

ПРИМЕНЕНИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО КРИТЕРИЯ РАЗРУШЕНИЯ К ИССЛЕДОВАНИЮ ПРЕДЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ ПЛАСТИНЫ, ОСЛАБЛЕННОЙ ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ ТРЕЩИН

За допомогою енергетичного критерія Дж. Сі досліджується гранична рівновага площини, послабленої двоякоперіодичною системою тріщин. Отримані результати підтверджені розрахунками, які були проведені на основі одночасного використання критеріїв руйнування, що базуються на відривному та зсувному механізмах. Проведено порівняльний аналіз з відомими результатами, отриманими при застосуванні критерія, який враховує тільки відривний механізм.

Введение. При исследовании предельного равновесия хрупких тел, содержащих дефекты типа трещин, требуется определить критическое значение внешней нагрузки, по достижении которой трещина начнет распространяться. Критерий начала распространения трещины, составляющий основу механики разрушения, не следует из уравнений равновесия механики сплошной среды. Он является дополнительным по отношению к уравнениям теории упругости краевым условием при решении вопроса о предельном равновесии тела с трещиной. Кроме того, необходимо сформулировать условие, позволяющее определить направление начального распространения трещины.

Критерии разрушения могут быть получены как на основе энергетических, так и силовых соображений. Известно, что сначала А.А. Гриффитсом был предложен энергетический критерий, а силовой критерий разрушения позже сформулировал Дж.Р. Ирвин [1]. Ирвин также показал эквивалентность этих двух критериев в случае трещин нормального отрыва. В общем случае геометрии и внешней нагрузки необходимо провести дополнительное исследование, касающиеся выбора критерия разрушения. Для плоского тела с трещиной поле деформаций и напряжений в вершине трещины можно получить путем взаимного наложения напряжений двух частных видов деформаций: отрывного смещения и поперечного сдвига. При этом необходимо учитывать, что распространение трещины может происходить как по отрывному, так и по сдвиговому механизму. Истинное разрушение происходит по тому механизму, для которого критическая нагрузка окажется меньше.

Дж. Сі пропонував застосовувати для плоского хрупкого тела с трещиной энергетический критерий разрушения [2], в соответствии с которым трещина начинает распространяться, когда коэффициент плотности энергии деформации достигает критического значения.

В представленной работе с помощью энергетического критерия Дж. Сі исследуется предельное равновесие плоскости, ослабленной двоякоперіодичною системою тріщин. Полученные результаты подтверждены расчетами, проведенными на основании одновременного применения критериев разрушения, базирующихся на отрывном и сдвиговом механизмах [3]. В качестве примеров исследованы случаи, рассмотренные ранее в [1] на основании критерия, учитывающего только отрывной механизм. Проведен сравнительный анализ результатов.

Постановка задачи. Рассмотрим предельное равновесие бесконечной плоскости, ослабленной двоякопериодической системой трещин. Пусть $2l$ — длина трещины. Центры трещин лежат в узлах правильной треугольной или квадратной решетки. Углы наклона трещин к оси Ox одинаковы и равны α . Расстояния между узлами решетки обозначим h . Пластина на бесконечности находится под действием равномерно распределенных усилий p (рис. 1, 2).

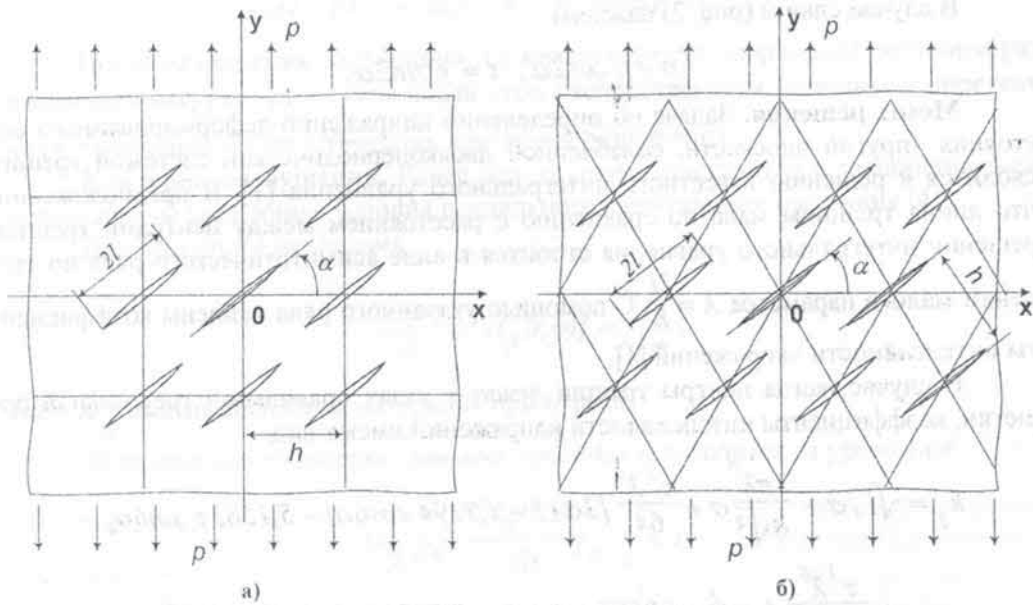


Рис. 1. Одноосное растяжение пластины, ослабленной системой трещин:
а) квадратная решетка; б) треугольная решетка

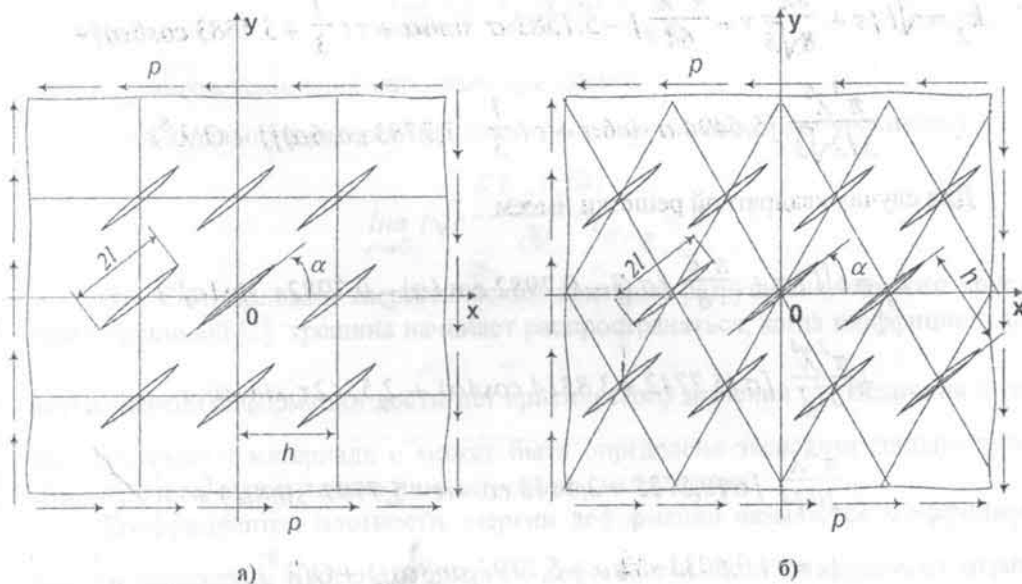


Рис. 2. Сдвиг пластины, ослабленной системой трещин:
а) квадратная решетка; б) треугольная решетка

Напряжения на линии трещины могут быть представлены в виде $p(x) = -(\sigma - i\tau)$. Для одноосного растяжения пластины усилиями интенсивности p (рис. 1) получаем

$$\sigma = \frac{p}{2}(1 + \cos 2\alpha), \quad \tau = \frac{p}{2} \sin 2\alpha.$$

В случае сдвига (рис. 2) находим

$$\sigma = p \cos 2\alpha, \quad \tau = p \sin 2\alpha.$$

Метод решения. Задача об определении напряженно-деформированного состояния упругой плоскости, ослабленной двоякопериодической системой трещин сводится к решению известного интегрального уравнения [1]. В предположении, что длина трещины мала по сравнению с расстоянием между центрами трещин, решение интегрального уравнения строится в виде асимптотического ряда по степеням малого параметра $\lambda = \frac{2l}{h}$. С помощью указанного ряда найдены коэффициенты интенсивности напряжений [1].

В случае, когда центры трещин лежат в узлах правильной треугольной решетки, коэффициенты интенсивности напряжений имеют вид

$$k_1 = \sqrt{l} \left\{ \sigma + \frac{3\pi\lambda^2}{8\sqrt{3}} \sigma + \frac{\pi^2\lambda^4}{64} [3\sigma(1 - 1,7194 \cos 6\alpha) - 5,1583\tau \sin 6\alpha] + \right. \\ \left. + \frac{\pi^3\lambda^6}{512\sqrt{3}} [\sigma(9 + 6,9597 \cos 6\alpha) - 9,0883\tau \sin 6\alpha] \right\} + O(\lambda^8); \\ k_2 = \sqrt{l} \left\{ \tau + \frac{\pi\lambda^2}{8\sqrt{3}} \tau + \frac{\pi^2\lambda^4}{64} [-5,1583 \sigma \sin 6\alpha + \tau(\frac{1}{3} + 5,1583 \cos 6\alpha)] + \right. \\ \left. + \frac{\pi^3\lambda^6}{512\sqrt{3}} [5,6494 \sigma \sin 6\alpha + \tau(\frac{1}{3} - 7,7783 \cos 6\alpha)] \right\} + O(\lambda^8).$$

Для случая квадратной решетки имеем

$$k_1 = \sqrt{l} \left\{ \sigma + \frac{\pi\lambda^2}{8} [\sigma(1 - 0,2982 \cos 4\alpha) - 0,7982\tau \sin 4\alpha] + \right. \\ \left. + \frac{\pi^2\lambda^4}{512} [\sigma(5,7742 + 3,8314 \cos 4\alpha) + 2,5542\tau \sin 4\alpha] + \right. \\ \left. + \frac{\pi^3\lambda^6}{1024} [\sigma(0,5725 + 2,5413 \cos 4\alpha - 5,7797 \sin 8\alpha) + \right. \\ \left. + \tau(0,6033 \sin 4\alpha - 5,7797 \sin 8\alpha)] \right\} + O(\lambda^8); \\ k_2 = \sqrt{l} \left\{ \tau + \frac{\pi\lambda^2}{8} [\tau(1 + 0,2982 \cos 4\alpha) - 0,7982\sigma \sin 4\alpha] + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\pi^2 \lambda^4}{256} [\tau(3,5485 - 2,5542 \cos 4\alpha) + 5,1085 \sigma \sin 4\alpha] + \\
& + \frac{\pi^3 \lambda^6}{1024} [\tau(-0,7339 - 0,0451 \cos 4\alpha + 5,7797 \cos 8\alpha) + \\
& + \sigma(1,0827 \sin 4\alpha - 5,7797 \sin 8\alpha)] + O(\lambda^8).
\end{aligned}$$

После нахождения коэффициентов интенсивности напряжений величина разрушающей нагрузки $p_{кр}$ и начальный угол распространения трещины φ определяются с помощью соответствующих критериев разрушения.

Критерии разрушения. Ранее для хрупких плоских тел с трещинами были использованы следующие условия предельного равновесного состояния [4].

Для отрывного механизма

$$\lim_{r \rightarrow 0} \{\sqrt{r} \sigma_{\theta}(r, \varphi)\} = \frac{K_{1c}}{\sqrt{\pi}},$$

где $-K_{1c}$ модуль сцепления материала при отрыве.

Угол начального распространения трещины φ находится из уравнения

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left\{ \sqrt{r} \frac{\partial \sigma_{\theta}(r, \theta)}{\partial \theta} \right\}_{\theta = \varphi} = 0.$$

Для сдвигового механизма

$$\lim_{r \rightarrow 0} \{\sqrt{r} \tau_{r\theta}(r, \varphi)\} = \frac{K_{2c}}{\sqrt{\pi}},$$

где $-K_{2c}$ модуль сцепления материала при сдвиге.

Угол начального распространения трещины удовлетворяет уравнению

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left\{ \sqrt{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}(r, \theta)}{\partial \theta} \right\}_{\theta = \varphi} = 0.$$

Дж. Си предложил энергетический критерий разрушения плоского хрупкого тела с трещиной [2]: трещина начинает распространяться, когда коэффициент плотности энергии деформации достигает критического значения $\frac{S_c}{\pi}$. Величина S_c является постоянной материала и может быть определена экспериментально при несимметричном относительно линии трещины нагружении.

Коэффициентом плотности энергии деформации называется коэффициент S при $\frac{1}{r}$ в выражении плотности энергии деформации. Этот коэффициент отражает интенсивность плотности энергии деформации при некотором фиксированном малом радиусе r и зависит от полярного угла θ .

$$S = a_{11} k_1^2 + 2 a_{12} k_1 k_2 + a_{22} k_2^2.$$

Здесь

$$a_{11} = \frac{1}{16\mu} (1 + \cos\theta)(\kappa - \cos\theta),$$

$$a_{12} = \frac{1}{16\mu} [2\cos\theta - (\kappa - 1)] \sin\theta,$$

$$a_{22} = \frac{1}{16\mu} [(\kappa - 1)(1 - \cos\theta) + 1 + 3\cos 2\theta],$$

где μ и κ – упругие константы материала; k_1 и k_2 – коэффициенты интенсивности напряжений.

Для определения угла начального распространения трещины используется гипотеза о том, что направление начального распространения трещины совпадает с плоскостью, в которой коэффициент плотности энергии деформации достигает максимального значения

$$\left. \frac{\partial S}{\partial \theta} \right|_{\theta=\varphi} = 0. \quad (1)$$

После подстановки в приведенные выше формулы известных асимптотических представлений напряжений и перемещений в малой окрестности вершины трещины [1] получим соотношения для определения начального угла распространения трещины φ и критического значения нагрузки $p_{кр}$.

Для отрывного механизма

$$\varphi = 2 \operatorname{arctg} \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8n^2}}{4n}, \quad (2)$$

где $n = \frac{k_2}{k_1}$. Знак «-» выбирается, если $k_1 > 0$. Знак «+» при $k_1 < 0$.

$$\frac{p_{кр} \sqrt{l}}{K_{2c}} = \frac{8\sqrt{2} p \sqrt{l}}{\pi} \frac{1}{k_1 \left(\cos \frac{3\varphi}{2} + 3 \cos \frac{\varphi}{2} \right) - 3k_2 \left(\sin \frac{3\varphi}{2} + 3 \sin \frac{\varphi}{2} \right)} \quad (3)$$

Для сдвигового механизма

$$\operatorname{tg} \frac{3\varphi}{2} - \frac{1}{n} \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} - 3,5 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2n} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{p_{кр} \sqrt{l}}{K_{2c}} = \frac{4\sqrt{2} p \sqrt{l}}{\pi} \frac{1}{k_1 \left(\sin \frac{3\varphi}{2} + 3 \sin \frac{\varphi}{2} \right) + k_2 \left(3 \cos \frac{3\varphi}{2} + \cos \frac{\varphi}{2} \right)} \quad (5)$$

Здесь p – интенсивность приложенного к телу напряжения, l – половина длины трещины. В формулах (3) и (5) принято считать отношение модуля сцепления материала при отрыве к модулю сцепления при сдвиге равным 2.

Распространение трещины будет происходить по отрывному или сдвиговому механизму в зависимости от того, какой из них даст меньшее значение критической нагрузки.

В случае использования энергетического критерия разрушения из условия (1) получаем уравнение для определения угла начального распространения трещины [5]

$$[-(1-\kappa)\sin\varphi - 3\sin 2\varphi]n^2 + 2[(1-\kappa)\cos\varphi + 2\cos 2\varphi]n + \sin 2\varphi + (1-\kappa)\sin\varphi = 0 \quad (6)$$

Критическая нагрузка находится по формуле

$$\frac{P_{кр} l}{S_c} = \frac{16 p^2 l \mu}{\pi B}$$

$$\text{где } B = k_1^2 (1 + \cos\varphi) (\kappa - \cos\varphi) + 2k_1 k_2 (2\cos\varphi + 1 - \kappa)\sin\varphi + k_2^2 [(\kappa - 1)(1 - \cos\varphi) + 1 + 3\cos^2\varphi].$$

Результаты расчета. Численные результаты получены для задач об одноосном растяжении и сдвиге пластины, ослабленной двоякопериодической системой трещин, в случаях квадратной и треугольной решеток (рис. 1,2). Коэффициент Пуассона принимался равным $\nu = \frac{1}{3}$. Параметр λ изменялся в пределах $0,3 \leq \lambda \leq 0,7$.

В качестве примеров рассмотрим два случая нагружения пластины. На рис. 3 и 4 представлены зависимости критической нагрузки $p^* = \frac{p_{кр} \sqrt{l}}{K_{2c}}$ и угла начального распространения трещины φ от угла ориентации трещины α при $\lambda=0,3$ для случая расположения центров трещин в узлах квадратной решетки. Результаты, полученные при использовании энергетического критерия разрушения, отмечены точками. Там же для сравнения приведены результаты расчета по отрывному (сплошная линия) и сдвиговому (пунктирная линия) механизмам.

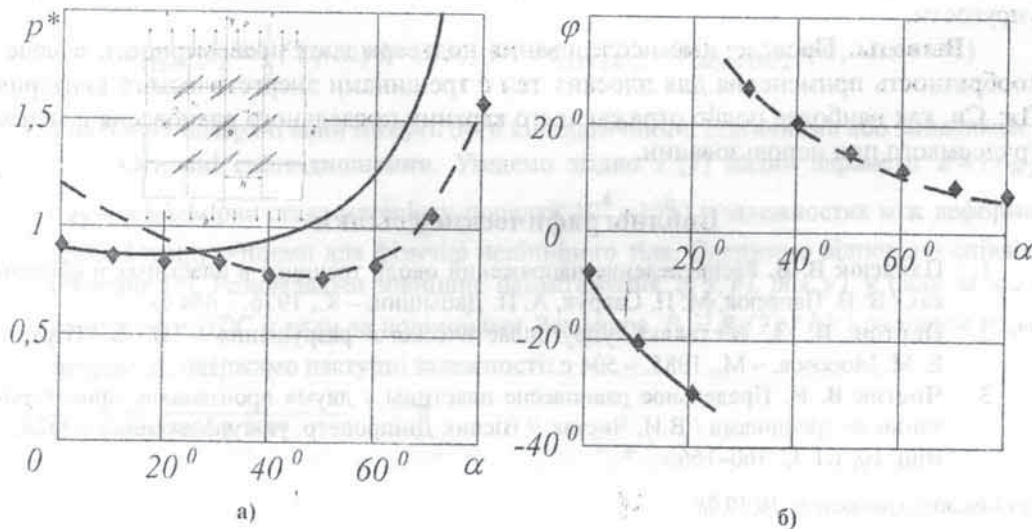


Рис. 3. Одноосное растяжение пластины:
 а) критическая нагрузка; б) угол начального распространения трещины

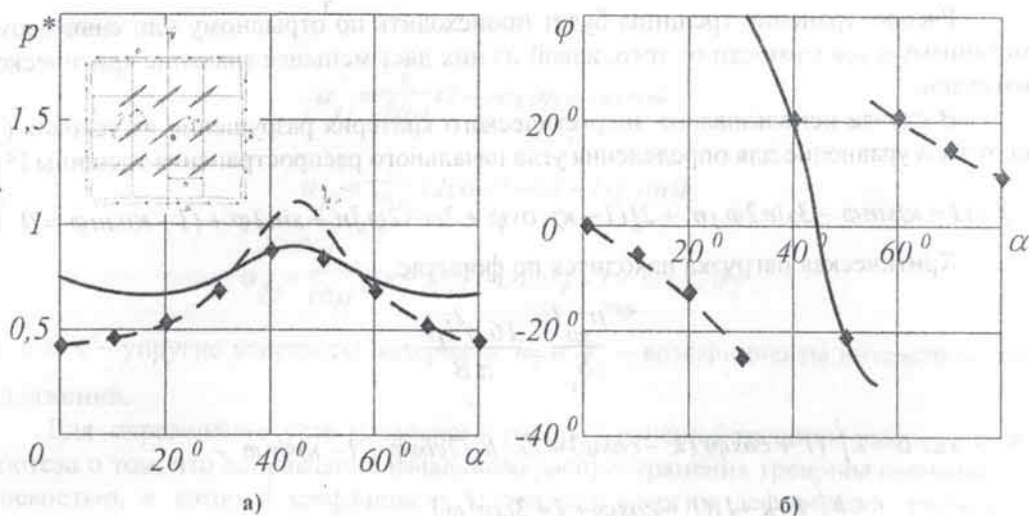


Рис. 4. Сдвиг пластины:

а) критическая нагрузка;

б) угол начального распространения трещины

Характер приведенных кривых сохраняется для всех значений параметра λ в рассматриваемом диапазоне. Сравнение результатов, полученных для квадратной и треугольной решеток, показало, что размещение центров трещин в узлах квадратной решетки приводит к незначительному повышению прочности по сравнению с треугольной решеткой.

Исследованные задачи рассмотрены ранее в [1] с использованием критерия разрушения, учитывающего только отрывной механизм. В данной работе с привлечением других критериев разрушения показано, что при определенной ориентации трещин вступает в действие сдвиговой механизм. Поэтому результаты, полученные здесь, следует считать более полными. Кроме того, в задаче о сдвиге данной пластины, рассмотренной в [1], при углах наклона трещин к оси Ox , близких к 45° (в нашей постановке – близких к 135°) возможно смыкание берегов трещин. В этом случае для решения задачи необходимо рассматривать контактную задачу теории упругости.

Выводы. Проведенные исследования подтверждают правомерность и целесообразность применения для плоских тел с трещинами энергетического критерия Дж. Си, как наиболее полно отражающего картину предельного равновесия и менее трудоемкого при использовании.

Библиографические ссылки

1. Панасюк В. В. Распределение напряжений около трещины в пластинах и оболочках / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацьшин. – К., 1976. – 444 с.
2. Партон В. З. Механика упругопластического разрушения / В. З. Партон, Е. М. Морозов. – М., 1985. – 504 с.
3. Чистяк В. И. Предельное равновесие пластины с двумя произвольно ориентированными трещинами / В.И. Чистяк // Вісник Дніпропетр. ун-ту, Механіка, – 2006. – Вип. 10, т. I. С. 160–166.

Надійшла до редколегії 10.10.08