ISSN № 9125 0912. ВІСНИК ДНУ. Серія "Моделювання". № 8. 2009. Вип. 1. С. 149–161

УДК 517.91

ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

В. А. Остапенко

Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара,
Дніпропетровськ 49050. E-mail: OstapenkoV-34@mail.ru

Рассмотрена первая краевая задача для телеграфного уравнения в ограниченной области. Получено решение этой задачи в квадратурах. Построение точного решения задачи основано на комбинации методов отражений и продолжений, а также на разработанном в [1] методе интегрального представления достаточно широкого класса решений телеграфного уравнения.

Ключевые слова. Телеграфное уравнение, краевая задача, ограниченная область.

1. Введение

Основным математическим аппаратом, описывающим распространение волн различной физической природы в средах, обладающих сопротивлением, является телеграфное уравнение. Использование телеграфного уравнения позволяет учесть реально существующие сопротивления среды и выяснить характер затухания волн, вызванного этими сопротивлениями. С целью решения такого рода задач в [1] разработан метод интегрального представления решений телеграфного уравнения с помощью функции Римана. Сочетание такого интегрального представления с методом продолжений позволило получить точное решение первой краевой задачи [2] в полуограниченной области. В ограниченных областях необходимо возникают дополнительные волны, являющиеся результатом отражения первичных волн от граничной поверхности. В настоящей статье с помощью комбинации интегрального представления решений, метода продолжений и разрабатываемого здесь метода отражений строится решение первой краевой задачи в ограниченной области.

2. Постановка задачи

Рассматривается следующая краевая задача: в области $0 < x-x_n < l,\ \ t > t_n$ найти решение телеграфного уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\cdot\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + D\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + B\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + Cu(x,t) = 0, \qquad (2.1)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x,t_n) = 0; \quad u_t(x,t_n) = 0, \quad 0 < x - x_n < l \qquad (2.2)$$

и краевым условиям первого типа

$$u(x_n, t) = \mu(t - t_n); \quad u(x_n + l, t) = 0, \quad t > t_n. \tag{2.3}$$

3. Решение задачи

Для решения этой задачи, прежде всего, строится продолжение функции $\mu(t)$ на всю ось t:

$$M\left(t - t_n\right) = \begin{cases} \mu\left(t - t_n\right), & t > t_n; \\ 0, & t < t_n. \end{cases} \tag{3.1}$$

Краевое условие (2.3) также продолжается на всю ось t:

$$u\left(x_n, t\right) = M\left(t - t_n\right). \tag{3.2}$$

На начальном этапе решение задачи отыскивается в виде функции

$$u_0(x,t) = M_0(t - t_n - \frac{x - x_n}{a})e^{\frac{(Da-B)(x-x_n)}{2}} +$$
$$+ ae^{\frac{-B(x-x_n)}{2}} \int_0^{t-t_n-\frac{x-xn}{a}} [\frac{B}{2}J_0(z) + c_1\frac{x - x_n}{z}J_1(z)]e^{\frac{Da^2\,(t-tn-\eta)}{2}} M_0(\eta)\,d\eta \tag{3.3}$$

с неизвестной функцией $M_0(t)$. Здесь $J_0(z), J_1(z)$ - функции Бесселя нулевого и первого порядка,

$$z = \sqrt{c_1[(x - x_n)^2\; - a^2\,(t - tn - \eta)^2]}; \tag{3.4}$$

$$c_1 = C + \frac{D^2\,a^2}{4} - \frac{B^2}{4}. \tag{3.5}$$

Функция (3.3) удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) при произвольной функции $M_0(t)$.

Подставив функцию (3.3) в краевое условие (3.2), получим:

$$u_0(x_n, t) = M_0(t-t_n) + a\int_0^{t-t_n} \frac{B}{2}J_0(z)e^{\frac{Da^2(t-tn-\eta)}{2}} M_0(\eta)\,d\eta = M(t-t_n). \tag{3.6}$$

Здесь нужно использовать значение z, получаемое из (3.4) при $x = x_n$, то есть

$$z = a(t - t_n - \eta)\sqrt{-c_1} \tag{3.7}$$

Выполнив в равенстве (3.6) преобразование

$$\tau = t - t_n\ , \tag{3.8}$$

приведем его к виду

$$M_0(\tau) + a\int_0^{\tau} \frac{B}{2}J_0(a(\tau - \eta)\sqrt{-c_1})e^{\frac{Da^2(\tau-\eta)}{2}} M_0(\eta)\,d\eta = M(\tau). \tag{3.9}$$

Таким образом, оказывается, что если функция $M_0(\tau)$ является решением интегрального уравнения (3.9), то функция (6) удовлетворяет краевому условию (2.3). При этом из (3.1) и (3.9) следует, что функция $M_0(\tau)$ обладает следующим свойством:

$$M_0(\tau) = 0\ , \qquad \tau < 0, \tag{3.10}$$

Тогда из (3.3) сразу следует, что $u(x, t_n) = 0$, так как в силу условия $x - x_n > 0$ аргумент функции $M_0(\tau)$, а также верхний предел интегрирования в формуле (3.11) становятся отрицательными при $t = t_n$. Это значит, что функция (3.3) удовлетворяет первому начальному условию (2.2). Вычислим производную функции (3.3) по t. Получим:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_0(x,t)}{\partial t} &= M_0'(t - t_n - \frac{x - x_n}{a})e^{\frac{(Da-B)(x-x_n)}{2}} + \\
&+ a[\frac{B}{2} + c_1\frac{x - x_n}{2}]M_0(t - t_n - \frac{x - x_n}{a})e^{\frac{Da(x-x_n)}{2}} + \\
&+ ae^{\frac{-B(x-x_n)}{2}} \int_0^{t-t_n-\frac{x-xn}{a}} \left\{\frac{Da^2}{2}\left[\frac{B}{2}J_0(z) + c_1\frac{x - x_n}{z}J_1(z)\right] + \right. \\
&+ \frac{B}{2}a^2c_1\frac{t - t_n - \eta}{z}J_1(z) + \\
&\left. + a^2c_1^2\frac{(x - x_n)(t - t_n - \eta)}{z^2}\left(J_0''(z) - \frac{J_0'(z)}{z}\right)\right\} e^{\frac{Da^2\,(t-tn-\eta)}{2}} M_0(\eta)\, d\eta.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

При вычислении функции (3.11) учтено, что

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{c_1a^2(t - t_n - \eta)}{z}\ ;$$

$$\frac{\partial J_0(z)}{\partial z} = \frac{c_1a^2(t - t_n - \eta)}{z}J_1(z)\ ;$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{J_1(z)}{z}\right) = \frac{c_1a^2(t - t_n - \eta)}{z^2}\left(J_0''(z) - \frac{J_0'(z)}{z}\right).$$

Учтено также, что, как следует из (3.4), $z = 0$ при $\eta = t - t_n - \frac{x-x_n}{a}$ и

$$J_0 = 1\ ;\ \left.\frac{J_1(z)}{z}\right|_{z=0} = \frac{1}{2}.$$

При $t > t_n$ в силу условия $x - x_n > 0$ аргументы функций M_0 и M_0', а также верхний предел интегрирования в формуле (3.11) становятся отрицательными. А это на основании свойства (3.10) функции M_0 означает, что $u_t(x, t_n) = 0$, то есть функция (3.3) удовлетворяет и второму начальному условию (2.2). Таким образом, функция (3.3) в области $0 < x - x_n < l; 0 > t > t_n$ удовлетворяет всем условиям постановки краевой задачи, кроме второго краевого условия (2.3). С целью проверки выполнения этого условия, с помощью (3.3) и (3.9) вычислим

$$\begin{aligned}
u_0(x_n + l, t) &= M_0(t - t_n - \frac{l}{a})e^{\frac{(Da-B)l}{2}} + \\
&+ ae^{-\frac{Bl}{2}} \int_0^{t-t_n-\frac{l}{a}} \left[\frac{B}{2}J_0(z) + c_1\frac{l}{z}J_1(z)\right] e^{\frac{Da^2(t-tn-\eta)}{2}} M_0(\eta)\, d\eta.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

В формуле (3.12)

$$z = \sqrt{c_1[l^2 - a^2(t - t_n - \eta)^2]}. \tag{3.13}$$

Из формулы (3.12) и свойства (3.10) функции M_0 следует, что функция (3.3) удовлетворяет второму краевому условию (2.3) при $t - t_n < \frac{l}{a}$. При $t - t_n > \frac{l}{a}$ для удовлетворения второму краевому условию (2.3) решение задачи строится в виде

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t), \tag{3.14}$$

где

$$\begin{aligned} u_1(x,t) = &-\left[M_1\left(t - t_n + \frac{x - x_n - 2l}{a}\right) - \right.\\ &\left. - M_0\left(t - t_n + \frac{x - x_n - 2l}{a}\right)\right] J_0(z_{p1}) e^{\frac{-(Da+B)(x-x_n)+2Dal}{2}} + \\ &+ ae^{\frac{-B(x-x_n)}{2}} \int_0^{t-t_n+\frac{x-x_n-2l}{a}} \left[\frac{B}{2} J_0(z) + \right.\\ &\left. + c_1 \frac{x - x_n}{z} J_1(z)\right] e^{\frac{Da^2(t-tn-\eta)}{2}} [M_1(\eta) + M_0(\eta)]\, d\eta. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Здесь

$$z = \sqrt{c_1[(x - x_n)^2 - (2l - (x - x_n))^2]}\ .$$

Функция (3.15) удовлетворяет уравнению (2.1) с произвольными функциями M_0 и M_1.

Подставляя функцию (3.14) во второе краевое условие (2.3), получим:

$$\begin{aligned} u_0(x_n + l, t) + u_1(x_n + l, t) = &\left[2M_0\left(t - t_n - \frac{l}{a}\right) - M_1(t - t_n - \frac{l}{a})\right] e^{\frac{(Da-B)l}{2}} + \\ &+ ae^{-\frac{Bl}{2}} \int_0^{t-t_n-\frac{l}{a}} \left[\frac{B}{2} J_0(z) - c_1 \frac{l}{z} J_1(z)\right] e^{\frac{Da^2(t-tn-\eta)}{2}} M_1(\eta)\, d\eta = 0. \end{aligned} \tag{3.16}$$

При подстановке функции (3.15) во второе краевое условие (2.3) учтено, что при $x = x_n + l$ $z_{p1} = 0$ и поэтому $J_0(z_{p1}) = 1$. Выполнив в равенстве (3.16) преобразование,

$$\tau = t - t_n - \frac{l}{a}, \tag{3.17}$$

приведем его к виду

$$M_1(\tau) - ae^{\frac{-Dal}{2}} \int_0^{\tau} \frac{B}{2} J_0(z) e^{\frac{Da^2(\tau + \frac{l}{a} - \eta)}{2}} M_1(\eta)\, d\eta = 2M_0(\tau). \tag{3.18}$$

Здесь

$$z = \sqrt{c_1\left[l^2 - a^2(\tau + \frac{l}{a} - \eta)^2\right]}\ . \tag{3.19}$$

Из свойства (3.10) функции $M_0(\tau)$ и уравнения (3.18) следует, что функция $M_1(\tau)$ обладает свойством

$$M_1(\tau) \equiv 0, \tau < 0\ . \tag{3.20}$$

Используя свойства (3.10) и (3.20) функций $M_0(\tau)$ и $M_1(\tau)$, так же, как и для функции $u_0(x,t)$ можно показать, что функция (3.14) удовлетворяет нулевым начальным условиям (2.2).

Таким образом, в области $0 < x - x_n < l$, $t > t_n$ функция (3.14) удовлетворяет всем условиям постановки краевой задачи, кроме первого краевого условия (2.3). Учитывая, что функция $u_0(x,t)$ удовлетворяет первому краевому условию (2.3), нужно, чтобы функция $u_1(x,t)$ удовлетворяла краевому условию

$$u_1(x_n, t) = 0,\ t > t_n\ . \tag{3.21}$$

Из формулы (3.15) и свойств (3.10) и (3.20) функций $M_0(\tau)$ и $M_1(\tau)$ следует, что условие (3.21) будет выполнено только при $t - t_n < \frac{2l}{a}$. Для того чтобы удовлетворить этому условию при $t - t_n > \frac{2l}{a}$, решение задачи будем строить в виде суммы трех функций:

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t). \tag{3.22}$$

При выборе функции $u_2(x,t)$ мы исходим из следующих соображений. Функция

$$w(x,t) = e^{\frac{-B(x-x_n)}{2}} \int_0^{t-t_n \pm \frac{x-xn\mp 2nl}{a}} J_0(z) e^{\frac{Da^2(t-tn-\eta)}{2}} K_n(\eta)\, d\eta \tag{3.23}$$

является решением телеграфного уравнения (2.1) при любых $K_n(\eta)$ и n. Поэтому и производная функции (3.23) по x также будет решением уравнения (2.1). Вычислив эту производную, получим:

$$\begin{gathered}\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} = \pm\frac{1}{a} e^{\frac{-B(x-x_n)}{2}} e^{\frac{\mp Da(x-x_n\mp 2nl)}{2}} J_0(z_n) K_n\left(t - t_n \pm \frac{x - x_n \mp 2nl}{a}\right) + \\ + e^{\frac{-B(x-x_n)}{2}} \times \\ \times \int_0^{t-t_n\pm\frac{x-x_n\mp 2nl}{a}} \left[-\frac{B}{2} J_0(z) - c_1 \frac{x-x_n}{z} J_1(z)\right] e^{\frac{Da^2(t-tn-\eta)}{2}} K_n(\eta)\, d\eta.\end{gathered} \tag{3.24}$$

В формуле (3.24) z_{pn} — это значение функции z из (3.4) при $\eta = t - t_n \pm \frac{x-x_n-2nl}{a}$, то есть

$$\begin{gathered}z_n = \sqrt{c_1\left[(x-x_n)^2 - a^2\left((t-t_n) - (t - t_n \pm \frac{x-x_n\mp 2nl}{a})\right)^2\right]} = \\ = \sqrt{c_1\bigl[(x-x_n)^2 - (\pm(\mp 2nl + (x-x_n)))^2\bigr]}.\end{gathered} \tag{3.25}$$

Станем в дальнейшем обозначать величину z_n с верхними знаками через z_{pn}, а с нижними знаками — через z_{mn}. Отметим, что значение величины z_n зависит от того, с каким знаком величина $\frac{x-x_n\pm 2nl}{a}$ входит в аргумент функции и в верхний предел интегрирования в формуле (3.24).

В частности, функция $u_1(x,t)$ получена из формулы (3.24) при $n = 1$. Функция $u_0(x,t)$ также получена из формулы (3.24) при $n = 0$. Функцию

$u_2(x,t)$ в решении (3.22) также строим в форме (3.24):

$$u_2(x,t)=e^{\frac{-B(x-x_n)}{2}}e^{\frac{Da(x-x_n+2l)}{2}}J_0(z_{m1})\left[M_2\left(t-t_n-\frac{x-x_n+2l}{a}\right)-\right.$$
$$\left.-\left[M_1\left(t-t_n-\frac{x-x_n+2l}{a}\right)-M_0\left(t-t_n-\frac{x-x_n+2l}{a}\right)\right]\right]-$$
$$-ae^{\frac{-B(x-x_n)}{2}}\int_0^{t-t_n-\frac{x-x_n+2l}{a}}\left[-\frac{B}{2}J_0(z)-c_1\frac{x-x_n}{z}J_1(z)\right]e^{\frac{Da^2(t-tn-\eta)}{2}}\times$$
$$\times\left[M_2(\eta)-\left[M_1(\eta)-M_0(\eta)\right]\right]d\eta \quad (3.26)$$

с неизвестной функцией $M_2(\tau)$. Функция $u_2(x,t)$ удовлетворяет уравнению (2.1) при произвольных функциях $M_0(\tau)$, $M_1(\tau)$ и $M_2(\tau)$. Сумма функций $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ должна удовлетворять краевому условию

$$u_1(x_n,t)+u_2(x_n,t)=0 \quad t>t_n\ . \quad (3.27)$$

Подставляя в (3.27) значения функций $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ из (3.15) и (3.26), получим:

$$-J_0(z_{m1b})e^{Dal}\left[M_1\left(t-t_n-\frac{2l}{a}\right)-M_0\left(t-t_n-\frac{2l}{a}\right)-\right.$$
$$\left.-\left[M_2\left(t-t_n-\frac{2l}{a}\right)-\left[M_1\left(t-t_n-\frac{2l}{a}\right)-M_0\left(t-t_n-\frac{2l}{a}\right)\right]\right]\right]+$$
$$+a\int_0^{t-t_n-\frac{2l}{a}}\frac{B}{2}J_0(z)e^{\frac{Da^2(t-tn-\eta)}{2}}\left[M_1(\eta)-M_0(\eta)+\right.$$
$$\left.+[M_2(\eta)-(M_1(\eta)-M_0(\eta))]\right]d\eta=0. \quad (3.28)$$

Здесь из формулы (3.25) получено:

$$z_{m1b}=z_{m1}|_{x=x_n}=2l\sqrt{-c_1}. \quad (3.29)$$

В формуле (3.28) z имеет значение (3.7).

Таким образом, оказывается,что если функция $M_2(\tau)$ будет удовлетворять получаемому из (3.28) интегральному уравнению

$$M_2\left(t-t_n-\frac{2l}{a}\right)+\frac{a}{J_0(z_{m1b})}e^{-Dal}\int_0^{t-t_n-\frac{2l}{a}}\frac{B}{2}J_0(z)e^{\frac{Da^2(t-tn-\eta)}{2}}M_2(\eta)\,d\eta=$$
$$=2\left[M_1\left(t-t_n-\frac{2l}{a}\right)-M_0\left(t-t_n-\frac{2l}{a}\right)\right], \quad (3.30)$$

то функция (3.22) будет удовлетворять первому краевому условию (2.3) при всех $t>t_n$. После выполнения преобразования

$$\tau=t-t_n-\frac{2l}{a} \quad (3.31)$$

интегральное уравнение (3.30) примет вид

$$M_2(\tau) + \frac{a}{J_0(z_{m1b})} e^{-Dal} \int_0^\tau \frac{B}{2} J_0 \left(a \left(\tau + \frac{2l}{a} - \eta \right) \sqrt{-c_1} \right) \times$$
$$\times\, e^{\frac{Da^2\left(\tau+\frac{2l}{a}-\eta\right)}{2}} M_2(\eta)\, d\eta = 2[M_1(\tau) - M_0(\tau)]. \quad (3.32)$$

Из уравнения (3.41) и свойств (3.14) и (3.30) функций $M_0(\tau)$ и $M_1(\tau)$ следует, что функция $M_2(\tau)$ обладает свойством

$$M_2(\tau) \equiv 0,\ \tau < 0. \quad (3.33)$$

Используя свойства (3.10), (3.20) и (3.33) функций $M_0(\tau)$, $M_1(\tau)$ и $M_2(\tau)$, так же, как и для функции $u_0(x,t)$, можно показать, что функция (3.26) удовлетворяет нулевым начальным условиям (2.2).

Таким образом, в области $0 < x - x_n < l, t > t_n$ функция (3.22) удовлетворяет всем условиям постановки краевой задачи, кроме второго краевого условия (2.3). Учитывая, что функция $u_0(x,t) + u_1(x,t)$ удовлетворяет второму краевому условию (2.3), нужно, чтобы функция $u_2(x,t)$ удовлетворяла краевому условию

$$u_2(x_n + l, t) = 0,\ t > t_n. \quad (3.34)$$

Подстановка функции $u_2(x,t)$ в левую часть краевого условия (3.34) приводит к равенству

$$u_2(x_n + l, t) = J_0(z_{m1k}) e^{-\frac{B}{2}l} e^{\frac{Da}{2}3l} \sum_{i=0}^{2} (-1)^i M_i \left(t - t_n - \frac{3l}{a} \right) +$$
$$+\, a e^{-\frac{B}{2}l} \int_0^{t-t_n-\frac{3l}{a}} \left[\frac{B}{2} J_0(z) + c_1 \frac{l}{z} J_1(z) \right] e^{\frac{Da^2(t-tn-\eta)}{2}} \sum_{i=0}^{2} (-1)^i M_i(\eta)\, d\eta. \quad (3.35)$$

При $t - t_n < \frac{3l}{a}$, ввиду отрицательности аргументов функций M_i и верхних пределов интегрирования, на основании свойств (3.10), (3.20) и (3.33) функций M_i заключаем, что выражение (3.35) будет равно нулю, то есть функция (3.22) будет удовлетворять второму краевому условию (2.3). При $t - t_n > \frac{3l}{a}$ выражение (3.35) будет отлично от нуля и с целью удовлетворения второму краевому условию (2.3) строим решение в виде

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t) + u_3(x,t), \quad (3.36)$$

где по (3.24) при $n = 2$

$$u_3(x,t) = e^{\frac{-B(x-x_n)}{2}} e^{\frac{-Da(x-x_n-4l)}{2}} J_0(z_{p2}) \times$$
$$\times \sum_{i=0}^{3} (-1)^{i+1} M_i \left(t - t_n + \frac{x - x_n - 4l}{a} \right) -$$
$$-\, a e^{\frac{-B(x-x_n)}{2}} \int_0^{t-t_n+\frac{x-x_n-4l}{a}} \left[-\frac{B}{2} J_0(z) - \right.$$
$$\left. -c_1 \frac{x - x_n}{z} J_1(z) \right] e^{\frac{Da^2(t-tn-\eta)}{2}} \sum_{i=0}^{3} (-1)^{i+1} M_i(\eta)\, d\eta \quad (3.37)$$

с неизвестной функцией $M_3(\tau)$. Функция $u_3(x,t)$ удовлетворяет уравнению (2.1) при произвольных функциях $M_0(\tau)$, $M_1(\tau)$, $M_2(\tau)$ и $M_3(\tau)$. Сумма функций $u_3(x,t)$ и $u_2(x,t)$ должна удовлетворять краевому условию

$$u_3(x_n+l,t)+u_2(x_n+l,t)=0 \quad t>t_n. \tag{3.38}$$

Заметим, что из формулы (3.25) следует с учетом сделанных выше обозначений, что справедливо равенство:

$$z_{p,n+1,k}=z_{mnk}, \tag{3.39}$$

так как

$$z_{pnk}=z_{pn}|_{x=l+x_n}=l\sqrt{c_1[1-(2n-1)^2]};$$
$$z_{mnk}=z_{mn}|_{x=l+x_n}=2l\sqrt{c_1[1-(2n-1)^2]}. \tag{3.40}$$

Поэтому, подставляя функции (3.26) и (3.37) в краевое условие (3.38), получим:

$$\begin{gathered}-J_0(z_{m1b})e^{-\frac{B2}{l}}e^{\frac{Da}{3}3l}\left[\sum_{i=0}^{3}(-1)^{i+1}M_i\left(t-t_n-\frac{3l}{a}\right)-\right.\\ \left.-\sum_{i=0}^{2}(-1)^iM_i\left(t-t_n-\frac{3l}{a}\right)\right]+ae^{-\frac{B}{2}l}\int_0^{t-t_n-\frac{3l}{a}}\left[\frac{B}{2}J_0(z)+c_1\frac{l}{z}J_1(z)\right]\times\\ \times e^{\frac{Da^2(t-tn-\eta)}{2}}\left[\sum_{i=0}^{3}(-1)^{i+1}M_i(\eta)+\sum_{i=0}^{2}(-1)^iM_i(\eta)\right]d\eta=0.\end{gathered} \tag{3.41}$$

Из (3.41) получаем интегральное уравнение для определения функции M_3:

$$\begin{gathered}-M_3\left(t-t_n-\frac{3l}{a}\right)+\frac{a}{J_0(z_{m1b})}e^{\frac{-3Dal}{2}}\int_0^{t-t_n-\frac{3l}{a}}\left[\frac{B}{2}J_0(z)\right.\\ \left.+c_1\frac{l}{z}J_1(z)\right]e^{\frac{Da^2(t-tn-\eta)}{2}}M_3(\eta)\,d\eta=-2\sum_{i=0}^{2}(-1)^iM_i\left(t-t_n-\frac{3l}{a}\right).\end{gathered} \tag{3.42}$$

В уравнении (3.42)

$$z=\sqrt{c_1[l^2-a^2((t-t_n)-\eta)^2]}. \tag{3.43}$$

Таким образом, если функция M_3 является решением интегрального уравнения (3.42), функция (3.36) будет удовлетворять второму краевому условию (2.3) при всех t. Выполнив в уравнении (3.42) преобразование

$$\tau=t-t_n-\frac{3l}{a}, \tag{3.44}$$

приведем его к виду

$$\begin{gathered}-M_3(\tau)+\frac{a}{J_0(z_{m1b})}e^{\frac{-3Dal}{2}}\int_0^{\tau}\left[\frac{B}{2}J_0(z)\right.\\ \left.+c_1\frac{l}{z}J_1(z)\right]e^{\frac{Da^2(t-tn-\eta)}{2}}M_3(\eta)\,d\eta=-2\sum_{i=0}^{2}(-1)^iM_i(\tau).\end{gathered} \tag{3.45}$$

где

$$z = \sqrt{c_1 \left[l^2 - a^2(\tau + \frac{3l}{a} - \eta)^2 \right]}. \tag{3.46}$$

Из свойств (3.10), (3.20) и (3.33) функций $M_0(\tau)$, $M_1(\tau)$, и $M_2(\tau)$, а также уравнения (3.45) следует, что функция $M_3(\tau)$ обладает свойством

$$M_3(\tau) \equiv 0, \quad \tau < 0. \tag{3.47}$$

В свою очередь, из этих свойств, так же как и для функции $u_0(x,t)$ следует, что функция (3.36) удовлетворяет начальным условиям (2.2).

Продолжив построение отраженных волн аналогичным способом, мы находим, что решением рассматриваемой краевой задачи будет функция

$$\begin{aligned} u(x,t) = &\sum_{n=0}^{\infty} \Big\{ e^{\frac{-B(x-x_n)}{2}} e^{\frac{Da(x-x_n+2nl)}{2}} J_0(z_{mn}) \times \\ &\times \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i M_i \left(t - t_n - \frac{x - x_n + 2nl}{a} \right) - ae^{\frac{-B(x-x_n)}{2}} \int_0^{t-t_n-\frac{x-x_n+2nl}{a}} \left[-\frac{B}{2} J_0(z) - \right. \\ &\left. - c_1 \frac{x-x_n}{z} J_1(z) \right] e^{\frac{Da^2(t-tn-\eta)}{2}} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i M_i(\eta)\, d\eta \Big\} - \\ &- \sum_{n=0}^{\infty} \Bigg\{ e^{\frac{-B(x-x_n)}{2}} e^{\frac{-Da(x-x_n-2nl)}{2}} J_0(z_{pn}) \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^{i+1} M_i \left(t - t_n + \frac{x - x_n - 2nl}{a} \right) + \\ &+ ae^{\frac{-B(x-x_n)}{2}} \int_0^{t-t_n+\frac{x-x_n-2nl}{a}} \left[-\frac{B}{2} J_0(z) - c_1 \frac{x-x_n}{z} J_1(z) \right] e^{\frac{Da^2(t-tn-\eta)}{2}} \times \\ &\times \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^{i+1} M_i(\eta)\, d\eta \Bigg\}, \end{aligned} \tag{3.48}$$

в которой $M_0(\tau)$ является решением интегрального уравнения (3.9), а остальные функции $M_i(\tau)$ являются решениями следующих интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} M_{2n}(\tau) + \frac{a}{J_0(z_{mnb})} e^{-Danl} \int_0^{\tau} \frac{B}{2} J_0 \left(a \left(\tau + \frac{2nl}{a} - \eta \right) \sqrt{-c_1} \right) \times \\ \times e^{\frac{Da^2(\tau + \frac{2nl}{a} - \eta)}{2}} M_{2n}(\eta)\, d\eta = -2 \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^i M_i(\tau); \end{aligned} \tag{3.49}$$

$$\begin{aligned} M_{2n-1}(\tau) + \frac{a}{J_0(z_{mnk})} e^{-Dal\frac{2n-l}{2}} \int_0^{\tau} \left[\frac{B}{2} J_0(z) + \right. \\ \left. + c_1 \frac{l}{z} J_1(z) \right] e^{\frac{Da^2(\tau + \frac{(2n-1)l}{a} - \eta)}{2}} M_{2n-1}(\eta)\, d\eta = 2 \sum_{i=0}^{2(n-1)} (-1)^i M_i(\tau). \end{aligned} \tag{3.50}$$

В уравнениях (3.50) следует z брать при $x = x_n + l$, то есть здесь

$$z|_{x=l+x_n} = \sqrt{c_1[l^2 - a^2(t - t_n - \eta)^2]} = \\ = \sqrt{c_1\left[l^2 - a^2\left(\tau + \frac{(2n-1)l}{a} - \eta\right)^2\right]}. \quad (3.51)$$

Параметр τ в уравнениях (3.49) и (3.50) имеет соответственно следующие представления: $\tau = t - t_n - \frac{2nl}{a}$; $\tau = t - t_n - \frac{(2n-1)l}{a}$. При этом все функции $M_n(\tau)$ обладают свойствами

$$M_n(\tau) \equiv 0, \tau < 0, n = 1, 2, \ldots \quad (3.52)$$

В силу этих свойств, при каждом фиксированном $t - t_n = T$ в формуле (3.48) отличным от нуля будет конечное число слагаемых. В самом деле, в суммах в формуле (3.48) каждое из слагаемых при выполнении условий (3.1), (3.52) становится равным нулю, если аргументы функций $M_n(\tau)$ и верхний предел интегрирования будут отрицательными. Для первой суммы в формуле (3.48) условие отрицательности верхнего предела интегрирования при $t-t_n = T$ имеет вид:

$$T - \frac{x - x_n + 2nl}{a} < 0, \quad (3.53)$$

откуда следует:

$$n > \frac{aT}{2l} - \frac{x - x_n}{2l} \quad (3.54)$$

и, поскольку в области отыскания решения $x - x_n < l$, получаем, что при всех n, удовлетворяющих условию

$$n > \frac{aT}{2l} - \frac{l}{2}, \quad (3.55)$$

все слагаемые в первой сумме формулы (3.48) будут равны нулю. Иными словами, суммирование в первой сумме формулы (3.48) нужно производить в этом случае не до бесконечности, а до $N - 1$, где N — наименьшее натуральное число, удовлетворяющее неравенству (3.55). Аналогично, условие отрицательности верхнего предела интегрирования при $t - t_n = T$ имеет вид:

$$T + \frac{x - x_n - 2nl}{a} < 0, \quad (3.56)$$

откуда следует

$$n > \frac{aT}{2l} + \frac{x - x_n}{2l}. \quad (3.57)$$

Но так как в области интегрирования $x - x_n > 0$, из (3.57) следует, что при

$$n > \frac{aT}{2l} \quad (3.58)$$

все слагаемые во второй сумме формулы (3.48) будут равны нулю. То есть, суммирование во второй сумме формулы (3.48) нужно производить в этом случае до $N1 - 1$; $N1$ — наименьшее натуральное число, удовлетворяющее неравенству (3.58). Все слагаемые в формуле (3.48) являются решениями уравнения (2.1). А так как для каждого фиксированного t число слагаемых в формуле (3.48) конечно, дифференцирование в формуле (3.48) можно выполнять почленно. Поэтому функция (3.48) является решением уравнения (2.1). Из формулы (3.48) непосредственно следует, что при $t-tn=0$ и $0<x-x_n<l$ аргументы функций $M_n(\tau)$ и верхние пределы интегрирования всех интегралов становятся отрицательными. Значит, на основании свойств (3.1) и (3.52) функций $M(\tau)$ и $M_n(\tau)$ получаем из (3.48) $u(x,t_n)=0$. Таким образом, функция (3.48) удовлетворяет первому начальному условию (2.2). Продифференцируем функцию (3.48) по t. Получим:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}= \\
&=\sum_{n=0}^{\infty} e^{\frac{-B(x-x_n)}{2}}\left\{e^{\frac{Da(x-x_n+2nl)}{2}}J_0(z_{mn})\sum_{i=0}^{2n}(-1)^i M_i'\left(t-t_n-\frac{x-x_n+2nl}{a}\right)-\right.\\
&\qquad -a\left[\left[-\frac{B}{2}J_0(z_{mn})-c_1(x-x_n)\frac{J_1(z_{mn})}{z_{mn}}\right]\times\right.\\
&\qquad\left.\times\sum_{i=0}^{2n}(-1)^i M_i\left(t-t_n-\frac{x-x_n+2nl}{a}\right)\right]+\\
&+\int_0^{t-t_n-\frac{x-x_n+2nl}{a}}\left\{\frac{Da^2}{2}\left[-\frac{B}{2}J_0(z)-c_1\frac{x-x_n}{z}J_1(z)\right]-\frac{B}{2}a^2c_1\frac{t-t_n-\eta}{z}J_1(z)-\right.\\
&\left.\left.-a^2c_1^2\frac{(x-x_n)(t-t_n-\eta)}{z^2}\left(J_0''(z)-\frac{J_0'(z)}{z}\right)\right\}e^{\frac{Da^2(t-tn-\eta)}{2}}\sum_{i=0}^{2n}(-1)^i M_i(\eta)\,d\eta\right\}-\\
&\qquad-\sum_{n=0}^{\infty}e^{\frac{-B(x-x_n)}{2}}\times\\
&\times\left\{e^{\frac{-Da(x-x_n-2nl)}{2}}J_0(z_{pn})\sum_{i=0}^{2n-1}(-1)^{i+1}M_i'\left(t-t_n+\frac{x-x_n-2nl}{a}\right)-\right.\\
&\qquad -a\left[\left[-\frac{B}{2}J_0(z_{pn})-c_1(x-x_n)\frac{J_1(z_{pn})}{z_{pn}}\right]\times\right.\\
&\qquad\left.\times\sum_{i=0}^{2n-1}(-1)^{i+1}M_i\left(t-t_n+\frac{x-x_n-2nl}{a}\right)\right]+\\
&\qquad+\int_0^{t-t_n+\frac{x-x_n-2nl}{a}}\left\{\frac{Da^2}{2}\left[-\frac{B}{2}J_0(z)-c_1\frac{x-x_n}{z}J_1(z)\right]-\right.\\
&\qquad-\frac{B}{2}a^2c_1\frac{t-t_n-\eta}{z}J_1(z)-\\
&\qquad\left.-a^2c_1^2\frac{(x-x_n)(t-t_n-\eta)}{z^2}\left(J_0''(z)-\frac{J_0'(z)}{z}\right)\right\}e^{\frac{Da^2(t-tn-\eta)}{2}}\times\\
&\qquad\left.\times\sum_{i=0}^{2n-1}(-1)^{i+1}M_i(\eta)\,d\eta\right\}. \qquad (3.59)
\end{aligned}$$

Из равенства (3.59) непосредственно следует, что при $t-t_n=0$ и $0<x-x_n<l$

верхние пределы интегрирования всех интегралов и аргументы всех функций $M_i(\tau)$ и $M_i'(\tau)$ в нем становятся отрицательными. Значит, на основании свойств (3.1) и (3.52) функций $M(\tau)$ и $M_i(\tau)$ получаем из (3.58):

$$u_t(x,t_n)=0.$$

Таким образом, функция (3.48) удовлетворяет и второму начальному условию (2.2). С целью проверки удовлетворения функцией (3.48) краевым условиям (2.3) вычислим значение этой функции при $x-x=0$. Учтем, что при таком значении x справедливо равенство

$$z_{mnb}=z_{pnb}.$$

Первое слагаемое в первой сумме формулы (3.48) запишем отдельно, а оставшиеся две суммы объединим в одну. Получим:

$$\begin{aligned}u(x_n,t)&=M_0(t-t_n)-a\int_0^{t-t_n}-\frac{B}{2}J_0(z)e^{\frac{Da^2(t-tn-\eta)}{2}}M_0(\eta)\,d\eta+\\&+\sum_{n=0}^{\infty}\left\{e^{Danl}J_0(z_{mn})\left[\sum_{i=0}^{2n}(-1)^iM_i\left(t-t_n-\frac{2nl}{a}\right)-\right.\right.\\&\left.-\sum_{i=0}^{2n-1}(-1)^{i+1}M_i\left(t-t_n-\frac{2nl}{a}\right)\right]+\\&\left.+a\int_0^{t-t_n-\frac{2nl}{a}}\frac{B}{2}J_0(z)e^{\frac{Da^2(t-tn-\eta)}{2}}M_{2n}(\eta)\,d\eta\right\}.\end{aligned}\tag{3.60}$$

Слагаемое вне знака $\sum$ в формуле (3.60), в соответствии с интегральным уравнением (3.6), равно $M(t-t_n)$. В силу интегральных уравнений (3.49) все слагаемые под знаком $\sum$ обращаются в нуль.

Таким образом, получаем, что

$$u(x-x_n,t)=M_0(t-t_n),$$

то есть, что функция (3.48) удовлетворяет первому краевому условию (2.3). Вычисляя значение функции (3.48) в точке $x=x_n+l$, выполним во второй сумме замену индекса суммирования $n_1=n-1$ и объединим слагаемые под общим знаком суммы. Учтя при этом равенство (3.39), получим:

$$\begin{aligned}u(x_n+l,t)&=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\frac{B}{2}l}\left[e^{\frac{Da(2n+1)l}{2}}J_0(z_{mnk})\sum_{i=0}^{2n}(-1)^iM_i\left(t-t_n-\frac{(2n+1)l}{a}\right)-\right.\\&\left.-\sum_{i=0}^{2n+1}(-1)^{i+1}M_i\left(t-t_n-\frac{(2n+1)l}{a}\right)\right]+a\int_0^{t-t_n-\frac{(2n+1)l}{a}}\left[\frac{B}{2}J_0(z)+\right.\\&\left.+c_1\frac{l}{z}J_1(z)\right]e^{\frac{Da^2(t-tn-\eta)}{2}}\left[\sum_{i=0}^{2n}(-1)^iM_i(\eta)+\sum_{i=0}^{2n+1}(-1)^{i+1}M_i(\eta)\right]d\eta.\end{aligned}$$

В последней формуле общий член ряда представляется в виде

$$- e^{\frac{Da(2n+1)l}{2}} J_0(z_{mnk}) \left[M_{2n+1} \left(t - t_n - \frac{(2n+1)l}{a} \right) - \right.$$
$$\left. -2 \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^{i+1} M_i \left(t - t_n - \frac{(2n+1)l}{a} \right) \right] + +a \int_0^{t-t_n-\frac{(2n+1)l}{a}} \left[\frac{B}{2} J_0(z) + \right.$$
$$\left. + c_1 \frac{l}{z} J_1(z) \right] e^{\frac{Da^2(t-tn-\eta)}{2}} M_{2n+1}(\eta)\, d\eta$$

и поэтому на основании интегрального уравнения (3.50) он равен нулю. Таким образом, $u(x_n + l, t) = 0$, то есть функция (3.48) удовлетворяет и второму краевому условию (2.3). Следовательно, показано, что функция (3.48) удовлетворяет всем условиям постановки краевой задачи, то есть является ее решением.

Библиографические ссылки

1. *Остапенко В. А.* Краевая задача без начальных условий для телеграфного уравнения // В. А. Остапенко // Диференціальні рівняння та їх застосування, Днепропетровск : ДНУ. — 2008. — С. 3–17.
2. *Остапенко В. А.* Первая краевая задача для телеграфного уравнения в полуограниченной области // В. А. Остапенко // Диференціальні рівняння та їх застосування, Днепропетровск : ДНУ. — 2008. — С. 18–20.

Надійшла до редакції 25.10.2009