ISSN № 9125 0912. ВІСНИК ДНУ. Серія "Моделювання". № 8. 2013. Вип. 5. С. 47–61

Проблеми математичного моделювання
та теорії диференціальних рівнянь

УДК 517.9

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО СТАРТОВОГО КЕРУВАННЯ ВИРОДЖЕНИМ ПАРАБОЛІЧНИМ РІВНЯННЯМ

* І. Г. Баланенко, ** П. І. Когут

* *Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара, кафедра диференціальних рівнянь, вул. Казакова, 18/14, ДНУ, 49010, Дніпропетровськ, E-mail: balanenko-ig@rambler.ru*

** *Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара, кафедра диференціальних рівнянь, вул. Казакова, 18/14, ДНУ, 49010, Дніпропетровськ, E-mail: p.kogut@i.ua*

Досліджується задача стартового оптимального керування для виродженого параболічного рівняння зі змішаними крайовими умовами на межі області. Із залученням нерівності типу Харді – Пуанкаре показано, що така задача має єдиний оптимальний розв'язок у вагових просторах Соболєва. Отримано та обгрунтовано необхідні умови оптимальності.

Ключові слова: стартове керування, нерівність Харді – Пуанкаре, параболічне рівняння, необхідні умови оптимальності.

1. Вступ

Основним об'єктом дослідження даної праці виступає задача стартового керування виродженим параболічним рівнянням

$$\rho(x)\dot{y} - \nu \operatorname{div} \left(\rho(x)\nabla y\right) = f(t,x) \quad \text{в } (0,T)\times\Omega$$

зі змішаними крайовими умовами на межі області. Початково-крайові задачі для вироджених параболічних рівнянь зазвичай виникають в задачах моделювання нестаціонарної дифузії з виродженням [11], в задачах дифузії на сингулярних та комбінованих структурах [5], а також в імовірнісних задачах, де ваговою функцією $\rho = \rho(x)$ виступає реалізація стохастично однорідного випадкового поля [6]. Характерною рисою вироджених параболічних рівнянь та пов'язаних із ними початково-крайових задач є та обставина, що проблема їх розв'язності суттєво залежить від властивостей вагової функції ρ. Той факт, що функція ρ може бути необмеженою на області Ω чи досягати нуля на підмножинах нульової міри Лебега, означає, що диференціальний оператор $\operatorname{div}(\rho(x)\nabla)$ втрачає властивість коерцитивності та неперервності на $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$. У результаті, наведені задачі можуть успадковувати неєдиність слабких розв'язків, ефект Лаврентьєва та інші ефекти, притаманні некоректним задачам математичної фізики.

Дана стаття є логічним продовженням попередньої публікації авторів [2], де розглядалася проблема граничного оптимального керування подібними об'єктами. Як відомо (див., напр., [1,5]), базовим у теорії початково-крайових задач для вироджених параболічних рівнянь є поняття вагового простору Соболєва $W_0^{1,2}(\Omega;\rho\,dx)$. Оскільки простір фінітних функцій $C_0^\infty(\Omega)$ не є в загальному випадку щільним у $W_0^{1,2}(\Omega;\rho\,dx)$, то ця обставина породжує суттєві труднощі в обгрунтуванні проблеми єдиності слабких розв'язків таких задач та отриманні відповідних апріорних оцінок для них. У зв'язку з цим автори показують, що таке обгрунтування стає можливим, якщо вагову функцію $\rho = \rho(x)$ наділити певними додатковими властивостями, що не виводять її з класу необмежених та вироджених на Ω функцій. Такою умовою, як буде показано далі, виступає умова приналежності ρ до класу функцій потенціального типу. В результаті встановлено, що за виконання такого припущення на вагову функцію $\rho = \rho(x)$ задача оптимального стартового керування для вихідного виродженого параболічного рівняння має єдиний оптимальний розв'язок у вагових просторах Соболєва. Для цього розв'язку отримано та обгрунтовано апріорні оцінки та необхідні умови оптимальності.

2. Основні позначення та факти

Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$ — обмежена відкрита підмножина з достатньо регулярною межею $\partial\Omega$. Нехай $Q = (0,T) \times \Omega$ є циліндром в $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^N$, де $T < +\infty$. Через $\Sigma = (0,T) \times \partial\Omega$ позначимо його бокову поверхню. Всюди далі будемо позначати через $C_0^\infty(\Omega)$ локально опуклий простір усіх нескінченно диференційовних функцій з компактними носіями в Ω і називати його простором фінітних функцій. Нехай $H_0^1(\Omega)$ є простором Соболєва, який утворено замиканням множини $C_0^\infty(\Omega)$ за нормою

$$\|y\|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla y(x)|^2_{\mathbb{R}^N}\,dx\right)^{1/2}.$$

Нехай функція $\rho : \Omega \to \mathbb{R}$ задовольняє умови: $\rho > 0$ майже скрізь (м. с.) на Ω і при цьому

$$\rho \in L^1(\Omega), \quad \rho^{-1} \in L^1(\Omega). \tag{2.1}$$

Зауважимо, що в загальному випадку $\rho + \rho^{-1} \notin L^\infty(\Omega)$. Отже, функцію ρ можна утотожнити з мірою Радона на Ω, поклавши $\rho(E) = \int\limits_E \rho(x)\,dx$ для довільної вимірної множини $E \subset \Omega$. З функцією $\rho : \Omega \to \mathbb{R}$ надалі будемо пов'язувати вагові гільбертові простори $L^2(\Omega,\rho\,dx)$ та $L^2(\Omega,\rho^{-1}\,dx)$, де зокрема $L^2(\Omega,\rho\,dx)$ є гільбертовим простором вимірних функцій $f : \Omega \to \mathbb{R}$, для яких

$$\|f\|^2_{L^2(\Omega,\rho\,dx)} = (f,f)_{L^2(\Omega,\rho\,dx)} = \int_\Omega f^2\rho\,dx < +\infty.$$

Нехай межа області Ω розбита на дві підмножини додатної міри $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$. Покладемо далі $\Sigma_D = (0,T) \times \Gamma_D$ та $\Sigma_N = (0,T) \times \Gamma_N$. Введемо до розгляду функціональний простір $C_0^\infty(\mathbb{R}^N;\Gamma_D) = \left\{\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \;:\; \varphi = 0 \text{ on } \Gamma_D\right\}$.

Нехай $H_0^1(\Omega;\Gamma_D)$ є замиканням множини $C_0^\infty(\mathbb{R}^N;\Gamma_D)$ відносно норми $\|y\| = \left(\int_\Omega |\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N}\, dx\right)^{1/2}$. Позначимо через $H^{-1}(\Omega;\Gamma_D)$ дуальний простір до простору Соболєва $H_0^1(\Omega;\Gamma_D)$. Нехай простори $W^{1,1}(\Omega,\Gamma_D)$ та $\mathcal{W}_\rho$ утворені як замикання множини $C_0^\infty(\mathbb{R}^N;\Gamma_D)$ за нормами

$$\|y\|_{W^{1,1}(\Omega,\Gamma_D)} = \|y\|_{L^1(\Omega} + \|\nabla y\|_{L^1(\Omega)^N}$$

та

$$\|y\|_{\mathcal{W}_\rho} = \int_\Omega y^2 \rho\, dx + \int_\Omega \left|\nabla y + \frac{y}{2}\nabla \ln\rho\right|^2_{\mathbb{R}^N} \rho\, dx$$

відповідно. Отже, включення $y \in \mathcal{W}_\rho$ гарантує такі властивості: $y \in L^2(\Omega,\rho\, dx)$ та $\left(\nabla y + \frac{1}{2}(\nabla \ln\rho)\, y\right) \in L^2(\Omega,\rho\, dx)^N$. Більше того, якщо додатково до умов (2.1), має місце включення

$$\rho^{-1}\left|\nabla \ln\rho\right|^2_{\mathbb{R}^N} \in L^1(\Omega),$$

то, як випливає з наступних нерівностей:

$$\left(\int_\Omega |y(x)|\, dx\right)^2 \le \int_\Omega y^2(x)\rho(x)\, dx \|\rho^{-1}\|_{L^1(\Omega)},$$

$$\left(\int_\Omega \left|\nabla y(x)\right|_{\mathbb{R}^N} dx\right)^2 \le 2\left(\int_\Omega \frac{y}{2}\left|\nabla \ln\rho\right|_{\mathbb{R}^N} dx\right)^2 +$$

$$+2\left(\int_\Omega \left|\nabla y(x) + \frac{y}{2}\nabla \ln\rho\right|_{\mathbb{R}^N} dx\right)^2 \le \frac{1}{2}\int_\Omega y^2(x)\rho(x)\, dx \|\rho^{-1}\left|\nabla \ln\rho\right|^2_{\mathbb{R}^N}\|_{L^1(\Omega)} +$$

$$+2\int_\Omega \left|\nabla y(x) + \frac{y}{2}\nabla \ln\rho\right|^2 \rho(x)\, dx\, \|\rho^{-1}\|_{L^1(\Omega)},$$

$\mathcal{W}_\rho \subset W^{1,1}(\Omega,\Gamma_D)$, а отже простір $\mathcal{W}_\rho$ є повним відносно норми $\|\cdot\|_{\mathcal{W}_\rho}$.

Наведемо один результат, який стосується нерівності типу Харді – Пуанкаре. Класична форма нерівності Харді стверджує, що для будь-якого $y \in H^1(\mathbb{R}^N)$, $N \ge 3$, справедливо: $y|x|^{-1}_{\mathbb{R}^N} \in L^2(\mathbb{R}^N)$ і при цьому

$$\lambda_* \int_{\mathbb{R}^N} \frac{y^2}{|x|^2_{\mathbb{R}^N}}\, dx \le \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N}\, dx,$$

де стала $\lambda_* = (N-2)^2/4$ є оптимальною і не може бути поліпшеною на множині $y \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Аналогічний результат має місце і для елементів $y \in H_0^1(\Omega)$, якщо Ω є відкритою підмножиною простору $\mathbb{R}^N$, $N \ge 3$. Разом з тим, цю нерівність можна уточнити в такому сенсі (див. [8, 12]). Нехай Ω — обмежена відкрита підмножина $\mathbb{R}^N$, $N \ge 2$, і нехай x^* — її довільна внутрішня точка. Тоді знайдеться стала $C(\Omega) > 0$ така, що для всіх $y \in H_0^1(\Omega)$ маємо:

$$\int_\Omega \left[|\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N} - \lambda_* \frac{y^2}{|x - x^*|^2_{\mathbb{R}^N}}\right] dx \ge C(\Omega)\int_\Omega y^2\, dx. \tag{2.2}$$

Тут оптимальне значення сталої $C(\Omega)$ для кулі $\Omega = B_R(0)$ дається правилом $C(B_R(0)) = z_0^2/R^2$, де z_0 є найменшим нулем функції Бесселя $J_0(r)$, $z_0 = 0.57832\ldots$. У випадку довільної обмеженої множини Ω, як C можна брати сталу для рівновеликої за об'ємом з Ω кулі $B_R(0)$.

Оскільки співвідношення (2.2) при $N = 2$ дає класичну нерівність Пуанкаре, то (2.2) називають нерівністю Харді – Пуанкаре (Hardy – Poincaré Inequality). Зауважимо також, що нерівність (2.2) можна узагальнити в такому сенсі. Нехай $\{x_1^*, x_2^*, \ldots, x_K^*\}$ є довільною сукупністю внутрішніх точок множини Ω. Тоді

$$\int_\Omega \left[|\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N} - \frac{\lambda_*}{K} \left(\sum_{i=1}^K \frac{1}{|x - x_i^*|^2_{\mathbb{R}^N}} \right) y^2 \right] dx \geq C(\Omega) \int_\Omega y^2\, dx, \tag{2.3}$$

де стала $C(\Omega)$ є такою ж, як і в (2.2).

Зауваження 2.1. Нехай λ — довільна додатна стала така, що $\lambda < \lambda_*$. Тоді, залучаючи нерівність (2.3), приходимо до співвідношення:

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Big[|\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N} - \frac{\lambda}{K} \left(\sum_{i=1}^K \frac{1}{|x - x_i^*|^2_{\mathbb{R}^N}} \right) y^2 \Big] dx = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_*}\right) \int_\Omega |\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N}\, dx + \\ + \frac{\lambda}{\lambda_*} \int_\Omega \left[|\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N} - \frac{\lambda_*}{K} \left(\sum_{i=1}^K \frac{1}{|x - x_i^*|^2_{\mathbb{R}^N}} \right) y^2 \right] dx \geq \\ \geq \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_*}\right) \int_\Omega |\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N}\, dx + \frac{\lambda C(\Omega)}{\lambda_*} \int_\Omega y^2\, dx. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Отриманий результат означає, що вираз

$$|||y||| := \left(\int_\Omega \left[|\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N} - \frac{\lambda}{K} \left(\sum_{i=1}^K \frac{1}{|x - x_i^*|^2_{\mathbb{R}^N}} \right) y^2 \right] dx \right)^{1/2}$$

у випадку, коли $\lambda < \lambda_*$, можна брати як еквівалентну норму в просторі Соболєва $H_0^1(\Omega)$.

3. Постановка задачі оптимального стартового керування та її попередній аналіз

Нехай $y_{ad} \in L^2(\Omega)$, $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega, \rho^{-1}\, dx))$, та $u_0 \in L^2(\Omega)$ — задані функції. Нехай $\alpha > 0$ та $\nu \neq 0$ — фіксовані сталі. Нехай U_∂ — непорожня опукла замкнена підмножина в $L^2(\Omega)$. Нехай межа області Ω розбита на дві підмножини додатної міри $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$. Покладемо далі $\Sigma_D = (0, T) \times \Gamma_D$ та $\Sigma_N = (0, T) \times \Gamma_N$. Нехай $\mathbf{n}$ є одиничним вектором зовнішньої нормалі до бокової поверхні Σ_N.

Розглянемо в циліндрі Q наступну задачу оптимального керування для виродженого параболічного рівняння із змішаними крайовими умовами, в якій керуванням виступає початкова умова, а функцією спостереження є значення функції стану в кінцевий момент часу T:

$$I(u,y)=\frac{1}{2}\left\|y(T,\cdot)-\frac{y_{ad}}{\sqrt{\rho}}\right\|^2_{L^2(\Omega,\rho\,dx)}+\frac{1}{2}\|u-u_0\|^2_{L^2(\Omega)}\longrightarrow\inf, \tag{3.1}$$

$$\rho(x)\dot{y}-\nu\,\mathrm{div}\,(\rho(x)\nabla y)=f(t,x)\quad \text{в } Q=(0,T)\times\Omega, \tag{3.2}$$

$$y(t,x)=0\ \text{ на }\ \Sigma_D,\quad \sqrt{\rho}\,\frac{\partial y}{\partial\mathbf{n}}+\alpha y=0\ \text{ на }\ \Sigma_N, \tag{3.3}$$

$$\sqrt{\rho(x)}\,y(0,x)=u\ \text{ майже скрізь на }\ \Omega, \tag{3.4}$$

$$u\in U_\partial. \tag{3.5}$$

Тут позначено $\dot{y}(t,x)=\partial y(t,x)/\partial t$ та $\frac{\partial y}{\partial\mathbf{n}}=\sum_{i,j=1}^N\frac{\partial y}{\partial x_j}\cos(\mathbf{n},x_i)$.

Задача оптимального стартового керування (3.1)–(3.5) полягає у визначенні пари функцій $(u^0,y^0)\in L^2(\Omega)\times L^2(0,T;\mathcal{W}_\rho)$ (надалі її будемо називати оптимальною), яка б (в слабкому сенсі) задовольняла співвідношенням (3.2)–(3.5) і на якій функціонал (3.1) досягав би свого найменшого можливого значення. Для того, щоб показати, що така постановка є коректною для задачі оптимального керування (3.1)–(3.5), перейдемо у співвідношеннях (3.2)–(3.4) до нових змінних, поклавши (див. [2])

$$y(t,x)=\rho^\beta(x)v(t,x), \tag{3.6}$$

де значення параметра β буде обчислене нижче. Формальні перетворення дають $\nabla y=\beta v\rho^{\beta-1}\nabla\rho+\rho^\beta\nabla v$. Отже,

$$\begin{aligned}-\mathrm{div}\,(\rho\nabla y)&=-\,\mathrm{div}\,\left(\beta v\rho^\beta\nabla\rho+\rho^{\beta+1}\nabla v\right)=\\&=-\,\beta\rho^\beta\,(\nabla v,\nabla\rho)_{\mathbb{R}^N}-\beta\rho^\beta v\Delta\rho-\beta^2\rho^{\beta-1}v\|\nabla\rho\|^2_{\mathbb{R}^N}-\\&\quad-(1+\beta)\rho^\beta\,(\nabla v,\nabla\rho)_{\mathbb{R}^N}-\rho^{\beta+1}\Delta v=\\&=-\,\rho^{\beta+1}\Delta v-(1+2\beta)\rho^\beta\,(\nabla v,\nabla\rho)_{\mathbb{R}^N}-\\&\quad-\beta\rho^{\beta-1}\left(\rho\Delta\rho+\beta|\nabla\rho|^2_{\mathbb{R}^N}\right)v.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Поклавши в (3.7) $\beta=-1/2$, знаходимо:

$$-\mathrm{div}\,(\rho\nabla y)=-\sqrt{\rho}\,\Delta v-\frac{1}{2}\sqrt{\rho}\,V(x)v,$$

де позначено $V(x)=-\Delta\rho/\rho+|\nabla\rho|^2_{\mathbb{R}^N}/(2\rho^2)$. Далі зауважимо, що

$$|\nabla\ln\rho|^2_{\mathbb{R}^N}=\frac{|\nabla\rho|^2_{\mathbb{R}^N}}{\rho^2},\quad \Delta\ln\rho=-\frac{|\nabla\rho|^2_{\mathbb{R}^N}}{\rho^2}+\frac{\Delta\rho}{\rho}.$$

В результаті, маємо наступне подання для функції $V(x)$:

$$V(x)=-\Delta\ln\rho(x)-\frac{1}{2}|\nabla\ln\rho(x)|^2_{\mathbb{R}^N}. \tag{3.8}$$

Означення 3.1. Будемо казати, що $\rho : \Omega \to \mathbb{R}_+$ є ваговою функцією потенціального типу, якщо

(i) $\rho > 0$ майже скрізь (м.с.) на Ω, $\rho \in L^1(\Omega)$, $\rho^{-1} \in L^1(\Omega)$;

(ii) існує підобласть $\Omega_* \subset \Omega$ така, що $\rho \in C^1(\overline{\Omega \setminus \Omega_*})$, де $\operatorname{dist}(\partial\Omega, \partial\Omega_*) > \delta$ при деякому $\delta > 0$ і при цьому виконуються наступні нерівності:

$$\rho(x) \geq \sigma \quad \text{на} \quad \Omega \setminus \Omega_* \quad \text{при деякому} \quad \sigma > 0, \tag{3.9}$$

$$0 < \frac{\alpha}{\sqrt{\rho}} - \frac{1}{2}\frac{\partial \ln \rho}{\partial \mathbf{n}} \quad \text{на} \quad \Sigma_N; \tag{3.10}$$

(iii) існують стала $C > 0$ та система внутрішніх точок $\{x_1^*, x_2^*, \dots, x_K^*\}$ множини Ω) такі, що

$$-C \leq \overbrace{-\Delta \ln \rho(x) - \frac{1}{2}|\nabla \ln \rho(x)|^2_{\mathbb{R}^N}}^{V(x)} < \frac{2\lambda_*}{K}\left(\sum_{i=1}^{K} \frac{1}{|x - x_i^*|^2_{\mathbb{R}^N}}\right) =$$
$$= \frac{(N-2)^2}{2K}\left(\sum_{i=1}^{K} \frac{1}{|x - x_i^*|^2_{\mathbb{R}^N}}\right) \quad \forall\, x \in \Omega. \tag{3.11}$$

Таким чином, якщо функція $\rho : \Omega \to \mathbb{R}_+$ задовольняє умовам означення 3.1, то, залучаючи заміну змінних (3.6), приходимо до наступних співвідношень, які характеризують функцію v:

$$\dot{v} - \nu\,\Delta v - \frac{\nu}{2}V(x)\,v = \frac{1}{\sqrt{\rho}}\,f(t,x) \quad \text{в } Q = (0,T) \times \Omega, \tag{3.12}$$

$$v(t,x) = 0 \;\text{ на }\; \Sigma_D, \quad \frac{\partial v(t,x)}{\partial \mathbf{n}} + \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\rho}} - \frac{1}{2}\frac{\partial \ln \rho}{\partial \mathbf{n}}\right) v(t,x) = 0 \;\text{ на }\; \Sigma_N, \tag{3.13}$$

$$v(0,x) = u(x) \;\text{ майже скрізь на }\; \Omega, \tag{3.14}$$

де функція $V(x)$ задана правилом (3.8).

Беручи до уваги перетворення, пов'язані з наведеною заміною змінних, введемо до розгляду нову задачу оптимального керування:

$$J(u,v) = \frac{1}{2}\,\|v(T,\cdot) - y_{ad}\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|u - u_0\,\|^2_{L^2(\Omega)} \longrightarrow \inf, \tag{3.15}$$

$$\text{при обмеженнях (3.12)–(3.14) та за умови, що} \tag{3.16}$$

$$u \in U_\partial \subset L^2(\Omega). \tag{3.17}$$

Означення 3.2. Нехай $u \in U_\partial$ — довільне допустиме керування для задачі (3.15)–(3.17). Функцію $v \in L^2(0,T; H^1_0(\Omega;\Gamma_D))$ будемо називати слабким розв'язком задачі (3.12)–(3.14), якщо виконуються такі умови:

(a) для кожного $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}; C_0^\infty(\mathbb{R}^N; \Gamma_D))$ та довільних $0 \le t_1 < t_2 \le T$ справджується інтегральна тотожність

$$\int_{t_1}^{t_2} (\dot{v}, \varphi)_{L^2(\Omega)}\, dt + \nu \int_{t_1}^{t_2} (\nabla v, \nabla \varphi)_{L^2(\Omega)^N}\, dt - \frac{\nu}{2} \int_{t_1}^{t_2} (V v, \varphi)_{L^2(\Omega)}\, dt + \\ + \nu \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma_N} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\rho}} - \frac{1}{2} \frac{\partial \ln \rho}{\partial \mathbf{n}} \right) v\varphi \, d\mathcal{H}^{N-1}\, dt = \\ = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{\sqrt{\rho}} f, \varphi \right)_{L^2(\Omega)} dt; \tag{3.18}$$

(b) при кожному $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N; \Gamma_D)$ має місце рівність

$$\lim_{t \to 0+} (v(t), \varphi)_{L^2(\Omega)} = (u, \varphi)_{L^2(\Omega)}\,. \tag{3.19}$$

У повній аналогії до теореми 3.2 з праці [2], можна встановити наступний результат (див. також [4, с. 75]).

Теорема 3.1. *Нехай $\rho : \Omega \to \mathbb{R}_+$ є ваговою функцією потенціального типу. Тоді при заданих $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega, \rho^{-1}\, dx))$ та $u \in L^2(\Omega)$ початково-крайова задача* (3.12)–(3.14) *має єдиний слабкий розв'язок $v = v(t, x)$ в сенсі означення 3.2 такий, що*

$$v \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega; \Gamma_D)) \quad i \quad \dot{v} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega; \Gamma_D)), \tag{3.20}$$

$$v \in C([0, T]; L^2(\Omega)). \tag{3.21}$$

Зауваження 3.1. Пов'яжемо із задачею (3.12)–(3.14) лінійний оператор $\mathcal{A} : H_0^1(\Omega; \Gamma_D) \to H^{-1}(\Omega; \Gamma_D)$, який означимо за правилом:

$$\langle \mathcal{A} v, y \rangle_{H^{-1}(\Omega; \Gamma_D); H_0^1(\Omega; \Gamma_D)} = [v, y]_\rho \quad \forall\, y, v \in H_0^1(\Omega; \Gamma_D), \tag{3.22}$$

де $[\cdot, \cdot]_\rho : H_0^1(\Omega; \Gamma_D) \times H_0^1(\Omega; \Gamma_D) \to \mathbb{R}$ є наступною білінійною формою

$$[v, y]_\rho = \int_\Omega \left[(\nabla v, \nabla y)_{\mathbb{R}^N} - \frac{1}{2} V(x) v y \right] dx + \int_{\Gamma_N} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\rho}} - \frac{1}{2} \frac{\partial \ln \rho}{\partial \mathbf{n}} \right) v y \, d\mathcal{H}^{N-1}. \tag{3.23}$$

Як випливає з наведеного вище, оператор $\mathcal{A}$ допускає наступне подання $\mathcal{A} = -\Delta - \frac{1}{2} V(x) I$ і визначає ізоморфізм між просторами

$$\left\{ v \in H_0^1(\Omega; \Gamma_D) \ : \ \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} + \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\rho}} - \frac{1}{2} \frac{\partial \ln \rho}{\partial \mathbf{n}} \right) v = 0 \ \text{ на } \ \Gamma_N \right\}$$

та $H^{-1}(\Omega; \Gamma_D)$ [2].

Даний факт у поєднанні з компактністю вкладень $H_0^1(\Omega; \Gamma_D)$ в $L^2(\Omega)$ та $L^2(\Omega)$ в $H^{-1}(\Omega; \Gamma_D)$ дозволяє отримати наступний висновок (див., напр., [10]):

звуження оператора на простір $L^2(\Omega)$ дає необмежений самоспряжений оператор, для якого обернений оператор є компактним. Більше того, в цьому випадку існує ортонормований в $L^2(\Omega)$ базис $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, який утворено власними функціями оператора $\mathcal{A}$, та монотонно неспадна послідовність власних значень

$$0 < \mu_1 \le \mu_2 \le \cdots \le \mu_k \le \cdots \to \infty$$

такі, що

$$-\Delta e_k - \frac{1}{2}V(x)e_k = \mu_k e_k \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{3.24}$$

$$e_k = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_D, \qquad \frac{\partial e_k}{\partial \mathbf{n}} + \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\rho}} - \frac{1}{2}\frac{\partial \ln\rho}{\partial \mathbf{n}}\right) e_k = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_N. \tag{3.25}$$

Далі введемо до розгляду наступні множини:

$$\Lambda = \Big\{(u,v) \in L^2(\Omega)\times L^2(0,T;H_0^1(\Omega;\Gamma_D)) \;\Big|\; u \in U_\partial, \text{ функція } v$$
$$\text{задовольняє тотожностям (3.18)–(3.19) при всіх } \; 0 \le t_1 < t_2 \le T\Big\}; \tag{3.26}$$

$$\Xi = \Big\{(u,y) \in L^2(\Omega)\times L^2(0,T;\mathcal{W}_\rho) \;\Big|\; u \in U_\partial,$$
$$\forall\,\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R};C_0^\infty(\mathbb{R}^N;\Gamma_D)),\ \forall\,\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N;\Gamma_D) \text{ та } \; 0 \le t_1 < t_2 \le T$$
$$\text{виконуються тотожності} \tag{3.27}$$
$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\rho\,\dot{y}, \frac{\varphi}{\sqrt{\rho}}\right)_{L^2(\Omega)} dt + \nu\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega \left(\nabla y, \nabla\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\rho}}\right)\right)_{\mathbb{R}^N} \rho\,dxdt +$$
$$+\nu\alpha\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Gamma_N} y\frac{\varphi}{\sqrt{\rho}}\,d\mathcal{H}^{N-1}\,dt = \int_{t_1}^{t_2}\left(f, \frac{\varphi}{\sqrt{\rho}}\right)_{L^2(\Omega)} dt,$$
$$\lim_{t\to 0+}\,(y(t),\psi)_{L^2(\Omega,\sqrt{\rho}\,dx)} = (u,\psi)_{L^2(\Omega)}\Big\}, \tag{3.28}$$

які будемо надалі називати множинами допустимих розв'язків задач оптимального керування (3.12)–(3.14) та (3.1)–(3.5), відповідно.

Зауваження 3.2. Надалі функцію $y \in L^2(0,T;\mathcal{W}_\rho)$, яка при кожних $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R};C_0^\infty(\mathbb{R}^N;\Gamma_D))$ та $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N;\Gamma_D)$ задовольняє співвідношенням (3.28), будемо називати слабким розв'язком початково-крайової задачі (3.2)–(3.4).

Означення 3.3. Будемо казати, що пари функцій $(u^0,v^0) \in \Lambda$ та $(u^0,y^0) \in \Xi$ є оптимальними розв'язками задач (3.12)–(3.14) та (3.1)–(3.5), відповідно, якщо

$$\inf_{(u,v)\in\Lambda} J(u,v) = J(u^0,v^0), \qquad \inf_{(u,y)\in\Xi} I(u,y) = I(u^0,y^0).$$

Наступний результат є центральним у даному розділі і показує, що означені задачі оптимального керування є в певному сенсі еквівалентними.

Теорема 3.2. *Нехай $\rho : \Omega \to \mathbb{R}_+$ є ваговою функцією потенціального типу. Нехай $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega,\rho^{-1}\,dx))$, $y_{ad} \in L^2(\Omega)$ та $u_0 \in L^2(\Omega)$ є заданими функціями. Тоді допустима пара $(u^0,v^0) \in \Lambda$ є оптимальною в задачі* (3.12)–(3.14) *в тому і тільки тому випадку, коли*

$$(u^0,y^0) := \left(u^0, \frac{v^0}{\sqrt{\rho}}\right) \tag{3.29}$$

є оптимальною парою для вихідної задачі оптимального керування (3.1)–(3.5) *на множині Ξ. При цьому виконується рівність*

$$\inf_{(u,v)\in\Lambda} J(u,v) = J(u^0,v^0) = I(u^0,y^0) = \inf_{(u,y)\in\Xi} I(u,y). \tag{3.30}$$

Доведення. Означимо на просторі $L^2(\Omega)\times L^2(0,T;\mathcal{W}_\rho)$ відображення $\mathcal{F}$ за правилом $\mathcal{F}(u,y) = \big(u, \sqrt{\rho}\,y\big)$. Для початку покажемо, що

$$\mathcal{F} : L^2(\Omega)\times L^2(0,T;\mathcal{W}_\rho) \to L^2(\Omega)\times L^2(0,T;H^1_0(\Omega;\Gamma_D)).$$

Справді, для довільної пари $(u,y) \in L^2(\Omega)\times L^2(0,T;\mathcal{W}_\rho)$ маємо $(u,v) = \mathcal{F}(u,y)$, де

$$\begin{aligned}
\|y\|^2_{L^2(0,T;\mathcal{W}_\rho)} &= \int_0^T\int_\Omega y^2\,\rho\,dxdt + \int_0^T\int_\Omega \left|\nabla y + \frac{y}{2}\nabla\ln\rho\right|^2_{\mathbb{R}^N}\rho\,dxdt = \\
&= \int_0^T\int_\Omega (\sqrt{\rho}\,y)^2\,dxdt + \int_0^T\int_\Omega \left|\sqrt{\rho}\,\nabla y + \frac{y}{2\sqrt{\rho}}\nabla\rho\right|^2_{\mathbb{R}^N}dxdt = \\
&= \|\sqrt{\rho}\,y\|^2_{L^2(Q)} + \int_0^T\int_\Omega \left|\nabla\left(\sqrt{\rho}\,y\right)\right|^2_{\mathbb{R}^N}dxdt = \|v\|^2_{L^2(0,T;H^1_0(\Omega;\Gamma_D))}.
\end{aligned}$$

Отже, як випливає з наведених співвідношень, $\mathcal{F}$ є ізометричним та бієктивним відображенням $L^2(\Omega)\times L^2(0,T;\mathcal{W}_\rho)$ на простір $L^2(\Omega)\times L^2(0,T;H^1_0(\Omega;\Gamma_D))$.

Далі покажемо, що $\mathcal{F}(\Xi) = \Lambda$. Нехай (u,y) — довільна пара множини Ξ і нехай $(u,v) = \mathcal{F}(u,y)$. Тоді при кожному $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N;\Gamma_D)$ має місце рівність

$$\lim_{t\to 0+}\left(y(t),\varphi\right)_{L^2(\Omega,\sqrt{\rho}\,dx)} = \lim_{t\to 0+}\left(v(t),\varphi\right)_{L^2(\Omega)} = (u,\varphi)_{L^2(\Omega)}. \tag{3.31}$$

Отже, залишається показати еквівалентність інтегральних тотожностей (3.18) та $(3.28)_1$. Для цього скористаємося наступними перетвореннями:

$$\begin{aligned}
\Delta v &= \operatorname{div}\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\nabla\rho\,y + \frac{1}{\sqrt{\rho}}\,\rho\,y\right) = \\
&= -\frac{|\nabla\rho|^2_{\mathbb{R}^N}}{4\rho\sqrt{\rho}}y + \frac{1}{2\sqrt{\rho}}\Delta\rho\,y + \frac{1}{\sqrt{\rho}}\operatorname{div}(\rho\nabla y) = \\
&= -\frac{1}{2}V(x)\sqrt{\rho}\,y + \frac{1}{\sqrt{\rho}}\operatorname{div}(\rho\nabla y),
\end{aligned} \tag{3.32}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial\mathbf{n}} &= \frac{\partial(\sqrt{\rho}\,y)}{\partial\mathbf{n}} = \frac{1}{2\sqrt{\rho}}\frac{\partial\rho}{\partial\mathbf{n}}y + \sqrt{\rho}\,\frac{\partial y}{\partial\mathbf{n}} \overset{\text{залучаючи } (3.3)_2}{=} \\
&= \left(\frac{1}{2}\frac{\partial\ln\rho}{\partial\mathbf{n}}\sqrt{\rho}\,y - \alpha y\right) = \left(\frac{1}{2}\frac{\partial\ln\rho}{\partial\mathbf{n}} - \frac{\alpha}{\sqrt{\rho}}\right)\sqrt{\rho}\,y.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

В результаті маємо:

$$
\begin{aligned}
0 = & \int_{t_1}^{t_2} (\dot{v}, \varphi)_{L^2(\Omega)} \, dt + \nu \int_{t_1}^{t_2} (\nabla v, \nabla \varphi)_{L^2(\Omega)^N} \, dt + \\
& + \frac{\nu}{2} \int_{t_1}^{t_2} (V v, \varphi)_{L^2(\Omega)} \, dt + \nu \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma_N} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\rho}} - \frac{1}{2} \frac{\partial \ln \rho}{\partial \mathbf{n}} \right) v\varphi \, d\mathcal{H}^{N-1} \, dt - \\
& - \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{\sqrt{\rho}} f, \varphi \right)_{L^2(\Omega)} dt = \\
= & \int_{t_1}^{t_2} (\sqrt{\rho} \dot{y}, \varphi)_{L^2(\Omega)} \, dt - \nu \int_{t_1}^{t_2} \langle \Delta(\sqrt{\rho}\, y), \varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega,\Gamma_D), H_0^1(\Omega,\Gamma_D)} \, dt - \\
& - \frac{\nu}{2} \int_{t_1}^{t_2} (V \sqrt{\rho}\, y, \varphi)_{L^2(\Omega)} \, dt + \nu \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma_N} \frac{\partial(\sqrt{\rho}\, y)}{\partial \mathbf{n}} \varphi \, d\mathcal{H}^{N-1} \, dt + \\
& + \nu \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma_N} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\rho}} - \frac{1}{2} \frac{\partial \ln \rho}{\partial \mathbf{n}} \right) \sqrt{\rho}\, y \varphi \, d\mathcal{H}^{N-1} \, dt - \\
& - \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{f}{\sqrt{\rho}}, \varphi \right)_{L^2(\Omega)} dt \overset{(3.32)-(3.33)}{=} \\
= & \int_{t_1}^{t_2} (\dot{y}, \varphi)_{L^2(\Omega, \rho^{1/2}\, dx)} \, dt - \nu \int_{t_1}^{t_2} \left\langle \operatorname{div}(\rho \nabla y), \frac{1}{\sqrt{\rho}} \varphi \right\rangle_{H^{-1}(\Omega,\Gamma_D), H_0^1(\Omega,\Gamma_D)} dt - \\
& - \int_{t_1}^{t_2} (f, \varphi)_{L^2(\Omega, \rho^{-1/2}\, dx)} \, dt = \\
= & \int_{t_1}^{t_2} \left(\rho\, \dot{y}, \frac{\varphi}{\sqrt{\rho}} \right)_{L^2(\Omega)} dt + \nu \int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega \left(\nabla y, \nabla \left(\frac{\varphi}{\sqrt{\rho}} \right) \right)_{\mathbb{R}^N} \rho \, dx dt + \\
& + \nu\alpha \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma_N} y \frac{\varphi}{\sqrt{\rho}} \, d\mathcal{H}^{N-1} \, dt - \int_{t_1}^{t_2} \left(f, \frac{\varphi}{\sqrt{\rho}} \right)_{L^2(\Omega)} dt. \qquad (3.34)
\end{aligned}
$$

Таким чином, інтегральні тотожності (3.18) та $(3.28)_1$ є еквівалентними. Отже, враховуючи отримані співвідношення (3.31), (3.31) та (3.34), робимо висновок: пара (u, y) належить множині Ξ тоді і тільки тоді, коли $F(u, y) = (u, v) \in \Lambda$. Для завершення залишається зауважити, що для довільної допустимої пари $(u, y) \in \Xi$ маємо:

$$
\begin{aligned}
I(u, y) = & \frac{1}{2} \left\| y(T, \cdot) - \frac{y_{ad}}{\sqrt{\rho}} \right\|^2_{L^2(\Omega, \rho\, dx)} + \frac{1}{2} \|u - u_0\|^2_{L^2(\Omega)} = \\
= & \frac{1}{2} \|\sqrt{\rho}\, y(T, \cdot) - y_{ad}\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2} \int_\Omega |u - u_0|^2 \, dx = J(u, v).
\end{aligned}
$$

Отже, має місце рівність $J(F(u, y)) = I(u, y)$, $\forall\, (u, y) \in \Xi$, що, в силу бієктивності відображення $\mathcal{F}$, гарантує виконання співвідношення (3.30). $\square$

4. Теорема існування та умови оптимальності

Для доведення розв'язності задачі оптимального керування (3.1)–(3.5) скористаємося відомими результатами теорії оптимального керування системами з розподіленими параметрами (див., напр., [9]).

Теорема 4.1. *Нехай $\rho : \Omega \to \mathbb{R}_+$ є ваговою функцією потенціального типу. Нехай $f \in L^2(0,T; L^2(\Omega, \rho^{-1}\,dx))$, $y_{ad} \in L^2(\Omega)$ та $u_0 \in L^2(\Omega)$ є заданими функціями. Тоді задача оптимального керування* (3.1)–(3.5) *має єдиний розв'язок (u^0, y^0) у просторі $L^2(\Omega) \times L^2(0,T; \mathcal{W}_\rho)$.*

Доведення. В силу теореми 3.2 задачі оптимального керування (3.12)–(3.14) та (3.1)–(3.5), при зроблених припущеннях, є еквівалентні. Отже, досить показати, що задача (3.12)–(3.14) є розв'язною і її розв'язок є єдиним. Для цього зауважимо, що відображення $u \mapsto v(u)$ простору $L^2(\Omega)$ в простір $W(0,T) = \big\{v : v \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega;\Gamma_D)), \dot{v} \in L^2(0,T; H^{-1}(\Omega;\Gamma_D))\big\}$, в силу зауваження 2.1 та умови (3.11), є неперервним. Справді, оскільки простір $C_0^\infty(\mathbb{R}; C_0^\infty(\mathbb{R}^N;\Gamma_D))$ є щільним в $W(0,T)$ (див., напр., [4]), то, поклавши в (3.18) $t_1 = 0$, $t_2 = T$ і $\varphi = v$, отримаємо:

$$\frac{1}{2}\|v(T,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \nu \int_0^T \left[\|(\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)^N}\,dt - \frac{1}{2}\int_\Omega V(x)v^2\,dx\right] dt +$$
$$+\nu \int_0^T \int_{\Gamma_N} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\rho}} - \frac{1}{2}\frac{\partial \ln\rho}{\partial \mathbf{n}}\right) v^2\, d\mathcal{H}^{N-1}\,dt = \int_0^T \left(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\,f, v\right)_{L^2(\Omega)} dt.$$

Звідки, в силу нерівності Харді – Пуанкаре (2.3), зауваження 2.1 та умов (3.10)–(3.11), маємо:

$$\begin{aligned}
\nu \min&\left\{1 - \frac{\lambda}{\lambda_*}, \frac{\lambda C(\Omega)}{\lambda_*}\right\}\|v\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega;\Gamma_D))} \le \\
&\le \nu\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_*}\right)\int_0^T\int_\Omega |\nabla v|^2_{\mathbb{R}^N}\,dx\,dt + \frac{\lambda\nu C(\Omega)}{\lambda_*}\int_0^T\int_\Omega v^2\,dx\,dt \le \\
&\le \nu\int_0^T\left[\|(\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)^N}\,dt - \frac{1}{2}\int_\Omega V(x)v^2\,dx\right]dt \le \\
&\le \frac{1}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \left(\int_0^T\int_\Omega f^2\rho^{-1}\,dx\,dt\right)^{1/2}\|v\|_{L^2(Q)} \le \\
&\le \frac{1}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega,\rho^{-1}\,dx))}\|v\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega;\Gamma_D))} \le \\
&\le \frac{1}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\nu}{2}\min\left\{1 - \frac{\lambda}{\lambda_*}, \frac{\lambda C(\Omega)}{\lambda_*}\right\}\|v\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega;\Gamma_D))} + \\
&+ \frac{1}{2\nu}\max\left\{\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_*}\right)^{-1}, \frac{\lambda_*}{\lambda C(\Omega)}\right\}\|f\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega,\rho^{-1}\,dx))},
\end{aligned}$$

де λ — довільна додатна стала така, що $\lambda < \lambda_* := (N-2)^2/4$. В результаті приходимо до наступної апріорної оцінки:

$$\|v\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega;\Gamma_D))} \leq \frac{1}{2\nu} \max\left\{ \left(1-\frac{\lambda}{\lambda_*}\right)^{-1}, \frac{\lambda_*}{\lambda C(\Omega)} \right\} \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \\ + \frac{1}{2\nu^2} \left(\max\left\{ \left(1-\frac{\lambda}{\lambda_*}\right)^{-1}, \frac{\lambda_*}{\lambda C(\Omega)} \right\} \right)^2 \|f\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega,\rho^{-1}\,dx))}.$$

Враховуючи даний факт, можна отримати оцінку для розподілення $\dot{v}$ за нормою простору $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega;\Gamma_D))$. Справді, виходячи з рівняння (3.12), маємо:

$$\|\dot{v}\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega;\Gamma_D))} \leq \left\| \left(-\Delta - \frac{1}{2}V(x)I\right) v \right\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega;\Gamma_D))} + \\ + \left\| \frac{1}{\sqrt{\rho}} f \right\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega;\Gamma_D))} \leq \\ \leq \widehat{C} \|v\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega;\Gamma_D))} + \|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega,\rho^{-1}\,dx))},$$

де оператор $\mathcal{A} = -\Delta - \frac{1}{2}V(x)I$ визначає ізоморфізм між просторами $H^1_0(\Omega;\Gamma_D)$ та $H^{-1}(\Omega;\Gamma_D)$. Отже, об'єднуючи отримані співвідношення, приходимо до такої апріорної оцінки:

$$\|v\|^2_{W(0,T)} = \|v\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega;\Gamma_D))} + \|\dot{v}\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega;\Gamma_D))} \leq \\ \leq C_1 \|f\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega,\rho^{-1}\,dx))} + C_2 \|u\|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{4.1}$$

звідки ясно, що відображення $u \mapsto v(u)$ простору $L^2(\Omega)$ в простір

$$W(0,T) = \left\{ v : v \in L^2(0,T;H^1_0(\Omega;\Gamma_D)), \dot{v} \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega;\Gamma_D)) \right\}$$

є неперервним.

Далі зауважимо, що множина допустимих пар у задачі (3.12)–(3.14) є непорожньою. Покажемо, що для неї виконується умова коерцитивності, тобто для довільного $R > 0$ множина $\{(u,v) \in \Lambda \mid J(u,v) \leq R\}$ є обмеженою в просторі $L^2(\Omega) \times W(0,T)$. Справді, як випливає з (4.1), для довільної допустимої пари $(u,v) \in \Lambda$ маємо:

$$\|v\|^2_{W(0,T)} + \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_1 \|f\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega,\rho^{-1}\,dx))} + (C_2+1)\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \\ \leq \|f\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega,\rho^{-1}\,dx))} + 2(C_2+1)J(u,v) \leq \\ \leq \|f\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega,\rho^{-1}\,dx))} + 2R(C_2+1).$$

Отже, беручи до уваги отримані результати та той факт, що функціонал вартості (3.15) — строго опуклий, обмежений знизу і напівнеперервний знизу на $L^2(Q) \times L^2(0,T;H^1_0(\Omega;\Gamma_D))$, в силу теорем 1.1 та 1.2 з [9], робимо висновок:

існує єдина пара $(u^0, v^0) \in L^2(\Omega) \times W(0,T)$ така, що $(u^0, v^0) \in \Lambda$ і $J(u^0, v^0) = \inf_{(u,v)\in\Lambda} J(u,v)$, тобто (u^0, v^0) є оптимальною в задачі (3.12)–(3.14). Отже, за теоремою 3.2, пара $(u^0, y^0) := (u^0, \frac{v^0}{\sqrt{\rho}})$ є єдиним оптимальним розв'язком для вихідної задачі (3.1)–(3.5), що і потрібно було встановити. $\square$

Для того, щоб отримати умови оптимальності в задачі (3.1)–(3.5), скористаємося ідеями принципу максимуму та результатами роботи [3] (див. також [7, 9]). Нехай $u \in U_\partial$ — довільне допустиме стартове керування в задачі (3.12)–(3.14), а $v = v(u)$ — відповідний йому розв'язок початково-крайової задачі (3.12)–(3.14) в $W(0,T)$. Уведемо позначення: $[v] := v - v^0$ та $[u] := u - u^0$. Тоді $[v]$ є слабким розв'язком наступної задачі:

$$\dot{[v]} - \nu\,\Delta[v] - \frac{\nu}{2}V(x)[v] = 0 \quad \text{в } Q = (0,T)\times\Omega, \tag{4.2}$$

$$[v] = 0 \ \text{ на } \ \Sigma_D, \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial[v]}{\partial\mathbf{n}} + \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\rho}} - \frac{1}{2}\frac{\partial\ln\rho}{\partial\mathbf{n}}\right)[v] = 0 \ \text{ на } \ \Sigma_N, \tag{4.4}$$

$$[v]\big|_{t=0} = [u] \ \text{ майже скрізь на } \ \Omega. \tag{4.5}$$

Означимо функцію ψ як слабкий розв'язок задачі

$$-\dot{\psi} - \nu\,\Delta\psi - \frac{\nu}{2}V(x)\psi = 0 \quad \text{в } Q = (0,T)\times\Omega, \tag{4.6}$$

$$\psi = 0 \ \text{ на } \ \Sigma_D, \tag{4.7}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}} + \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\rho}} - \frac{1}{2}\frac{\partial\ln\rho}{\partial\mathbf{n}}\right)\psi = 0 \ \text{ на } \ \Sigma_N, \tag{4.8}$$

$$\psi(T,x) = -v^0(T,x) + y_{ad}(x) \ \text{ майже скрізь на } \ \Omega. \tag{4.9}$$

Оскільки $-v^0(T,\cdot) + y_{ad} \in L^2(\Omega)$, то, залучаючи аргументи теореми 3.1, легко показати, що такий розв'язок є єдиним у класі $W(0,T)$. Отже, обравши як тестову функцію $[v] := v - v^0$ і зауваживши, що $[v] \in W(0,T)$, а простір $W(0,T)$ неперервно вкладається в простір $C(0,T; L^2(\Omega))$ (див. [4]), маємо:

$$\begin{aligned}
-\int_0^T (\dot{\psi}, [v])_{L^2(\Omega)}\,dt &= \int_0^T (\psi, \dot{[v]})_{L^2(\Omega)}\,dt + \\
&\quad + (v^0(T,\cdot) - y_{ad}, [v(T,\cdot)])_{L^2(\Omega)} + \\
&\quad + (\psi(0,\cdot), [u])_{L^2(\Omega)}; \\
-\int_0^T \langle \Delta\psi, [v]\rangle_{H^{-1}(\Omega,\Gamma_D); H_0^1(\Omega,\Gamma_D)}\ dt &= \int_0^T (\nabla\psi, \nabla[v])_{L^2(\Omega)^N}\ dt + \\
&\quad + \int_0^T \int_{\Gamma_N} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\rho}} - \frac{1}{2}\frac{\partial\ln\rho}{\partial\mathbf{n}}\right)\psi[v]\,d\mathcal{H}^{N-1}\,dt.
\end{aligned}$$

Тому, помноживши співвідношення (4.6) на $[v] := v^0 - v$ і проінтегрувавши його в циліндрі Q за умов (4.7)–(4.9), отримаємо:

$$\begin{aligned}
0 = &\int_0^T (\psi, \dot{[v]})_{L^2(\Omega)}\, dt + \nu \int_0^T (\nabla\psi, \nabla[v])_{L^2(\Omega)^N}\, dt - \\
&- \frac{\nu}{2}\int_0^T (V\psi, [v])_{L^2(\Omega)}\, dt + \nu \int_0^T \int_{\Gamma_N} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\rho}} - \frac{1}{2}\frac{\partial \ln\rho}{\partial \mathbf{n}}\right)\psi[v]\, d\mathcal{H}^{N-1}\, dt + \\
&+ \left(v^0(T,\cdot) - y_{ad}, [v(T,\cdot)]\right)_{L^2(\Omega)} + (\psi(0,\cdot), [u])_{L^2(\Omega)} \overset{\text{за умов (4.2)–(4.3)}}{=} \\
&= + \int_0^T \int_\Omega \psi \underbrace{\left(\dot{[v]} - \nu\,\Delta[v] - \frac{\nu}{2}V(x)[v]\right)}_{=0} dxdt + \\
&+ \left(v^0(T,\cdot) - y_{ad}, [v(T,\cdot)]\right)_{L^2(\Omega)} + (\psi(0,\cdot), [u])_{L^2(\Omega)}. \qquad (4.10)
\end{aligned}$$

У результаті приходимо до наступної рівності:

$$- \left(v^0(T,\cdot) - y_{ad}, [v(T,\cdot)]\right)_{L^2(\Omega)} = (\psi(0,\cdot), [u])_{L^2(\Omega)}\,. \qquad (4.11)$$

Отже, умова $J(u^0, v^0) = \inf\limits_{(u,v)\in\Lambda} J(u,v)$ суть еквівалентна виконанню при всіх $u \in U_\partial$ нерівності

$$\begin{aligned}
\triangle\, J &:= J(u,v) - J(u^0,v^0) = J(u^0 + [u], v^0 + [v]) - J(u^0,v^0) = \\
&= \left(v^0(T,\cdot) - y_{ad}, [v(T,\cdot)]\right)_{L^2(\Omega)} + \left(u^0 - u_0, [u]\right)_{L^2(\Omega)} + \\
&+ \frac{1}{2}\|[v(T,\cdot)]\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|[u]\|^2_{L^2(\Omega)} \geq 0, \qquad (4.12)
\end{aligned}$$

що вкупі з (4.11) дає:

$$\int_\Omega (-\psi(0,\cdot) + u^0 - u_0)(u - u^0)\, dx \geq 0, \quad \forall\, u \in U_\partial. \qquad (4.13)$$

Оскільки нерівність (4.12), а отже і (4.13), дає необхідні умови оптимальності в задачі (3.12)–(3.14), то основний результат даного розділу можна подати таким чином.

Теорема 4.2. *Нехай $\rho : \Omega \to \mathbb{R}_+$ є ваговою функцією потенціального типу. Нехай $f \in L^2(0,T; L^2(\Omega, \rho^{-1}\,dx))$, $y_{ad} \in L^2(\Omega)$ та $u_0 \in L^2(\Omega)$ є заданими функціями. Тоді оптимальний розв'язок $(u^0, y^0) \in L^2(\Omega) \times L^2(0,T; \mathcal{W}_\rho)$ задачі (3.1)–(3.5) задається умовами:*

$$\left(\sqrt{\rho}\Psi + u^0 - u_0, u - u^0\right)_{L^2(\Omega)} \geq 0, \quad \forall\, u \in U_\partial, \qquad (4.14)$$

де через Ψ позначено розв'язок у класі $L^2(0,T; \mathcal{W}_\rho)$ початково-крайової задачі

$$-\rho(x)\dot{\Psi} - \nu\,\mathrm{div}\,(\rho(x)\nabla\Psi) = 0 \quad \text{в } Q = (0,T)\times\Omega, \qquad (4.15)$$

$$\Psi(t,x) = 0 \ \text{ на } \ \Sigma_D, \quad \sqrt{\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{n}} + \alpha\Psi = 0 \ \text{ на } \ \Sigma_N, \qquad (4.16)$$

$$\Psi(T,\cdot) = -y^0(T,\cdot) + \frac{y_{ad}}{\sqrt{\rho}} \ \text{ майже скрізь на } \ \Omega. \qquad (4.17)$$

Доведення. Залучаючи теорему 3.2, співвідношення (3.29) та відображення $\mathcal{F}$, яке дається правилом $\mathcal{F}(u,y) = \big(u, \sqrt{\rho}\, y\big)$, маємо:

$$\big(\sqrt{\rho}\Psi + u^0 - u_0, u - u^0\big)_{L^2(0,T;L^2(\Omega,\rho^{-1}\,dx))} = \int_\Omega (\psi + u^0 - u_0)(u - u^0)\,dx,$$

де позначено $\psi = \sqrt{\rho}\,\Psi$. Отже, в даному сенсі нерівності (4.13) та (4.14) є еквівалентні. Далі, залучаючи підстановку $\Psi = \psi/\sqrt{\rho}$ та перетворення типу (3.7), легко показати, що початково-крайова задача (4.15)–(4.17) еквівалентна задачі (4.6)–(4.6). Таким чином, в силу того, що виконання нерівності (4.13) є необхідною умовою оптимальності в задачі керування (3.12)–(3.14), залишається скористатися теоремою 3.2. □

Бібліографічні посилання

1. *Баланенко І. Г.* Про класифікацію розв'язків початково-крайових задач для вироджених параболічних рівнянь/ І. Г. Баланенко, П. І. Когут // Вісник ДНУ. Серія: Моделювання.— Д. : Вид-во ДНУ, 2011, Вип. 3, № 8.— С. 55–73.
2. *Баланенко І. Г.* Про одну задачу оптимального керування для виродженого параболічного рівняння/ І. Г. Баланенко, П. І. Когут // Вісник ДНУ. Серія: Моделювання.— Д. : Вид-во ДНУ, 2012, Вип. 4, № 8.— С. 3–18.
3. *Егоров А. И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами/ А. И. Егоров.— М. : Наука, 1978. — 463 с.
4. *Иваненко В. И.* Вариационные методы в задачах управления для систем с распределенными параметрами/ В. И. Иваненко, В. С. Мельник.— К. : Наукова думка, 1988. — 324 с.
5. *Жиков В. В.* Оценки типа Нэша – Аронсона для вырождающихся параболических уравнений/ В. В. Жиков // Современная математика. Фундаментальные направления, 2011, Том. 39.— С. 66–78.
6. *Жиков В. В.* Усреднение случайных сингулярных структур и случайных мер/ В. В. Жиков, А. Л. Пятницкий // Изв. РАН. Сер.: Математика, 2006, №. 1, Т. 70.— С. 241–290.
7. *Фурсиков А. В.* Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения/ А. В. Фурсиков.— Новосибирск : Научная книга, 1999. — 352 с.
8. *Brezis H.* Blow-up solutions of some nonlinear elliptic equations/ H. Brezis, J. L. Vazquez // Rev. Mat. Complut, 1997, No. 2, Vol. 10.— P. 443–469.
9. *Lions J.-L.* Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations/ J.-L. Lions.— Berlin, Springer-Verlag, 1971.
10. *Naylor A. W.* Linear Operator Theory in Engineering and Science/ A W. Naylor, G. R. Sell.— New York: Springer, 2000. — 624 p.
11. *Grigor'yan A.* Gaussian upper bounds for the heat kernel on arbitrary manifolds/ A. Grigor'yan // J. Differential Geometry, 1997, Vol. 45.— P. 33–52.
12. *Vazquez J. L.* The Hardy inequality and the asymptotic behaviour of the heat equation with an inverse-square potential/ J. L.. Vazquez, E. Zuazua // J. of Functional Analysis, 2000, Vol. 173.— P. 103–153.

Надійшла до редколегії 16.04.2013