k$  – рисунок 7. Діаметр напрямного кола  $k$  дорівнює відрізку  $LK$ . Пряма  $a$ , бісектриса  $l$  (є однією з твірних конуса), діаметрально протилежна твірна  $SK$ , що перпендикулярна бісектрисі  $l$ , знаходяться в одній площині.

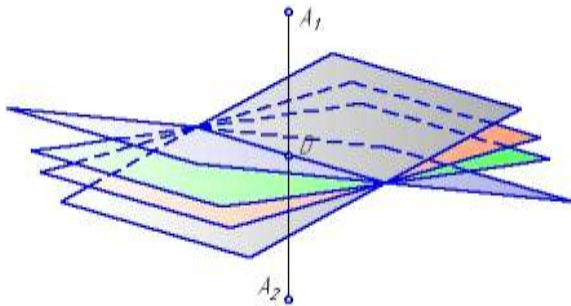


Рисунок 5 – Множина площин, що проходять через середину відрізка  $A_1 A_2$

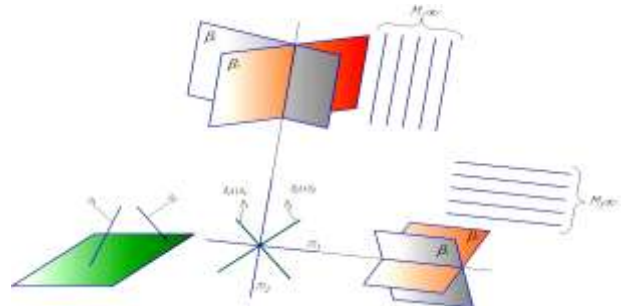


Рисунок 6 – Множина площин, паралельних прямим  $a_1$  і  $a_2$

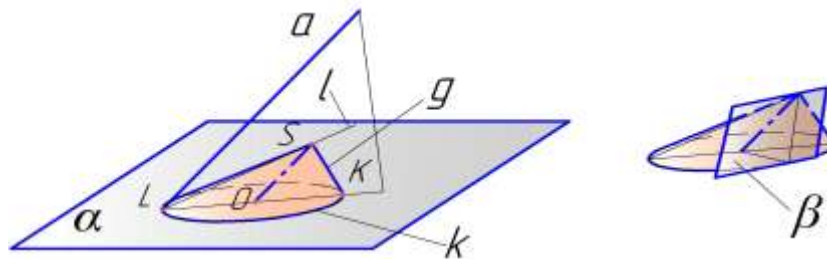


Рисунок 7 – Множина площин, паралельних конусу другого порядку з вершиною  $S$  на бісектрисі кута між площиною  $\alpha$  і прямою  $a$

Розглянемо більш детально геометричну сутність цього зв'язку. Для цього розташуємо пряму  $a$  паралельно фронтальній площині проєкцій, а площину  $\alpha$  – паралельно горизонтальній площині проєкцій. Тоді фронтальна проєкція площини  $\alpha$  і пряма  $a$  утворюють кут з вершиною  $L$  – рисунок 8а. Проводимо бісектрису  $l$ , на якій приймаємо довільну точку  $S$ . Через точку  $S$  проводимо пряму  $FK$  перпендикулярно прямій  $l$ . Конус  $q$  буде мати вигляд прямокутного трикутника  $LSK$ . З рисунка видно, що трикутник  $KLK$  – рівнобічний з основою  $FK$ , тому трикутник  $LOS$  також буде рівнобічним. Тоді  $SO = OL$ .  $OL$  є радіусом напрямного кола основи конуса. Тому вісь конуса  $SO$  також буде рівнятися радіусу. Із цього можна зробити висновок: довільна твірна конуса  $q$  буде нахилена під однаковими кутами до радіуса основи конуса і до його осі  $SO$  – рисунок 8б.

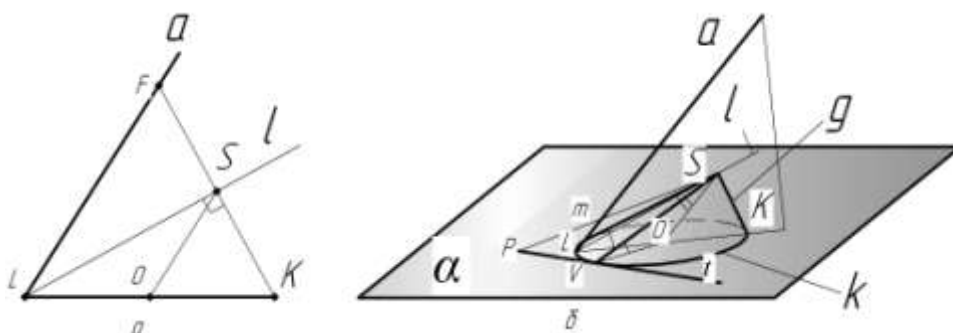


Рисунок 8 – Схема визначення кутів нахилу твірної конуса

8. Зв'язку  $\alpha_1\beta = \alpha_2\beta$  (шукана площина  $\beta$  рівнонахилена до заданих площин  $\alpha_1$  і  $\alpha_2$ ) відповідає множина площин, які складаються із двох зв'язків, що мають відповідно центри в невластних точках прямих  $n_1$  і  $n_2$ .



Прямі  $n_1$  і  $n_2$  є бісектрисами лінійних двогранних кутів, утворених площинами  $\alpha_1$  і  $\alpha_2$  – рисунок 9.

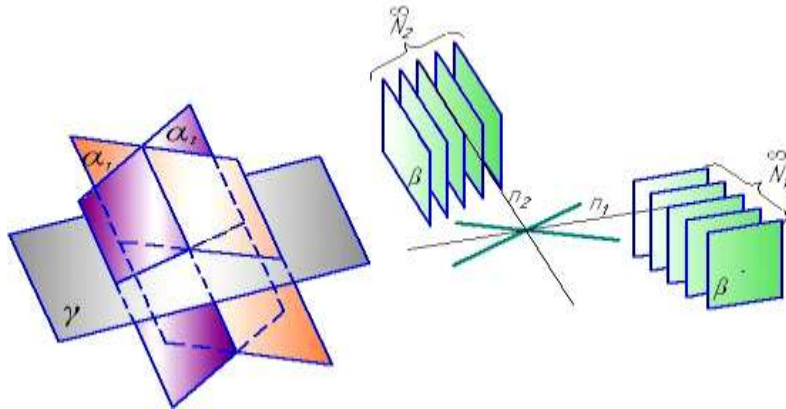


Рисунок 9 – Множина площин, рівнонахилених до площин  $\alpha_1$  і  $\alpha_2$

Приклад. Побудувати площину  $\chi$ , рівновіддалену від точок  $A, B, C$  та рівнонахилену до прямої  $a$  і площини  $\alpha$  – рисунок 10а.

Аналіз. Нехай  $m$  – пряма, що проходить через вершину  $S$  і паралельна прямій  $u$ , що проходить через середину відрізків  $BA$  і  $BC$  – рисунок 10б, а  $\tau$  – площина, що проходить через  $m$  і дотичну до конуса  $q$ . Шукана площина  $\chi$  проходить через пряму  $u$  і паралельна площині  $\tau$  – рисунок 10в.

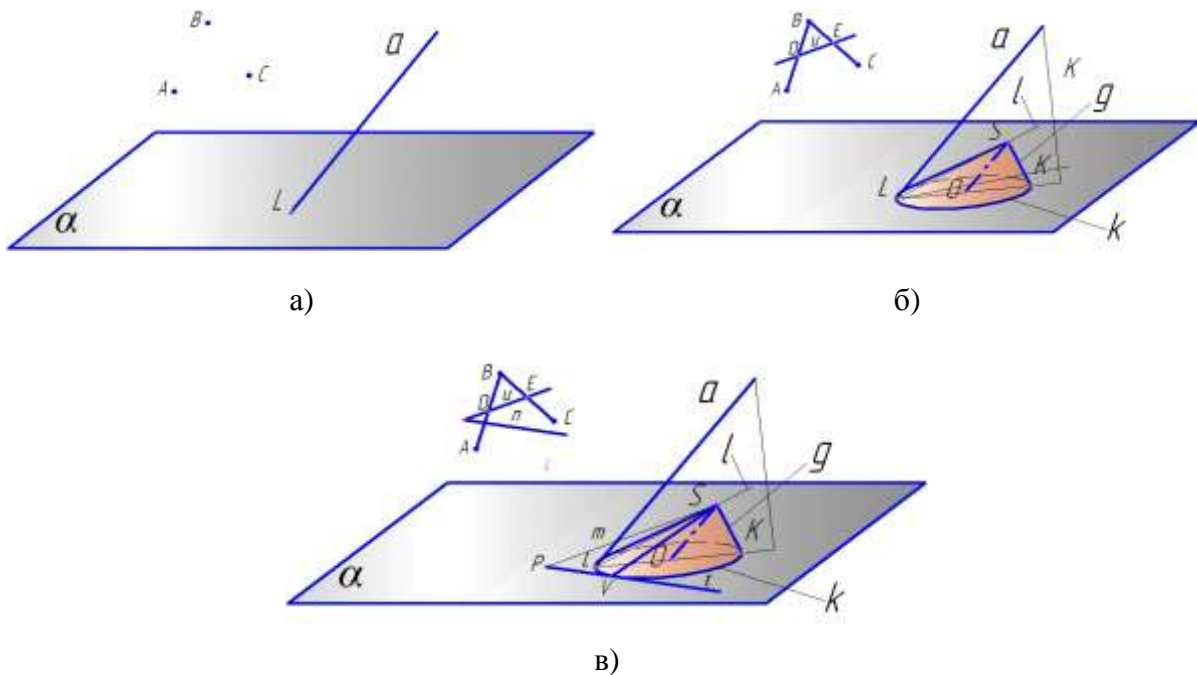


Рисунок 10 – Наочне зображення послідовності розв’язання задачі

Побудова. Площина  $\alpha$  задана двома прямими  $b$  і  $c$ , що перетинаються в точці  $H$  – рисунок 11.

Для реалізації аналізу і, зокрема, побудови площини необхідно від початкової системи площин проєкцій  $\Pi_1$ - $\Pi_2$  перейти до такої  $\Pi_i$ - $\Pi_j$ , де  $\alpha \perp \Pi_i$  і  $a \parallel \Pi_j$ .



- Із цією метою послідовно побудовані:
- проєкції прямої  $u$ , що проходить через середини відрізків  $AB$  і  $BC$ ;
  - проєкції  $h_1, h_2$  горизонталі  $h$  площині  $\alpha$ ;
  - проєкції горизонталі  $h$ , площини  $\alpha$ , прямої  $a$  і прямої  $u$  на площині проєкцій  $\Pi_3$ , перпендикулярної до площині проєкцій  $\Pi_1$  і горизонталі  $h$ , а отже, і до площини  $\alpha$ ;
  - проєкції прямих  $a, u$  на площині проєкцій  $\Pi_4$ , яка зливається з площиною  $\alpha$ ;
  - проєкції прямих  $a, u$  на площині проєкцій  $\Pi_5$ , перпендикулярної до  $\Pi_4$  і паралельної прямої  $a$ .

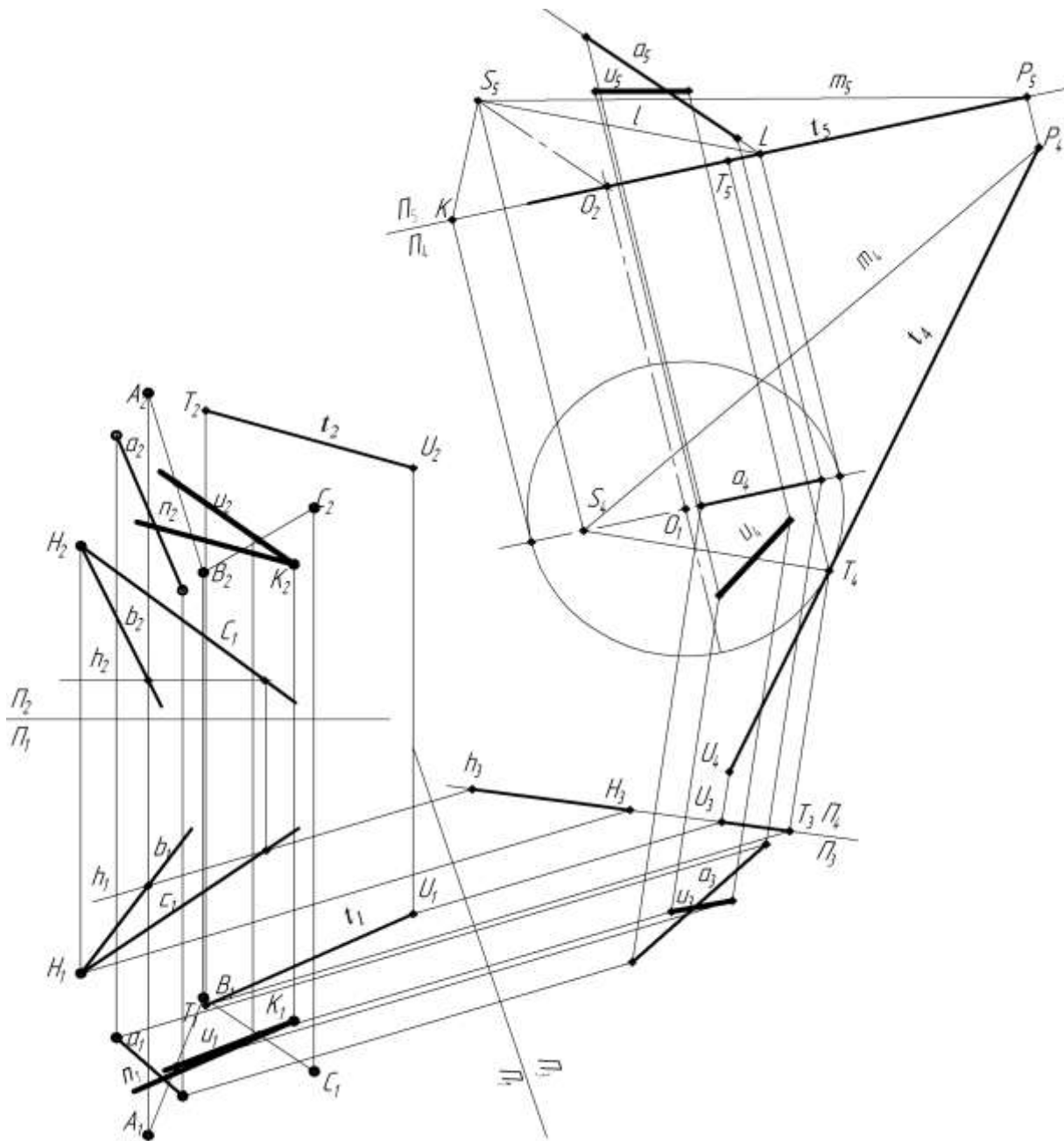


Рисунок 11 – Розв’язання задачі у проєкціях

Таким чином, у системі площин проєкцій  $\Pi_4$ - $\Pi_5$  площина  $\alpha \equiv \Pi_4$  – проєкціююча, а пряма  $a$  – паралельна площині проєкцій  $\Pi_5$ .



- Для побудови конуса  $q$  в системі  $\Pi_4$ - $\Pi_5$  послідовно будуємо:
- бісектрису  $l$  кута, утвореного прямими  $a_5$  і  $\Pi_4 / \Pi_5$ ;
  - через довільну точку  $S$  на бісектрисі  $l_5$  проводимо лінію перпендикулярно  $l_5$  до перетину з віссю  $\Pi_4 / \Pi_5$ . Ці лінії і визначатимуть проекцію конуса на площину  $\Pi_5$ ;
  - визначаємо положення центра кола конуса і будуємо його проекцію на площину  $\Pi_4$ ;
  - проекції  $m_5, m_4$  прямої  $m$ , що проходить через вершину  $S$  конуса і паралельно прямій  $u$  ( $u_5$ );
  - проекції  $S_5, S_4$  сліду  $S$  прямої  $m$  на площину  $\Pi_4$ ;
  - дотичну  $t_4$  до кола основи конуса на  $\Pi_4$ , що проходить через точку  $S_4$ .

Прямі  $m$  і  $t$ , що перетинаються у точці  $S$ , визначають площину  $\chi$ , яка дотична до конуса і, відповідно, рівнонахилена до прямої  $a$  і площини  $\alpha$ .

Зворотним перетворенням епіюра послідовно находимо проекції  $t_3, t_1, t_2$  дотичної  $t$  на площинах проєкцій  $\Pi_3, \Pi_1$  і  $\Pi_2$ . У початковій системі  $\Pi_1$ - $\Pi_2$  через довільну точку  $K$  прямої  $u$  проводимо пряму  $n \parallel t$ .

Матеріал статті може бути використаний на практичних заняттях, а також для роботи в наукових студентських гуртках і для підготовки до олімпіад з нарисної геометрії.

#### Список літератури / References:

1. Гордон В.О. Сборник задач по курсу начертательной геометрии / В.О. Гордон, Ю.Б. Иванов, Т.Е. Солнцева. – М.: Высш. шк., 2000. – 292 с.  
Gordon, V.O., Ivanov, Yu.B. and Solntseva T.Ye. (2000), *Sbornik zadach po kursu nachertatelnoi geometrii* [Tasks in course of descriptive geometry], Visshaia shkola, Moscow, Russia, 292 p.
2. Коваль П.А. Классификация и решение некоторых линейчатых конструктивных задач начертательной геометрии / П.А. Коваль, В.Г. Стебляноко, И.В. Жданов // Графика XXI века: сб. тез. докл. XIII Междунар. студ. научн.-техн. конф., г. Севастополь, 4-8 октября 2010 г. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2010 – С. 33-36.  
Koval, P.A., Steblianko V.G., and Zhdanov, I.V. (2010), “Classification and solution of certain linear constructive tasks of descriptive geometry”. *Proc. XIII Int. Stud. Science and Technol. Conf. “Graphics of the 21st century”*, Sevastopol, Ukraine, pp. 33-36.
3. Локтев О.В. Задачник по начертательной геометрии / О.В. Локтев, П.А. Числов. – М.: Высш. шк., 1999. – 104 с.  
Loktiev, O.V. and Chislov, P.A. (1999), *Zadachnik po nachertatelnoi geometrii* [Task book on descriptive geometry], Visshaia shkola, Moscow, Russia, 104 p.
4. Пеклич В.А. Задачи по начертательной геометрии / В.А. Пеклич, С.Н. Павленко. – М.: Высш. шк., 1999. – 139 с.  
Pieklich, V.A. and Pavlienko, S.N. (1999), *Zadachnik po nachertatelnoi geometrii* [Task of descriptive geometry], Visshaia shkola, Moscow, Russia, 139 p.
5. Пеклич В.А. Мнимая начертательная геометрия: учебное пособие / В.А. Пеклич. – М.: Издательство Ассоциации строительных вузов, 2007. – 104 с.  
Pieklich, V.A. (2007), *Mnimaia nachertatelnaia geometriia* [Imaginary descriptive geometry], Izdatelstvo Assotsiatsii stroitelnykh vusov, Moscow, Russia, 104 p.
6. Стебляноко В.Г. До методики розв’язання конструктивних задач з нарисної геометрії / В.Г. Стебляноко, І.В. Жданов // Вісник ДонНУЕТ. – 2012. – № 1(50). – С. 251-256.  
Steblianko, V.G. and Zhdanov, I.V. (2012), “On the methods of solving constructive tasks of descriptive geometry”, *Visnyk DonNUET*, No. 1(50), pp. 251-256.



**Цель статьи** – выполнение наглядных изображений, которые поясняют содержание геометрических свойств, заложенных в самой связи между заданными и искомыми элементами пространства, которые используются для решения конструктивных задач.

**Методика.** Для построения наглядных изображений связи между заданными и искомыми элементами пространства использовались команды 3D моделирования системы КОМПАС. Решение конструктивной задачи включает, как правило, два этапа: анализ и построение. Цель анализа – разделение условия задачи на части с их независимым (вначале) и общим (в конце) рассмотрением; реализуется путем определения бесконечных множеств фигур, которые отвечают отдельным связям. Искомая фигура является пересечением этих множеств. Для нетривиальных связей приведен поэтапный план построений, приводятся примеры решения задач с использованием таких связей.

**Результаты.** Рассмотрены восемь связей, из которых в разных сочетаниях составляются условия элементарных плоскостных задач. Более детально рассмотрена нетривиальная связь, в которой искомая плоскость равнонаклонена к заданной прямой и плоскости. Рассмотрен пример с использованием этой связи и поэтапное решение задачи.

**Научная новизна.** Использовано геометрическое моделирование множеств элементов пространства, с помощью которых решались конструктивные задачи. Построены в системе КОМПАС 3D модели дают возможность понять геометрическую суть связи между заданной и построенной фигурами.

**Практическая значимость.** Материал статьи может быть использован для работы в научных студенческих кружках и при подготовке к олимпиадам по начертательной геометрии.

**Ключевые слова:** элементы пространства, точечные задачи, линейчатые задачи, плоскостные задачи, сфера, цилиндрическая поверхность, коническая поверхность, касательная плоскость.

**The objective of article** – implementation of visual images that illustrate the content of the geometric properties inherent in the relationship between the given and the unknown elements of the space, which are used to solve design problems.

**Methods.** To construct a visual images of the link between the given and the unknown elements of the space were used commands of 3D modeling KOMPAS. Constructive solution of the task includes, as a rule, two phases: analysis and construction. The purpose of the analysis – separation of task conditions on the part of their independence (in the beginning) and the general (late) review; implemented by defining infinite sets of figures that meet individual links. The unknown figure is the intersection of these sets. For non-trivial links was made phased plan, made sample examples using these links.

**Results.** Examined eight links, of which, in various combinations is the condition of the elementary plane tasks. Carefully considered the trivial link in which the unknown plane is equally inclined to a given line and plane. Was considered an example of using this link and the gradual solution of the task.

**Scientific novelty.** Used geometric modeling sets of elements of the space in which structural tasks were solved. Built in the system KOMPAS 3D models allow to understand the geometric nature of the link between the given and the constructed figures.

**Practical value.** The material of the article can be used for work in scientific student clubs and for preparation for the Olympiad on descriptive geometry.

**Key words:** elements of the space, point tasks, liner tasks, plane tasks, sphere, the cylindrical surface, conical surface, the tangent plane.

Рекомендовано до публікації д-ром техн. наук, проф. Скидан І.А. Дата надходження рукопису 27.05.2013 р.