ISSN 2312–4547. ВIСНИК ДНУ. Серiя "Моделювання". 2014. Вип. 6, № 8. С. 172–179

УДК 517.44:66.042:662.957

ОБ ОДНОМ ПРИБЛИЖЁННОМ АНАЛИТИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ТЕПЛООБМЕНА В ДВИЖУЩЕМСЯ СЛОЕ

А. Ю. Дреус*, А. О. Ерёмин**

* *Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара, кафедра аэрогидромеханики и энергомассопереноса, ул. Казакова, 18/14, ДНУ, 49010, Днепропетровск, E-mail: dreus@rambler.ru*

** *Национальная металлургическая академия Украины, кафедра теплотехники и экологии металлургических печей, пр. Гагарина, 4, Днепропетровск, 49600, E-mail: ktemp@ktemp.dp.ua*

Получило развитие аналитическое решение задачи о нагреве движущегося слоя массивных тел правильной формы в потоке газа. Предложена унифицированая процедура вычисления членов ряда в решении, которая позволяет выполнять расчеты с произвольным количеством членов разложения. Эффективность процедуры показана на примере решения задачи нестационарного теплообмена в движущемся слое сферических частиц.

Ключевые слова: теплообмен в слое, преобразование Лапласа, температура газа

1. Введение

Процессы сушки, нагрева или охлаждения слоя зернистого материала, движущегося в потоке газа, называют процессами слоевого теплообмена [1]. Слоевой теплообмен имеет место в различных технологических процессах металлургического, горного, химического, пищевого и других производств, и проблема определения его характеристик была предметом изучения многих исследований.

В частности, в работах [2, 3], с использованием преобразования Лапласа, получено аналитическое решение задачи нагрева слоя массивных тел правильной формы, находящихся в прямо- и противотоке с потоком горячего газа. Особенность решения заключается в использовании одного табулированного корня трансцендентного уравнения классической задачи о нестационарном нагреве единичного тела в форме пластины, цилиндра или шара при постоянной температуре среды. Это позволяет упростить процедуру расчета и избежать дополнительных вычислений, связанных с необходимостью учета зависимости корней от физических параметров задачи. При этом точность расчета, для достаточно больших значений времени, не уступает другим известным методикам.

Однако практическая реализация решения в [3] ограничена двумя членами разложения, что обусловлено сложностью выполнения обратного преобразования при большем количестве слагаемых. В настоящей работе, с помощью процедуры приближенного вычисления оригиналов, указанное решение обобщено на случай произвольного числа членов ряда.

2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу теплообмена в слое массивных однородных сферических частиц движущихся в потоке газа. В результате теплоотдачи от газа к частицам температура газа и частиц изменяется по высоте слоя. Математическая формулировка представляет собой систему уравнений для температуры материала частиц и теплообмена между газом и поверхностью частиц, которая в безразмерном виде имеет вид

$$\frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{Fo}} = \left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{2}{x}\frac{\partial\theta}{\partial x}\right), \quad \gamma\theta(Fo) + 1 - \theta_g(\mathbf{Fo}) = \frac{1}{\mathbf{Bi}}\left(\frac{\partial\theta(Fo)}{\partial x}\right)|_{x=1},$$

где θ – безразмерная температура материала; θ_g – безразмерная температура газа; $\mathbf{Fo} = a\tau/H^2$ – критерий Фурье; τ – время; H – высота слоя; a– коэффициент температуропроводности материала; R – радиус сферы; γ– отношение расходных теплоемкостей материала и газа; $\mathbf{Bi} = \alpha R/\lambda$ – критерий Био; α – коэффициент теплоотдачи; λ –коэффициент теплопроводности газа. Полную постановку задачи и систему допущений представлено в [1].

Для получения аналитического решения задачи слоевого теплообмена введем понятие среднемассовой температуры частицы $\overline{\theta}(Fo)$, тогда уравнение теплового баланса можем привести к виду

$$\bar{\theta}\left(\mathbf{Fo}\right) = \gamma\left[\theta_g\left(\mathbf{Fo}\right) - 1\right]. \tag{2.1}$$

Общее решение линейной задачи теплопроводности записываем с помощью теоремы Дюамеля [4]:

$$\bar{\theta}\left(\mathbf{Fo}\right) = \theta_g\left(\mathbf{Fo}\right) - \sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{B}(\mu_n)\exp(-\mu_n^2\mathbf{Fo})\left[1 + \int_0^{\mathbf{Fo}}\frac{\mathrm{d}\theta_g\left(\omega\right)}{\mathrm{d}\omega}\exp(\mu_n^2\omega)\,d\omega\right], \tag{2.2}$$

где $\mu_n(n = 1..\infty)$ — корни трансцендентного уравнения задачи о нагреве единичного тела, зависящие от значения $\mathbf{Bi}$; $\mathbf{B}$ — коэффициенты, зависящие от числа $\mathbf{Bi}$ и формы тела. Таким образом, получаем интегродифференциальное уравнение с одной неизвестной величиной — температурой газа. Это уравнение решим методом интегрального преобразования Лапласа [4, 5].

Подставляем $\overline{\theta}\left(\mathbf{Fo}\right)$ из уравнения (2.1) в (2.2). В результате получаем

$$\begin{gathered}\theta_g\left(\mathbf{Fo}\right) = \frac{\gamma}{\gamma-1} - \\ -\frac{1}{\gamma-1}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{B}(\mu_n)\exp(-\mu_n^2\mathbf{Fo})\left[1 + \int_0^{\mathbf{Fo}}\frac{\mathrm{d}\theta_g\left(\omega\right)}{\mathrm{d}\omega}\exp(\mu_n^2\omega)\,d\omega\right].\end{gathered} \tag{2.3}$$

Из этого уравнения методом преобразования Лапласа найдём $\theta_g\,(\mathbf{Fo})$. Для этого представим уравнение (2.3) в виде

$$\begin{gathered}\theta_g\,(\mathbf{Fo}) = \frac{\gamma}{\gamma-1} - \frac{1}{\gamma-1}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{B}(\mu_n)\exp(-\mu_n^2\mathbf{Fo}) - \\ -\frac{1}{\gamma-1}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{B}(\mu_n)\exp(-\mu_n^2\mathbf{Fo})\left[\int_0^{\mathbf{Fo}}\frac{\mathrm{d}\theta_g\,(\omega)}{\mathrm{d}\omega}\exp(\mu_n^2\omega)\,d\omega\right].\end{gathered}\tag{2.4}$$

Выполняем следующее преобразование в правой части:

$$\begin{gathered}\frac{1}{\gamma-1}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{B}(\mu_n)\exp(-\mu_n^2\mathbf{Fo})\left[\int_0^{\mathbf{Fo}}\frac{\mathrm{d}\theta_g\,(\omega)}{\mathrm{d}\omega}\exp(\mu_n^2\omega)\,d\omega\right] = \\ \frac{1}{\gamma-1}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{B}(\mu_n)\left[\int_0^{\mathbf{Fo}}\frac{\mathrm{d}\theta_g\,(\omega)}{\mathrm{d}\omega}\exp(-\mu_n^2(\mathbf{Fo}-\omega))\,d\omega\right].\end{gathered}\tag{2.5}$$

Для удобства записи введём обозначения функций в уравнениях (2.4) и (2.5). Пусть $\exp(-\mu_n^2\mathbf{Fo}) = \mathbf{F}_1$, $\frac{\mathrm{d}\theta_g(\omega)}{\mathrm{d}\omega} = \mathbf{F}_2$, $\exp(-\mu_n^2(\mathbf{Fo}-\omega)) = \mathbf{F}_3$. Уравнение (2.4) выразим в следующем виде:

$$\theta_g\,(\mathbf{Fo}) = \frac{\gamma}{\gamma-1} - \frac{1}{\gamma-1}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{B}_n\left[\int_0^{\mathbf{Fo}}\mathbf{F}_2\mathbf{F}_3\,d\omega\right] - \frac{1}{\gamma-1}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{B}_n\mathbf{F}_1.\tag{2.6}$$

В изображениях получим:

$$L(\mathbf{F}_2) = L\left(\frac{\mathrm{d}\theta_g\,(\omega)}{\mathrm{d}\omega}\right) = L\left(\theta_g'\right) = s\theta_{gL} - \mathbf{F}(+0) = s\theta_{gL} - \theta_{g0} = s\theta_{gL} - 1,\tag{2.7}$$

где θ_{g0} – безразмерное значение начальной температуры газа; индекс L означает изображение.

По теореме свертывания функций [5]

$$L\left(\int_0^{\mathbf{Fo}}\mathbf{F}_2\mathbf{F}_3\,d\omega\right) = L\left(\mathbf{F}_2\mathbf{F}_3\right) = (s\theta_{gL}-1)\,\frac{1}{s+\mu_n^2}.\tag{2.8}$$

Уравнение (2.4) в изображениях примет вид

$$\theta_{gL} = \frac{\gamma}{s(\gamma-1)} - \frac{1}{\gamma-1}\sum_{n=1}^{\infty}(s\theta_{gL}-1)\,\frac{\mathbf{B}_n}{s+\mu_n^2} - \frac{1}{\gamma-1}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{B}_n\frac{1}{s+\mu_n^2}\tag{2.9}$$

или после преобразования — $\theta_{gL}\left(1+\frac{1}{\gamma-1}s\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\mathbf{B}_n}{s+\mu_n^2}\right) = \frac{\gamma}{s(\gamma-1)}$. Таким образом, выражение для безразмерной температуры газа в изображении принимает вид

$$\theta_{gL} = \frac{\gamma}{s(\gamma-1)\left[1+\frac{1}{\gamma-1}s\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\mathbf{B}_n}{s+\mu_n^2}\right]}.\tag{2.10}$$

3. Приближенное решение с учётом двух членов ряда

Рассмотрим (2.10) с учётом двух членов суммы ряда. В общем случае для n членов ряда решение в изображениях будет иметь вид

$$\theta_{gL} = \frac{\gamma \prod\limits_{k=1}^{n} (s+\mu_k^2)}{s\left[(\gamma-1)\prod\limits_{k=1}^{n}(s+\mu_k^2) + s\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{\mathbf{B}_k}{s+\mu_k^2}\prod\limits_{k=1}^{n}(s+\mu_k^2)\right)\right]}. \tag{3.1}$$

Переход к оригиналу осуществим при помощи теоремы разложения Ващенко-Захарченко [4], поскольку дробь в выражении (3.1) можно представить как отношение двух полиномов $L(\theta_g) = \frac{\Phi(s)}{\psi(s)}$, причем показатель степени полинома $\psi(s)$ больше показателя степени полинома $\Phi(s)$.

Как частный случай(3.1) запишем выражение для изображения безразмерной температуры газа, учитывающее 2 члена ряда:

$$\begin{gathered}\theta_{gL} = \frac{\gamma \prod\limits_{k=1}^{2} (s+\mu_k^2)}{s(\gamma-1)\left[1 + \frac{s}{\gamma-1}\sum\limits_{k=1}^{2}\left(\frac{\mathbf{B}_k}{s+\mu_k^2}\prod\limits_{k=1}^{2}(s+\mu_k^2)\right)\right]} = \\ \frac{\gamma(s+\mu_1^2)(s+\mu_2^2)}{s\left[(\gamma-1)(s+\mu_1^2)(s+\mu_2^2) + s\mathbf{B}_1(s+\mu_2^2) + s\mathbf{B}_2(s+\mu_1^2)\right]}.\end{gathered} \tag{3.2}$$

Полином $\psi(s)$ степени n может иметь n корней $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n$.Показатель полинома знаменателя больше показателя полинома числителя и, следовательно, можем применить теорему разложения. Найдём корни уравнения:

$$s\left[(\gamma-1)(s+\mu_1^2)(s+\mu_2^2) + s\mathbf{B}_1(s+\mu_2^2) + s\mathbf{B}_2(s+\mu_1^2)\right] = 0. \tag{3.3}$$

Первый корень: $s_1 = 0$; второй и третий корни:

$$s_{2,3} = \frac{-\left[\mu_1^2(\gamma-1+\mathbf{B}_2) + \mu_2^2(\gamma-1+\mathbf{B}_1) \pm \sqrt{D}\right]}{2\mu_1^2\mu_2^2(\gamma-1)}. \tag{3.4}$$

Здесь $D = \left[\mu_1^2(\gamma-1+B_2)+\mu_2^2(\gamma-1+B_1)\right]^2 - 4\left(\mu_1^2\mu_2^2(\gamma-1)(\gamma-1+B_1+B_2)\right)$.

Знаменатель функции (3.2) можно представить в виде многочлена $\psi(s) = s(s-s_1)(s-s_2)$, причем степень полинома $\psi(s)$ всегда больше степени полинома $\Phi(s)$. Для случая простых корней можно записать представление

$$\frac{\Phi(s)}{\psi(s)} = \frac{C_1}{s-s_1} + \frac{C_2}{s-s_2} + \frac{C_3}{s-s_3}. \tag{3.5}$$

Согласно теореме разложения $f(\tau) = L^{-1}\left[\frac{\Phi(s)}{\psi(s)}\right] = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\Phi(s_n)}{\psi'(s_n)}\exp(s_n\tau)$. Коэффициенты s_n находим по формуле $C_i = \frac{\Phi(s_i)}{\psi'(s_i)}$. Производную функции $\psi'(s)$

определяем как

$$\psi'(s) = 3(\gamma - 1 + B_1 + B_2)s^2 + 2\left[\mu_1^2(\gamma - 1 + B_2) + \mu_2^2(\gamma - 1 + B_1)\right]s + \\ + \mu_1^2\mu_2^2(\gamma - 1). \tag{3.6}$$

После нахождения коэффициентов c_1, c_2, c_3 и применения теоремы разложения, окончательно получим

$$L^{-1}(\theta_{gL}) = \theta_g(\mathbf{Fo}) = \sum_{n=1}^{3} \frac{\Phi(s_n)}{\psi'(s_n)} \exp(s_n \mathbf{Fo}). \tag{3.7}$$

Таким образом, решение θ_g в поле оригиналов примет следующий вид:

$$L^{-1}(\theta_{gL}) = \theta_g(\mathbf{Fo}) = \sum_{n=1}^{3} \frac{\Phi(s_n)}{\psi'(s_n)} \exp(s_n \tau) =$$
$$= \frac{\gamma}{\gamma - 1} + \gamma \frac{\left[\mu_1^2 + \frac{-(M_1+M_2)+\sqrt{D}}{2M_0}\right]\left[\mu_2^2 + \frac{-(M_1+M_2)+\sqrt{D}}{2M_0}\right]}{3M_0\left(\frac{-(M_1+M_2)+\sqrt{D}}{2M_0}\right)^2 + 2(M_1+M_2)\left[\frac{-(M_1+M_2)+\sqrt{D}}{2M_0}\right] + M} \cdot$$
$$\cdot \exp\left(\left[\frac{-(M_1+M_2)+\sqrt{D}}{2M_0}\right]\mathbf{Fo}\right) +$$
$$+ \gamma \frac{\left[\mu_1^2 + \frac{-(M_1+M_2)-\sqrt{D}}{2M_0}\right]\left[\mu_2^2 + \frac{-(M_1+M_2)-\sqrt{D}}{2M_0}\right]}{3M_0\left(\frac{-(M_1+M_2)-\sqrt{D}}{2M_0}\right)^2 + 2(M_1+M_2)\left[\frac{-(M_1+M_2)-\sqrt{D}}{2M_0}\right] + M} \cdot$$
$$\cdot \exp\left[\frac{-(M_1+M_2)-\sqrt{D}}{2M_0}\right]\mathbf{Fo}. \tag{3.8}$$

Здесь: $M_1 = \mu_2^2(B_1 + \gamma - 1)$, $M_2 = \mu_1^2(B_2 + \gamma - 1)$, $M_0 = \mu_1^2(B_1 + B_2 + \gamma - 1)$, $M = \mu_1^2\mu_2^2(\gamma - 1)$.

Данное выражение справедливо для всех трёх простейших форм тела при $\gamma \neq 1$. В этих решениях использованы стандартные корни характеристических уравнений, полученные ранее [2].

4. Решение для $n > 2$ членов ряда

Обратное преобразование выражения (2.10) с количеством членов ряда, большим $n > 2$, в аналитическом виде получить затруднительно. Для получения решения в поле оригиналов при $n > 2$ необходим дополнительный анализ выражения (3.1). В случае простых корней оригинал изображения определим по формуле (3.7). В случае кратных и комплексных корней $\psi(s) = 0$ необходимо отделить действительную и мнимую части корней уравнения $\psi(s) = 0$.

При наличии комплексных корней $\psi(s) = 0$ требуется дополнительный расчёт возмущений, вносимых мнимой частью. Для этого определим функции ошибок как

$$erf(\mathbf{Fo}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\mathbf{Fo}} \exp\left(-s^2\right) \, ds, \quad erfc(\mathbf{Fo}) = 1 - erf(\mathbf{Fo}), \tag{4.1}$$

которые зависят только от величины аргумента $\mathbf{Fo}$ и не зависят от s. Тогда решение (4.1) примет вид

$$\begin{aligned}\theta_g\left(\mathbf{Fo}\right) = \sum_{n=1}^{k} \frac{\Phi(s_n)}{\psi'(s_n)} \exp(s_n \mathbf{Fo}) + &\\ + \sum_{n=k+1}^{r} \frac{\Phi(Re(s_n)}{\psi'(Re(s_n))} \exp(Re(s_n)\mathbf{Fo}) + &\\ + \sum_{n=k+1}^{m} erf(Im(s_n)\mathbf{Fo}) \exp(s_n \mathbf{Fo}) + &\\ + \sum_{n=m+1}^{r} erfc(-Im(s_n)\mathbf{Fo}) \exp(-s_n \mathbf{Fo}),&\end{aligned} \tag{4.2}$$

где k – количество простых действительных корней уравнения $\psi(s) = 0$, r – количество всех корней уравнения $\psi(s) = 0$; m – количество всех корней уравнения $\psi(s) = 0$ с положительной мнимой частью; $(r - 1 - m)$ – количество всех корней уравнения $\psi(s) = 0$ с отрицательной мнимой частью; $erf(Im(s_n)\mathbf{Fo})$, $erfc(-Im(s_n)\mathbf{Fo})$ – функции ошибок. Решение (4.2) позволяет получать оригинал с произвольным количеством членов ряда бесконечной суммы в выражении (2.2).

5. Решение модельной задачи слоевого теплообмена

Для проверки работоспособности полученных выше приближенных решений задачи слоевого теплообмена были сделаны расчёты температурных полей газа в слое кусковых материалов с учётом двух и трёх членов ряда бесконечной суммы в выражении (2.2).

Постановка данной задачи выполнена в [1], там же приведено приближенное решение задачи, полученное В.Н.Тимофеевым методом разделения переменных. Сравнение результатов по разным методикам выполним в размерном виде, как представлено в [3]. Рассмотрим сушку движущегося слоя однородного зернистого материала (кусков кокса) высотой $H = 3.5$ м, находящегося в противотоке с газом. Безразмерная температура газа определена как $\theta_g = (t_g - t_{m1})/(t_{g1} - t_{m2})$; t_g — текущая размерная температура газа; t_{m1} и t_{m2} — температуры материла на входе и выходе в камеру сушения, которые равны 1000 $^\circ C$ и 200 $^\circ C$ соответственно; t_{g1} — начальная температура газа, равная 160 $^\circ C$; число Био $\mathbf{Bi} = 6$.

Сравнение результатов расчета по приближенному решению [1] и изложенной выше методике с учетом двух и трех членов разложения приведены в табл. 1.

Таблица 1. Результаты расчёта модельной задачи по разным методикам

Высота слоя, м	Число Фурье	Решение [1]	Решение с учётом двух членов ряда	Решение с учётом трёх членов ряда
	Fo	t, $^\circ C$	t, $^\circ C$	t, $^\circ C$
0	0	797	768.1	781
0.5	0.15	614.1	602.3	610.5
1	0.3	484.2	472.3	480.3
1.5	0.45	381.9	370.4	376.4
2	0.6	301.2	290.4	295.4
2.5	0.75	237.6	227.7	235.2
3	0.89	187.4	178.6	184.3
3.5	1	159.5	151.4	155.3

Из представленных данных видно, что результаты расчёта по различным методикам практически совпадают для значений $Fo > 0.15$. Анализ влияния возмущений, вносимых мнимой частью решения при $n = 3$, представлен в табл. 2. Как видно из табл. 2, в данном случае учёт мнимой части решения (4.2) не влияет существенно на результат при $Fo > 0.15$.

Таблица 2. Анализ влияния мнимой части решения в формуле (4.2)

Высота слоя , м	число Фурье	n=3, учтена мнимая часть	n=3, без учёта мнимой части
	Fo	t, $^\circ C$	t, $^\circ C$
0	0	781.0	782.12
0.5	0.15	610.5	610.79
1	0.3	480.3	480.21
1.5	0.45	376.4	376.10
2	0.6	295.4	295.27
2.5	0.75	235.2	235.15
3	0.89	184.3	184.21
3.5	1	155.3	155.13

6. Выводы

В представленной работе получило дальнейшее развитие решение задачи о теплообмене в движущемся слое зернистого материала с использованием метода преобразования Лапласа. Предложена процедура вычисления корней полинома, что входит в решение для изображений, позволяющая учесть их комплексность. Такой подход дает возможность проводить вычисления с использованием произвольного количества членов разложения решения.

Эффективность вычислительной процедуры продемонстрирована на исследовании известной задачи о теплообмене в движущемся слое массивных частиц правильной формы. В области $Fo > 0.15$ результаты расчета по предложенной методике и по уже известным, хорошо согласуются. В то же время использование произвольного количества членов ряда позволяет не только повышать точность расчета, но и проводить исследования в области малых значений числа $Fo > 0.15$, что затруднительно при использовании других методов.

Благодарности

Авторы работы выражают благодарность Т. М. Босенко за участие в подготовке статьи и помощь в проведении численных расчетов.

Библиографические ссылки

1. *Китаев Б.И.* Тепло- и массообмен в плотном слое/ Б. И. Китаев, В. Н. Тимофеев. — М.: Металлургия, 1972. – 432 с.
2. *Губинский В.И.* Новое аналитическое решение задачи о теплообмене в движущемся слое/ В. И. Губинский, А. О. Ерёмин // Теория и практика металлургии—1999.—№5.—С. 22–23.
3. *Ерёмин А.О.* Приближённое аналитическое решение задачи о теплообмене в слое массивных тел/ А. О. Ерёмин, В. И. Губинский // Металлургическая теплотехника: Сб. науч. тр. — 2001. — Т. 4. — С. 168-172.
4. *Диткин В. А.* Интегральные преобразования и операционное исчисление./ В. А. Диткин , А. П. Прудников – М.: Наука, 1974. – 544 с.
5. *Беляев Н.М.* Методы теории теплопроводности. Учеб. пособие для вузов/ Н. М. Беляев, А. А. Рядно. — М.: Высш. шк., Ч.1. 1982.— 327 с.

Надійшла до редколегії 23.01.2014