

УДК 523.2, 532.5

## ГЕОМЕТРІЯ ТА СТРУКТУРИ ПЛАНЕТАРНИХ ВИХОРИВ ЗАГАЛЬНОГО ТИПУ

М. М. Осипчук\*, В. І. Перехрест\*\*

\* Придніпровська державна академія будівництва та архітектури,  
49050, Дніпропетровськ, E-mail: Nikolay1111@bigmir.net

\*\* Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара,  
49050, Дніпропетровськ, E-mail: prokhrest@i.ua

Представлено проф. Гоманом О. Г.

Розглянуто повний розв'язок планетарного вихору за наявності двох регулярних та одного сингулярного членів, досліджено вплив інтенсивності сингулярного диполя на геометрію та характеристики структур вихору. Результати дослідження можуть бути застосованими до уточнення закону планетних відстаней.

**Ключові слова:** планетарний вихор, вихровий диполь, сингулярність.

### 1. Вступ

Повний розв'язок для вихрової течії планетарного вихору [1]

$$\Psi = \left[ C_1 y^2 + C_2 \left( \cos y - \frac{\sin y}{y} \right) + C_3 \left( \frac{\cos y}{y} + \sin y \right) \right] \sin^2 \theta \quad (1.1)$$

містить 3 члени, два перші з них є регулярними функціями в усьому просторі, а третій має сингулярність у точці  $y = 0$  порядку  $O(y^{-1})$ .

Раніше нами було розглянуто як регулярний, при  $C_3 = 0$  [2], так і сингулярний із  $C_2 = 0$  [3] варіанти розв'язку (1.1) окремо. Зокрема показано, що сингулярний член розв'язку типу планетарного вихору породжує центральний сингулярний вихор-диполь зі скінченними інтегральними характеристиками, як-то кінетичний момент і витрата, та систему зовнішніх кілець, яка якісно й кількісно подібна до регулярного вихору. Розгляд повного розв'язку (1.1) та урахування деяких кількісних змін у структурі та параметрах сумарної течії може призвести за методикою робіт [4, 5] до уточнення закону планетних відстаней та його кращої відповідності експериментальним даним.

## 2. Параметричний аналіз структур загального вихору

Проведемо дослідження повного розв'язку планетарного вихору (1.1), тобто вихрових структур, які він породжує, залежно від інтенсивностей зовнішнього потоку  $C_1$  та регулярної  $C_2$  й сингулярної  $C_3$  складових.

Для можливості порівнянь регулярну частину розв'язку візьмемо з одиначною інтенсивністю диполя, а сингулярний член спорядимо коефіцієнтом інтенсивності  $\delta = C_3/C_2$ , який буде змінюватися у межах  $0 < |\delta| \leq 1$ , тобто функція течії матиме вигляд

$$\Psi = C_2 \hat{\Phi}(y) \sin^2 \theta, \quad \hat{\Phi}(y) = \alpha y^2 + \left( \cos y - \frac{\sin y}{y} \right) + \delta \left( \sin y + \frac{\cos y}{y} \right), \quad (2.1)$$

де  $r, \theta, \varphi$  — сферичні координати,  $y = C_0 r$ ;  $C_0, C_2, \alpha, \delta$  — параметри; причому параметр  $\delta$  будемо варіювати як за величиною, так і за знаком.

У роботах [2, 3] ми бачили, що структури  $(n, m)$  регулярного та сингулярного вихорів визначаються наявністю  $n$  замкнутих непроникних сфер та типами і кількістю особливих точок поля ліній течії, з якою пов'язане число  $m$  зовнішніх вихрових кілець. Як і там, перша характеристика структури — кількість непроникних сфер  $n$  — визначається коренями рівняння

$$\hat{\Phi}(y) = 0 \quad (2.2)$$

а особливі точки є коренями похідної, тобто рівняння

$$\hat{\Phi}'(y) \equiv 2\alpha y - \sin y + \frac{\sin y}{y^2} - \frac{\cos y}{y} + \delta \left( \cos y - \frac{\sin y}{y} - \frac{\cos y}{y^2} \right) = 0 \quad (2.3)$$

Спочатку шляхом чисельного розв'язування трансцендентних рівнянь (2.2) і (2.3) були побудовані таблиці коренів цих рівнянь з параметрами  $\delta = \pm 0,05$ ,  $\delta = \pm 0,5$ ,  $\alpha = -0,00655$ , які подано у табл. 1.

У табл. 1 радіуси непроникних сфер виділено жирним шрифтом, радіуси центрів кілець, зовнішніх і внутрішніх, позначено зірочками  $y^*$ ; подано також радіуси особливих точок  $y_2$  самоперетину петель сепаратрис, які виділяють дані вихрові кільця (рис 1).

Розглянемо спочатку зовнішні вихрові кільця. Вони, як і в усіх вихорах, обтікаються з обох боків наскрізними незамкнутими лініями течії і відділяються від цієї течії петлею сепаратриси, що має точку самоперетину (рис 1). Тому кожному зовнішньому вихору відповідають 2 корені рівняння (2.3) та 2 особливі точки: перша  $y^*$  типу «центр», а друга  $y_2$  — типу «сідло» (рис. 1, табл. 1).

Таблиця 1: Порівняння особливих точок і структур вихорів з  $\alpha = -0,00655$  та різними  $\delta$ 

$\delta = -0,05$	$\delta = 0$	$\delta = 0,05$	$\delta = -0,5$	$\delta = 0,5$
$y_i$	$y_i$	$y_i$	$y_i$	$y_i$
0,4132		<b>0,558</b>	0,89277	<b>1,40714</b>
2,7333*	2,7903*	2,852*	2,1794*	3,32678*
<b>4,5822</b>	<b>4,6382</b>	<b>4,6911</b>	<b>4,10597</b>	<b>5,13603</b>
5,981*	6,0342*	6,085*	5,5698*	6,53156*
<b>7,3112</b>	<b>7,3597</b>	<b>7,4062</b>	<b>6,96266</b>	<b>7,82636</b>
9,3930*	9,4428*	9,4910*	8,95437*	9,90369*
12,274	12,3221	12,373	<b>11,2804</b>	<b>12,5443</b>
15,813*	15,8542*	15,905*	11,8778*	12,812*
18,512	18,550	18,631	<b>12,4585</b>	<b>13,0512</b>
22,192*	22,2423*	22,292*	15,3609*	16,3027*
24,711	24,7617	24,813	18,1162	19,0348
28,573*	28,6240*	28,674*	21,7388*	22,6808*
30,916	30,9657	31,015	24,3384	25,2564
34,954*	35,0055*	35,056*	28,1108*	29,0509*
37,115	37,1635	37,212	30,5531	31,4699
41,342*	41,3898*	41,441*	34,4808*	35,4210*
43,314	43,3550	43,405	36,7626	37,6785
47,730*	47,7794*	47,833*	40,8518*	41,7920*
49,493	49,5389	49,589	42,9675	43,8828
54,126*	54,1779*	54,228*	47,2256*	48,1666*
55,664	55,7125	55,763	49,1674	50,0809
60,541*	60,5909*	60,643*	53,6041*	54,5459*
61,808	61,8705	61,921	55,3610	56,2745
66,977*	67,0306*	67,081*	59,9884*	60,9328*
67,955	68,001	68,052	61,5464	62,4585
73,486*	73,5428*	73,594*	66,3867*	67,3327*
74,016	74,0584	74,113	67,7204	68,6299
			72,8019*	73,7502*
			73,8745	74,7802
			79,2565*	80,2135*
			79,9911	80,8870
<b>(2, 11)</b>	<b>(2,11)</b>	<b>(3, 11)</b>	<b>(4,11)</b>	<b>(5,11)</b>

У випадку малої сингулярності  $\delta = \pm 0,05$  значення радіусів особливих точок, які відповідають центрам та сідлам кілець, відрізняються несуттєво як між собою, так і з регулярним випадком  $\delta = 0$ . Важливий для моделювання закону планетних відстаней радіус останньої сфери також майже однаковий у цих 3-х випадках. Відповідні параметри структури (2, 11) регулярного вихору

лежать між значеннями цих же параметрів вихорів з  $\delta = \pm 0,05$ , при цьому послідовність радіусів з  $\delta > 0$  перевищує обидві інші.

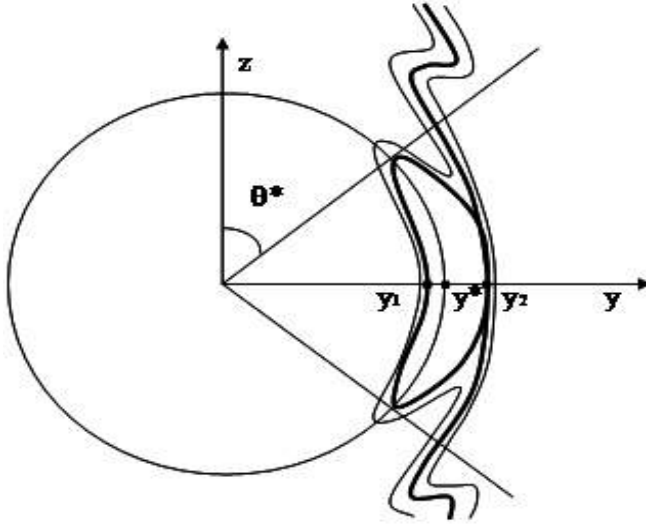


Рис. 1: Геометрія зовнішнього вихрового кільця

Як видно з табл. 1, вихори як з малими, так і з великими параметрами сингулярності  $\delta = \pm 0,05; \pm 0,5$  мають однакову кількість зовнішніх вихрових кілець, а саме 11, — таку саму, як і регулярний вихор з  $\delta = 0$ . При більшій потужності сингулярного члена  $\delta = \pm 0,5$  центральна зона вихору ускладнюється і розширюється, — збільшується кількість центральних сфер — при вибраних параметрах на 2 одиниці. Зокрема, радіус останньої сфери збільшився в 1,7 раза, що суттєво для обрахування закону планетних відстаней [4]. Відповідно розширюється зона зовнішніх 11 кілець, від крайніх радіусів  $y_{11}^* \approx 74$  до  $y_{11}^* \approx 80$  (табл. 1).

За наявності сингулярності  $\delta > 0$  при  $\alpha < 0$  структура центрального диполя та характеристики загального вихору якісно схожі із сингулярним вихором [4] (рис. 3б): у центральній сфері існує особливий вузол з двопетлюватою картиною ліній течії. Але напрям обертання центрального диполя визначається вже не знаком  $\alpha$ , а знаком сингулярності  $\delta$ . За додатного  $\delta > 0$  і  $\alpha < 0$  всередині першої сфери маємо особливий диполь-вузол з додатним обертанням (проти год. стрілки) (рис. 3б). У другій сфері маємо 1 кільце-тор з від'ємним обертанням. Далі, загалом 3, 5, ..., — непарне число сфер. Саме при такій кількості сфер обертання зовнішньої низки кілець буде від'ємним, що визначається вже знаком параметра  $\alpha < 0$ . При  $\alpha > 0$  усе відбувається симетрично: обертання центрального диполя визначається знаком  $\delta$ , а зовнішніх кілець — знаком  $\alpha$  (табл. 1).

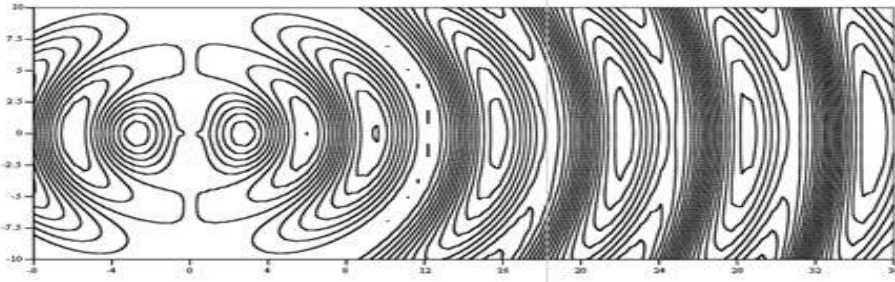


Рис. 2: Глобальна геометрична картина повного розв'язку для загального вихору з параметрами  $\alpha = -0,00655$ ,  $\delta = -0,05$ , структура (2, 11)

У випадку обох від'ємних параметрів  $\delta < 0$  та  $\alpha < 0$  суттєво змінюється топологія першої замкнутої сфери, у якій існують 3 особливі точки. Більш детальний аналіз та геометричні побудови (рис. 2, 3) дають такі характеристики цих 3-х особливих точок всередині першої сфери. Перша, у центрі  $y = 0$ , є особливим дипольним вузлом; друга є сідлом, у якому перетинаються дві сепаратриси; третя є центром, що оточений замкнутими траєкторіями. Перша сепаратриса є однією з траєкторій, що виходять з вузла і входить в нього, друга виникає зовні, є замкнутою і виокремлює область центра. Частина траєкторій виходить з центрального вузла і входить у нього всередині сепаратриси. Інший струмінь траєкторій виходить з центрального вузла, огинає область центра й після цього входить назад у вузол. Уся ця складна топологічна структура гантельного вигляду обмежена ззовні першою сферою (рис. 2, 3а). Крім цього, уся внутрішність першої сфери обертається в один бік, при  $\delta < 0$  за год. стрілкою, і проти год. стрілки — при  $\delta > 0$ .

За усіх розглянутих варіантів параметрів  $\alpha$ ,  $\delta$  якісні картини зон зовнішніх вихрових кілець майже ідентичні між собою (рис. 2), незначно змінюються лише параметри цих кілець (табл. 1). Далі, у кільці між першою і другою сферами маємо 1 кільце-тор і т.д. Загалом маємо 2, 4, 6, ... — парне число сфер, при якому усі зовнішні кільця обертаються за год. стрілкою, коли  $\alpha < 0$ , як у наших прикладах (табл. 1).

Аналогічну особливість маємо і при обох додатних значеннях  $\delta > 0$ ,  $\alpha > 0$ : у центральному диполі існує 3 особливих точки тих самих типів при парному числі 2, 4, 6, ... внутрішніх сфер і обертанні системи зовнішніх кілець проти год. стрілки. У табл. 2 в останньому стовпчику дана кількість особливих точок у центральній сфері; їх може бути 1 або 3.

### 3. Висновки, порівняння

З порівняння результатів дослідження параметрів та структур регулярного [2], сингулярного [3] та загального (табл. 1) вихорів можна зробити такі висновки про параметричні залежності цих структур від 2-х основних параметрів

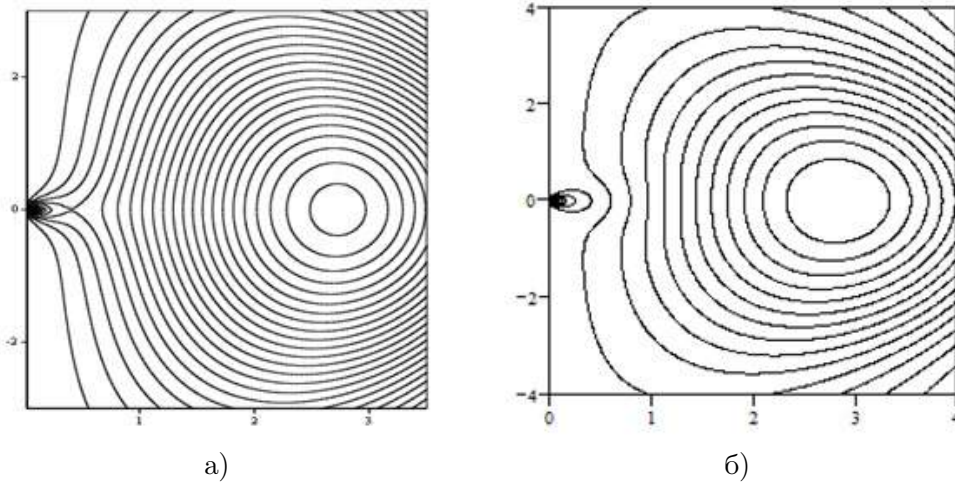


Рис. 3: Центральний вихровий диполь при  $\alpha = -0,00655$  всередині 1-ї сфери:  
 а)  $\delta = -0,05$ , структура (2, 11) — 3 особливих точки  
 б)  $\delta = 0,05$ , структура (3, 11) — 1 особлива точка (0, 0)

$\alpha$  — коефіцієнта регулярної структури та  $\delta$  — коефіцієнта сингулярного члена у повному розв'язку (2.1) типу планетарного вихору.

У роботах [2, 3] та вище показано, що зміна і варіювання цих параметрів суттєво впливає на структуру центральної зони з кількома непроникними сферами. Детальніше, напрям обертання у центральній сфері визначається:

- для регулярного вихору з коефіцієнтом +1 регулярного диполя знаком параметра  $\alpha$ : від'ємному значенню  $\alpha < 0$  відповідає обертання за годинниковою стрілкою, значенням  $0 < \alpha < 1/3$ , при яких існує хоч одна центральна непроникна сфера — теж за год. стрілкою [2];
- для сингулярного вихору це обертання визначається знаком параметра  $\delta$ : ( $\delta > 0$  проти,  $\delta < 0$  — за год. стрілкою), незалежно від знаку й величини  $\alpha$ ;
- для загального вихору з обома складовими напрям обертання визначається знаком параметра  $\delta$ , так само як у п. 2.

Але в усіх випадках (регулярному, сингулярному, загальному) знак  $\alpha$  визначає напрям обертання на нескінченності, що також є напрямом обертання усієї зовнішньої системи вихрових кілець. Тому у вихорі утворюється стільки центральних сфер, щоб виконувався принцип зміни напрям обертання у сусідніх сферичних шарах при заданому параметром  $\alpha$  зовнішньому обертанні. Неважко бачити, що у загальному вихорі при однакових знаках параметрів  $\alpha$  і  $\delta$ , тобто  $\alpha \cdot \delta > 0$  утворюється парна (2, 4, 6, ...) кількість сфер, а при  $\alpha \cdot \delta < 0$  — непарна (1, 3, 5, ...) кількість кілець (табл. 2). При

вибраних для розрахунків значеннях  $\alpha = -0,00655$  зміна знаку  $\delta$  призводить до зміни числа сфер від 2-х до 3-х для малої сингулярності і від 4-х до 5-и — для великої, що відображено у табл. 1.

Величина ж  $\alpha$  визначає в усіх випадках кількість зовнішніх вихорів: так, при  $\alpha = -0,00655$  в усіх варіантах загальних вихорів (табл. 1) та для регулярного вихору існує 11 зовнішніх кілець; сингулярний вихор із сингулярністю  $\delta = 1$  має таку саму кількість цих кілець [3].

Новим особливим явищем загального вихору є параметричні випадки з умовою  $\alpha \cdot \delta > 0$ , коли у першій сфері існують 3 особливі точки, а не одна, як у попередніх випадках. Це породжує описаний вище (рис. 3а) складний фазовий портрет нелінійної динамічної системи у центрі вихору, що якісно відрізняється від відомих фазових портретів особливих точок лінійних систем. У цих випадках черговість і тип особливих точок однакові: особливий вузол — сідло — центр.

Таблиця 2: Напрямок обертання та структури планетарних вихорів: — за год. стрілкою; + проти год. стрілки;  $\odot$  відповідає сферам; \* позначено зовнішні кільця

Параметри		Кільця: $\odot$ — внутрішні; * — зовнішні						Сфер	Особ. точок
$\alpha$	$\delta$	1	2	3	4	5	6		
—	—	$-\odot$	$+\odot$	$-*$	$-*$	$-*$	$-*$	2,4,6,..	3
—	+	$+\odot$	$-\odot$	$+\odot$	$-*$	$-*$	$-*$	1,3,5,..	1
+	+	$+\odot$	$-\odot$	$+$ *	$+$ *	$+$ *	$+$ *	2,4,6,..	3
+	—	$-\odot$	$+$ *	$+$ *	$+$ *	$+$ *	$+$ *	1,3,5,..	1

Звернемо увагу на те, що попри дуже різні фазові портрети центральної зони цих вихорів з  $\delta = \pm 0,05$ , остання 2-га сфера першого вихору та остання 3-я сфера другого вихору мають майже однакові радіуси: 7,31 і 7,406. Кількість зовнішніх кілець також однакова — 11, а значення координат їх центрів відрізняються не більше як на 1%. Однак, за великої сингулярності центральна сферична зона суттєво розширюється, від радіусів 7,3–7,4 до радіусів 12,5–13. Саме цю властивість можна використати для більш точного моделювання закону планетних відстаней у випадках, коли маємо значні додатні відхилення ряду відстаней перших планет, яким відповідають перші за останньою сферою кільця вихору [4].

Отже, додання малої сингулярності у загальний розв'язок практично не змінює структуру зовнішньої системи вихрових кілець планетарного вихору, тобто число майбутніх планет, незначно змінюються лише їх початкові координати. Велика ж сингулярність суттєво трансформує центральну частину вихору і розширює увесь вихор, не змінюючи числа зовнішніх кілець-планет.

Насправді ми не знаємо, яким є дійсне співвідношення інтенсивностей регулярного і сингулярного диполів при утворенні реальних космічних вихорів з усіма трьома доданками у (2.1). Зазначимо лише, що ідея «сингулярності»

присутня у більшості сучасних астрофізичних теорій утворення космічних систем, зокрема у понятті Великого Вибуху, наприклад: «З точки зору математики момент Великого Вибуху є тим, що називається сингулярністю або особливістю. До Великого Вибуху також застосовують термін «космологічна сингулярність у минулому». В околі такої сингулярності кривина простору–часу прямує до нескінченності» [6]. Класик астрофізики Дж. Джинс про подібні об'єкти говорить: «Припущення, яке настійно виникає, полягає в тому, що центри туманностей мають характер «сингулярних точок». У цих точках матерія втікає у наш світ з якогось іншого і зовсім стороннього простору. Тим самим мешканцю нашого світу сингулярні точки уявляються місцями, де постійно народжується матерія» [7].

З огляду на поширені в астрофізиці моделі деяких об'єктів сингулярного типу (плазма, протонні тіла, пульсари, чорні діри) [8] ми вважаємо, що наша математична сингулярність може відповідати деяким фізичним сингулярностям при утворенні центральних вихрових диполів — генераторів творення галактик і чорних дір — нарівні з регулярними складовими розв'язку (1.1).

#### Бібліографічні посилання

1. *Перехрест В. І.* Новий розв'язок гідродинамічних рівнянь Ейлера для сферичних вихрових течій / В. І. Перехрест, Р. В. Іванов // Вісник ДНУ. Серія: Механіка. — 2002. — Вип. 6. — Т. 1. — С. 60–64.
2. *Перехрест В. І.* Про структури планетарних вихорів і закономірності їх обертання / В. І. Перехрест, М. М. Осипчук // Вісник ДНУ. Серія: Механіка. — 2010. — Вип. 14. — Т. 18. — № 5. — С. 110–118.
3. *Осипчук М. М.* Регулярний та сингулярний планетарні вихори: порівняння структур і характеристик / М. М. Осипчук, В. І. Перехрест // Вісник ДНУ. Серія: Моделювання. — 2014. — Вип. 6. — Т. 22. — № 8. — С. 99–111.
4. *Перехрест В. І.* Закон планетних відстаней у вихровій теорії планетарних систем / В. І. Перехрест // Вісник ДНУ. Серія: Механіка. — 2011. — Вип. 15. — Т. 1. — С. 21–33.
5. *Перехрест В. І.* Обернена задача планетних відстаней / В. І. Перехрест, М. М. Осипчук // Вісник ДНУ. Серія: Моделювання. — 2012. — Вип. 4. — Т. 20. — № 8. — С. 116–128.
6. *Парновский С. Л.* Введение в современную космологию / С. Л. Парновский, А. С. Парновский. — К. : Наукова думка, 2013. — 150 с.
7. *J Jeans J. H.* Astronomy and cosmology / J. H. Jeans. — Cambridge, 1929. — 184 p.
8. *Чандрасекар С.* Математическая теория чёрных дыр / С. Чандрасекар. — М.: Мир, 1986. — Часть 1. — 275 с.

Надійшла до редколегії 15.02.2016