УДК 530.12

В. Д. Гладуш[1], М. В. Галаджий[2]

[1]Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара
[2]Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта им. В. Лазаряна

МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРОБНЫХ ЧАСТИЦ В ПОЛЕ АНОМАЛЬНО ЗАРЯЖЕННОГО ОБЪЕКТА

У попередніх роботах авторів досліджувалися особливості руху заряджених пробних частинок у полі Рейсснера-Нордстрема (РН) за допомогою методу «масового потенціалу». Було знайдено точки зависання частинок і отримані умови їх стійкості. У даній роботі досліджуються збурення вказаних рівноважних станів частинок у полі РН аномально зарядженого об'єкта, обумовлених, як варіацією поля, пов'язаного з малою зміною параметрів центрального об'єкта, так і зміною динамічних величин частинок, що зберігаються. Показано, що стійкі стани положень рівноваги можливі лише для зв'язаних станів слабо заряджених частинок у полі аномально зарядженого об'єкта. Знайдено частоти слабких радіальних коливань частинок біля положення рівноваги, обумовлених зміною енергії частинки або зміною маси центрального об'єкту. Виявляється, що для першого типу збурень рівноважних станів зручно використовувати гамільтонов метод, а для другого − метод «масового потенціалу». Зазначимо, що у формалізмі першого типу отримуємо частоти, виміряні відносно часу видаленого спостерігача, тоді як у формалізмі другого типу − частоти відносно власного часу. З отриманих формул видно, що частота, виміряна видаленим спостерігачем, не залежать від характеру збурення і визначаються лише параметрами частинки і центрального об'єкта.

Ключові слова: масовий потенціал, канонічна теорія збурення, умови стійкості.

В предыдущих работах авторов исследовались особенности движения заряженных пробных частиц в поле Рейсснера-Нордстрема (РН) с помощью метода «массового потенциала». Были найдены точки зависания частиц и получены условия их устойчивости. В данной работе исследуются возмущения указанных равновесных состояний частиц в поле РН аномально заряженного объекта, вызванные, как вариацией поля, связанного с малым изменением параметров центрального объекта, так и изменением сохраняющихся динамических величин частиц. Показано, что устойчивые состояния положений равновесия возможны только для связанных состояний слабо заряженных частиц в поле аномально заряженного объекта. Найдены частоты слабых радиальных колебаний частиц около положения равновесия, обусловленных изменением энергии частицы или изменением массы центрального объекта. Оказывается, что для первого типа возмущений равновесных состояний удобно использовать гамильтонов метод, а для второго – метод «массового потенциала». Отметим, что в формализме первого типа получаем частоты, измеренные относительно времени удаленного наблюдателя, тогда как в формализме второго типа – частоты относительно собственного времени. Из полученных формул видно, что частота, измеренная удаленным наблюдателем, не зависят от характера возмущения и определяются только параметрами частицы и центрального объекта.

Ключевые слова: массовый потенциал, каноническая теория возмущения, условия устойчивости.

In previous works the authors investigated the peculiarities of motion of charged test particles in the Reissner-Nordström (RN) field by using the «mass potential» method. There have been found static equilibrium states of particles and their stability conditions. In this paper we study the perturbations of these equilibrium states in the RN field of a super-extremely charged object. These perturbations are caused both by variation of the field connected with a small change of the central object parameters and change of the conserved dynamical quantities of particles. It has been shown that the stable state of equilibrium is possible only for bound states of weakly charged particles in the field of the super-extremely charged object. We have found the frequency of small radial particle oscillations around the equilibrium position caused by change of the particle energy or change in mass of the central object. It turns out that the Hamiltonian approach and the «mass potential» method are convenient to deal with the first-type and the second-type perturbations, respectively. Note that in the first-type formalism we obtain the frequency measured according to the time of a distant observer, whereas in the second-type formalism it is the frequency with respect to the proper time. From the derived formulas it is evident that the frequency measured by a distant observer does not depend on the nature of the perturbations and is determined only by the parameters of the particle and the central object.

Key words: mass potential, canonical perturbation theory, stability conditions

В. Д. Гладуш*, М. В. Галаджий

МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРОБНЫХ ЧАСТИЦ В ПОЛЕ АНОМАЛЬНО ЗАРЯЖЕННОГО ОБЪЕКТА

Введение

В [1; 2] рассмотрены особенности движения заряженных частиц в гравитационном и электромагнитном полях сферически-симметричного источника массы *M* и заряда Q. Эти поля описываются метрикой Рейсснера-Нордстрема (РН)

$$ds^2 = Fc^2dT^2 - F^{-1}dR^2 - R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\,, \tag{1}$$

и электрическим потенциалом $\varphi = Q/R$, где $F = 1 - 2\gamma M^2/c^2R + \gamma Q^2/c^4R^2$, γ – гравитационная постоянная, c – скорость света. Было показано, что в случае аномально заряженного центрального источника, когда $Q^2 > \gamma M^2$, возникают статические состояния зависания слабозаряженных частиц над этим источником [3].

В данной работе найдены частоты колебаний частиц около указанных равновесных состояний зависания при возмущении траектории частиц и некоторых параметров системы. Обычно задачу изучения возмущений состояний частиц рассматривают как задачу описания движения частиц по траекториям, близким к найденным ранее [4; 5]. Одновременно решение этой задачи дает ответ на вопрос об устойчивости данной траектории. Здесь мы будем рассматривать более общую задачу возмущения состояния заряженных частиц, вызванное вариацией поля РН, которое связано с малым изменением параметров центрального объекта (например, его массы *M*). Кроме этого изучаются возмущения состояния частиц, обусловленные малым изменением сохраняя ющихся динамических величин частиц (например, их энергии).

Уравнения движения и массовый потенциал

Гамильтониан пробной частицы массы *m* и заряда *q*, движущейся радиально в рассматриваемом поле, равен

$$H(P_R, R) = c\sqrt{F(m^2c^2 + FP_R^2)} + \frac{qQ}{R}\,, \tag{2}$$

где $P_R = mcF^{-1}dR/ds$ – радиальный импульс частицы, s – натуральный параметр воль мировой линии частицы. Выражения для скорости и ускорения частицы следуют из закона сохранения полной энергии

$$E = \frac{mc^2F}{\sqrt{F - F^{-1}\dot{R}^2/c^2}} + \frac{qQ}{R} = const\,, \tag{3}$$

где $\dot{R} = dR/dT$, и имеют вид

$$\left(mc^2\frac{dR}{ds}\right)^2 = \left(E - \frac{qQ}{R}\right)^2 - m^2c^4\left(1 - \frac{2\gamma M^2}{c^2R} + \frac{\gamma Q^2}{c^4R^2}\right) = -U_V\,, \tag{4}$$

$$\frac{d^2R}{ds^2} = \frac{1}{m^2c^4}\left[\left(EqQ - \gamma m^2c^2M\right)\frac{1}{R^2} + (\gamma m^2 - q^2)\frac{Q^2}{R^3}\right]. \tag{5}$$

Здесь

$$U_V(M, Q, m, q, E, R) = m^2c^4 - E^2 - (\gamma m^2c^2M - EqQ)\frac{2}{R} + (\gamma m^2 - q^2)\frac{Q^2}{R^2} \le 0 \tag{6}$$

– скоростной потенциал. Неравенство $U_V < 0$ задает области допустимых движений частиц, а корни уравнения $U_V = 0$ относительно R определяют точки поворота.

Оказывается, что для задач рассматриваемого типа часто удобно использование массового потенциала $U_M(Q,m,q,E,R)$ [1,2]. Этот потенциал определяется как корень уравнения $U_V(U_M,Q,m,q,E,R)=0$ относительно U_M и имеет вид

$$U_M = \frac{1}{2\gamma m^2c^2}\left[\left(m^2c^4 - E^2\right)R + 2EqQ + (\gamma m^2 - q^2)\frac{Q^2}{R}\right]. \qquad (7)$$

Допустимые движения частиц и радиусы поворота в этом случае задаются соотношением $U_M \le M$.

Равновесные состояния частицы

Статическое равновесное состояние частицы определяются уравнениями $dR/ds = 0$ и $d^2R/ds^2 = 0$. Отсюда следует, что устойчивые состояния равновесия возможны только для связанных состояний ($|E| < mc^2$) слабозаряженных частиц ($|q| < \sqrt{\gamma}m$) в поле аномально заряженного источника ($|Q| > \sqrt{\gamma}M$) [1; 2]. В этом случае частица с энергией

$$E_{\min} = \frac{c^2}{\sqrt{\gamma}}\left(\sqrt{\gamma m^2 - q^2}\sqrt{1 - \frac{\gamma M^2}{Q^2}} + \frac{q}{Q}M\sqrt{\gamma}\right) \qquad (8)$$

зависает на расстоянии

$$R_{1extr} = \frac{\mathrm{Q}^2\sqrt{\gamma}}{c^2}\frac{\sqrt{\gamma m^2 - q^2}}{\left(\sqrt{\gamma}M\sqrt{\gamma m^2 - q^2} - qQ\sqrt{1 - \gamma M^2/Q^2}\right)} \qquad (9)$$

от центра. При возникновении в системе возмущений, вызванных изменениями параметров $\{M, Q, E, m, q\}$, частица совершает малые колебания вблизи своего положения равновесия. Здесь мы ограничимся случаями колебаний, которые возникают при изменении энергии частицы или массы центрального источника.

Частным случаем слабозаряженных частиц являются нейтральные частицы (q=0). Как видно из формулы (9), нейтральная частица зависает на расстоянии $R_{0extr} = Q^2/Mc^2$ от центра. Кроме этого, из (9) вытекает соотношение

$$\frac{\sqrt{\gamma}m}{|q|} = \frac{|Q|}{\sqrt{\gamma}M}\frac{\sqrt{F_{extr}}}{\left|\sqrt{1 - Q^2/Mc^2R_{1extr}}\right|},$$

где $F_{extr} = F(R_{1extr}) = \gamma m^2\left(Q^2 - \gamma M^2\right)/\left(Q^2\left(\gamma m^2 - q^2\right)\right)$. Отсюда получаем ограничение на радиус равновесного состояния слабозаряженной частицы при данном заряде Q и массе M центрального источника: $R_{1extr} > Q^2/Mc^2 = R_{0extr}$. Таким образом, радиус зависания заряженной частицы всегда больше радиуса зависания нейтральной частицы.

Возмущения устойчивых состояний частиц

Гамильтонов подход. В положении равновесия $R = R_{1extr}$, частица покоится ($P_R = 0$) на дне потенциальной ямы с минимальной энергией $E_{\min} = \left(H(P_R, R)\right)_{P_R=0,\, R=R_{1extr}}$. Если частице сообщить небольшую дополнительную энергию $\tilde{H} = E - E_{\min} > 0$, то она начнет осциллировать вблизи своего положения равновесия $R = R_{1extr} + r = R_{1extr} + a\cos(\omega t)$. При этом малые отклонения r от положения равновесия R_{1extr} можно рассматривать как каноническое преобразование

$$R = R_{1extr} + r, \quad P_R = P_r. \tag{10}$$

Динамика частицы в этом случае описывается возмущенным гамильтонианом $H(P_R, R) = H(P_r, R_{1extr} + r) = E_{\min} + \tilde{H}$. Разложим гамильтониан $H(P_r, R_{1extr} + r)$ около положения равновесия ($r = 0,\ P_r = 0$) и ограничимся членами второго порядка:

$$\begin{aligned} H(P_r, r) = H(0,0) &+ \left(P_r \left(\frac{\partial}{\partial P_r} H(P_r, r) \right) + r \left(\frac{\partial}{\partial r} H(P_r, r) \right) \right)_{P_r=0,\, r=0} + \\ &+ \frac{1}{2} \left(P_r^{\,2} \left(\frac{\partial^2}{\partial P_r^{\,2}} H(P_r, r) \right) + 2rP_r \left(\frac{\partial^2}{\partial r \partial P_r} H(P_r, r) \right) + r^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} H(P_r, r) \right) \right)_{P_r=0,\, r=0}. \end{aligned} \tag{11}$$

Отсюда, с учетом (8), получаем

$$H(P_r, R_{1extr} + r) = E_{\min} + \tilde{H} = E_{\min} + \frac{1}{2} H_P P_r^{\,2} + \frac{1}{2} H_r r^2, \tag{12}$$

где

$$H_P = \frac{\gamma^{3/2} m^2}{|Q|^3} \left(\frac{Q^2 - \gamma M^2}{\gamma m^2 - q^2} \right)^{3/2}, \qquad \left(\frac{\partial^2}{\partial r \partial P_r} H(P_r, r) \right)_{P_r=0,\, r=0} = 0, \tag{13}$$

$$H_r = \frac{c^6}{\gamma^{5/2} m^2 Q^6} \frac{\left(\sqrt{\gamma} M \sqrt{\gamma m^2 - q^2} - qQ\sqrt{1 - \gamma M^2 / Q^2} \right)^4}{\sqrt{(1 - \gamma M^2 / Q^2)(\gamma m^2 - q^2)}}. \tag{14}$$

Сравнивая полученный гамильтониан $\tilde{H} = H_P P_r^{\,2}/2 + H_r r^2/2$ с классическим гамильтонианом осциллятора $H_\omega = p^2 / 2\tilde{m} + \tilde{m}\omega^2 r^2 / 2$, заключаем, что рассматриваемая динамическая система эквивалентна осциллятору с динамической массой

$$\tilde{m} = \frac{1}{H_P} = \frac{|Q|^3}{\gamma^{3/2} m^2} \left(\frac{\gamma m^2 - q^2}{Q^2 - \gamma M^2} \right)^{3/2} \tag{15}$$

и частотой

$$\omega = \sqrt{H_P H_r} = \frac{c^3}{\sqrt{\gamma} |Q|^3} \left(\sqrt{\gamma} M - q\sqrt{\frac{Q^2 - \gamma M^2}{\gamma m^2 - q^2}} \right)^2 \sqrt{1 - \frac{\gamma M^2}{Q^2}}. \tag{16}$$

Таким образом, при малом увеличении энергии, слабозаряженная частица совершает гармонические колебания с частотой (16).

Отметим, что частота ω для устойчивых равновесных состояний должна быть действительной величиной. Таким образом, задача изучения возмущенных движений частицы одновременно дает ответ на вопрос об устойчивости равновесных состояний. В рассматриваемых случаях частота ω является действительной для слабозаряженных частиц $\gamma m^2 > q^2$ в поле аномально заряженного объекта $Q^2 > \gamma M^2$.

При малом увеличении энергии нейтральной частицы она осциллирует с частотой

$$\omega_0 = \frac{c^3\sqrt{\gamma}M^2}{|Q|^3}\sqrt{1-\frac{\gamma M^2}{Q^2}} \tag{17}$$

вблизи своего положения равновесия $R_{0extr} = Q^2/Mc^2$.

Возмущение устойчивых состояний частиц и массовый потенциал

Важным случаем возмущений равновесных состояний пробных частиц являются возмущения, вызванные изменением одного из параметров центрального объекта. Рассмотрим в качестве примера изменение массы объекта. В этом случае удобно использовать массовый потенциал. Уравнение движения (4) и ускорение (5) частицы, выраженные через массовый потенциал, имеют вид

$$\left(\frac{dR}{d\tau}\right)^2 = \frac{2\gamma}{R}\left(M - U_M\right), \tag{18}$$

$$\frac{d^2R}{d\tau^2} = -\frac{\gamma c^2}{R^2}\left(M - U_M + R\frac{dU_M}{dR}\right), \tag{19}$$

где τ – собственное время частицы.

При

$$M = \left(U_M\right)_{\min} < |Q|/\sqrt{\gamma}\text{, где}$$

$$\left(U_M\right)_{\min} = U_M(R_{2extr}) = \frac{1}{\gamma m^2 c^2}\left(qQE_{\min} + |Q|\sqrt{\left(m^2c^4 - E_{\min}^2\right)\left(\gamma m^2 - q^2\right)}\right). \tag{20}$$

Слабозаряженная частица с энергией (8) находится в связанном состоянии «на дне $\left(U_M\right)_{\min}$» массового потенциала U_M и покоится на расстоянии

$$R_{2extr} = |Q|\sqrt{\frac{\gamma m^2 - q^2}{m^2c^4 - E_{\min}^2}} \tag{21}$$

от центра. Изменение массы центрального источника вызывает изменение массового потенциала, а значит и положения равновесия частицы, и сводится к преобразованию

$$R = R_{2extr} + r, \quad M = \left(U_M\right)_{\min} + \mu, \qquad 22)$$

где μ – малое изменение массы центрального источника, r – малые отклонения от положения равновесия частицы, вызванное изменением μ. Разлагая массовый потенциал около положения равновесия, получаем

$$U_M(r) = U_M(0) + r\left(\frac{d}{dr}U_M(r)\right)_{r=0} + \frac{r^2}{2}\left(\frac{d^2}{dr^2}U_M(r)\right)_{r=0}. \tag{23}$$

Отсюда находим

$$U_M(r) = (U_M)_{\min} + \frac{1}{2\gamma m^2c^2}\frac{\left(m^2c^4 - E_{\min}^2\right)^{3/2}}{\sqrt{\gamma m^2 - q^2}}r^2. \tag{24}$$

Далее, с учетом соотношений (18) и (19), приходим к неоднородному дифференциальному уравнению движения частицы

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} + \frac{m^2c^4 - E_{\min}^2}{m^2c^2R_{2extr}^2}r + \frac{\gamma\mu}{R_{2extr}^2} = 0, \tag{25}$$

которое с помощью координатного преобразования

$$r = r' - \frac{\gamma m^2c^2\mu}{m^2c^4 - E_{\min}^2}$$

сводится к уравнению осциллятора

$$\frac{d^2r'}{d\tau^2} + \frac{m^2c^4 - E_{\min}^2}{m^2c^2R_{2extr}^2}r' = 0. \tag{26}$$

Координатное преобразование $r \to r'$ интерпретируется как сдвиг положения равновесия частицы, вызванный изменением массы центрального источника. Таким образом, слабозаряженная частица совершает гармонические колебания около нового положения равновесия

$$\tilde{R}_{2extr} = R_{2extr} - \frac{\gamma m^2c^2\mu}{m^2c^4 - E_{\min}^2} \tag{27}$$

с частотой

$$\tilde{\omega} = \frac{m^2c^4 - E_{\min}^2}{mc|Q|\sqrt{\gamma m^2 - q^2}} \tag{28}$$

или

$$\tilde{\omega} = \frac{c^3}{\gamma m|Q|^3}\left(\sqrt{\gamma}M - q\sqrt{\frac{Q^2 - \gamma M^2}{\gamma m^2 - q^2}}\right)\sqrt{\gamma m^2 - q^2}. \tag{29}$$

Соответственно нейтральная частица осциллирует около своего положения равновесия

$$\tilde{R}_{0extr} = \frac{\sqrt{\gamma}m}{m^2c^4 - E_{\min}^2}\left(|Q|\sqrt{m^2c^4 - E_{\min}^2} - \sqrt{\gamma}m\mu c^2\right) \tag{30}$$

с частотой

$$\tilde{\omega}_0 = \frac{\sqrt{\gamma} M^2 c^2}{|Q|^3}. \qquad (31)$$

Сдвиг положения равновесия линейно зависит от величины изменения массы центрального тела μ. Когда $\tilde{R}_{2extr} = 0$, сдвиг достигает центра, что дает нам пределы применимости нашего приближения

$$\mu < \frac{|Q|}{\gamma m^2 c^2} \sqrt{\gamma m^2 - q^2} \sqrt{m^2 c^4 - E_{\min}^2}. \qquad (32)$$

Выводы

Рассмотрены малые колебания слабозаряженных пробных частиц около их устойчивого положения равновесия в поле аномально заряженного источника. Показано, что при возмущениях равновесных состояний частицы, вызванных изменениями некоторых параметров системы, частица совершает гармонические колебания. Получены соответствующие частоты малых колебаний. Необходимо отметить, что частоты ω и ω_0 (см. (16) и (17)) измерены относительно времени бесконечно удаленного наблюдателя T ,тогда как частоты $\tilde{\omega}$ и $\tilde{\omega}_0$ (см. (29) и (31)) – относительно собственного времени τ. Частота ω_∞ колебаний некоторого источника, измеренная удаленным наблюдателем, и частота колебаний этого же источника по собственному времени $\tilde{\omega}$ связанны соотношением

$$\omega_\infty = \tilde{\omega} \sqrt{g_{00}} = const. \qquad (32)$$

Поэтому в рассматриваемом случае малых колебаний заряженной или нейтральной частицы около положения равновесия, имеем следующую связь частот (16), (17) и (29), (31):

$$\omega = \tilde{\omega} \sqrt{F_{extr}}, \qquad \omega_0 = \tilde{\omega}_0 \sqrt{F_{extr}}. \qquad (33)$$

Отсюда видно, что частоты колебаний ω не зависят от характера возмущения и определяются только параметрами центрального объекта и частицы.

Библиографические ссылки

1. **Gladush V. D.** Some peculiarities of motion of neutral and charged test particles in the field of a spherically symmetric charged object in General Relativity / V. D. Gladush, M.V. Galadgyi // Gen. Rel. Grav. – 2011. – V. 43, № 5. P. 1347-1363.
2. **Гладуш В. Д.** Радиальные движения нейтральных и заряженных пробных частиц в поле заряженного сферически-симметричного объекта в ОТО / В. Д. Гладуш, М. В. Галаджий // КФНТ. – 2009. – Т. 25, № 2. – С. 115-126.
3. **Bonnor W. B.** The equilibrium of a charged test particle in the field of a spherical charged mass in general relativity / W. B. Bonnor // Class. Quantum Grav. – 1993. – V. 10. – P. 2077-2082.
4. **Рябушко А. П.** Проблема устойчивости движения тел в общей теории относительности. / А. П. Рябушко – Мн., 1987. – 112 с.
5. **Гальцов Д. В.** Частицы и поля в окрестности черных дыр. / Д. В. Гальцов – М., 1986. 288 с.

Надійшла до редколегії 25.07.2011