УДК 629.764

О. П. Юшкевич[1], Н. Е. Калініна[1], В. Т. Калінін[2]

[1] *Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара*
[2] *Національна металургійна академія України*

МОДЕЛЬ ІНТЕГРАЛЬНОГО ПОКАЗНИКА МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

Розроблено геометричну та алгебраїчну моделі інтегрального показника механічних систем в ознаковому просторі. З’ясовано, що інтегральні показники є проекціями інформаційних об’єктів моделювання на вісь переваги можливостей. Побудова цієї осі виконується сумуванням векторів зіставлення механічних систем, збудованих у просторі початкових ознак, як різність пар векторів зіставлених інформаційних об’єктів.

Ключові слова: ознаковий простір, інтегральний показник, механічні системи, головні компоненти, вагові коефіцієнти.

Разработаны геометрическая и алгебраическая модели интегрального показателя механических систем в признаковом пространстве. Показано, что интегральные показатели являются проекциям информационных объектов моделирования на ось предпочтения возможностей. Построение этой оси выполняется суммированием векторов сравнения механических систем, выстроенных в пространстве начальных признаков, как разности пар векторов сопоставляемых информационных объектов.

Ключевые слова: пространства признаков, интегральный показатель, механические системы, главные компоненты, весовые коэффициенты.

The geometric and algebraic models of the integral index of mechanical systems in the attribute space are developed. It is shown that integral indicators are projections of information objects of modeling on the axis of preferences of possibilities. The construction of this axis is performed by summing the comparison vectors of the mechanical systems constructed in the space of the initial properties, as the difference of the pairs of vectors of the information objects being compared.

Keywords: feature spaces, integral exponent, mechanical systems, main components, weighting coefficients.

Постановка проблеми і її зв'язок з найважливішими науковими та практичними задачами. Механічні аерокосмічні системи характеризуються величезною кількістю незалежних показників, наочне уявлення зв'язків між якими можливо геометричним уявленням в ознаковому просторі при зниженні його розмірності [1]. Зниження розмірності простору опису механічних систем до трьох і менше компонент дозволяє візуалізувати багатовимірні безлічі ознак, отримати уявлення про їх розподіл уздовж однакових осей [2] і перейти до їх геометричного опису.

У геометричній інтерпретації аерокосмічні об'єкти інформаційного моделювання, що утворюють різні множини-класи, що складаються з точок, є візуальним унаоченням механічних систем, кожну з яких позначимо M_{mpt} в ознакових просторах [2]. При цьому S_{npt} умовно позначимо об'єкти для початкового стану і TS_{npt} – для кінцевого, де n – індекс (номер) об'єкта інформаційного моделювання ($n = 1,...,N$); p – індекс виду; t – індекс геометричних параметрів; T – маркер, що встановлюється перед позначенням системи, що пройшла яку-небудь низку подій.

Для безлічі однотипних систем номер $n = m$, де m – індекс механічної системи. У безлічі однотипних систем, що мають певну передісторію, номер об'єкта є подвійним $n = mz$, де z – індекс передуючої послідовності подій.

Для безлічі механічних систем одного типу індекс об'єкта буде потрійним $n = mzx$, де x – індекс виробника системи.

Після згортки початкових ознак у три - і менш вимірний простір нових ознак можна оцінити близькість механічних аерокосмічних систем одна до одної. Визначаючи відстань між об'єктами інформаційного моделювання усередині утвореної ними безлічі S, можна виконати розділення систем на підмножини-кластери.

При цьому кластери мають бути значно більше віддалені один від одного, ніж точки – дрібні механічні системи S_{npt} – усередині них [3].

Кожен геометрично утворений кластер можна охарактеризувати значеннями комплексних показників механічних систем, що входять у нього [4].

При близькості значень комплексних показників у межах кластерів можна виконувати заміну дорогих систем дешевшими і не менш якіснішими.

Аналіз розрядок між кластерами дозволяє обґрунтовано проектувати нові неіснуючі системи, параметри яких відповідають потребам промисловості [3].

Застосування комплексного показника дозволить також отримувати зручні для аналізу і застосування математичні закономірності [4], системи, що зв'язують початковий стан з її можливостями після якої-небудь послідовності подій, у вигляді функціональних залежностей

$$TK_{npt}^{c(*)} = f(K_{npt}^{c(*)}). \tag{1}$$

Такі рівняння потрібні для прогнозування проміжних і кінцевих станів систем. Їх застосування удосконалить управління технологічними процесами.

Аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких розпочато рішення поставленої задачі, і їх зв'язок з поставленою проблемою. Перетворення старих ознак у нові означає поворот або перенесення системи координат простору геометричного опису початкових ознак, або і те і інше, з таким розрахунком, щоб нова 1-а ознакова вісь мала найбільш можливу для цієї вибірки дисперсію [1].

У випадку, якщо дисперсії на інших компонентних осях будуть незначними, то їх можна відкинути. Нові ознакові осі, що залишилися при цьому, називають головними компонентними (ГК).

Отримати головні осі можна раціональніше [2], якщо з початку координат простору ознак через точку центра тяжіння безлічі параметрів систем $S = \{S_{npt}\}$ провести пряму, що називається центроїдною віссю (ЦВ), яка проходить усього на декілька кутових одиниць у стороні від 1-ї ГК [4].

Проте, якщо безліч даних систем складається з двох і більше кластерів, відособлено розділених у просторі початкових властивостей, то 1-а ознакова вісь (ГК або центроїдна) може бути неінформативною, оскільки ймовірно пройде між підмножинами інформаційних об'єктів (кластерами). Тому для аналізу систем її ефективність буде низькою.

Отримати розташування 1-ї ознакової осі, що приблизно відповідає критерію інформативності [1], можна, якщо цетроїдну вісь розгорнути так, щоб вона проходила через початок системи ГК і загальний центр тяжіння кластерів, з яких утворена загальна безліч систем у просторі ознак, що характеризує їх можливості (рис. 1).

Отримана таким чином нова компонента – це вісь центру тяжіння (ВЦТ) загальної безлічі механічних систем, розташованої в ознаковому просторі їх геометричного опису [2; 4]. При цьому побудова ВЦТ означає поворот систем ГК або центроїдних осей і перенесення початку координат створеного нового ознакового простору в точку загального центра тяжіння.

На ВЦТ можна спроектувати об'єкти інформаційного моделювання S_{npt}. Потім, за необхідності, виконати їх ранжування в порядку зростання або убування значень проекцій (рис. 1). В цьому випадку координата кожної такої проекції на ВЦТ може бути інтерпретована як комплексний показник [4], який позначається K_{npt} для початкового і TK_{npt} для кінцевого станів.

Проте безліч механічних систем *S* у просторі їх властивостей можуть мати рівноважну геометричну конфігурацію. При цьому визначити найбільш інформативну головну компоненту (ГК) [1] для об'єктів інформаційного моделювання стає неможливим.

Навіть зміна масштабу і початку відліку простору перших головних компонент відносно початкового і перехід від проекцій на перші ГК або центроїдні осі, в якості комплексних показників [2], до проекцій інформаційних об'єктів на ВЦТ [4] не сприяють підвищенню інформативності компонентних осей.

Постановка задачі. В цьому випадку для узагальненого опису аерокосмічних об'єктів інформаційного моделювання у просторі їх ознак можна ввести інтегральні показники, які сумарно однозначно виражають усі ознаки, що характеризують механічні системи в даних умовах.

Для того щоб розробити метод розрахунку таких інтегральних показників механічних систем, необхідно спочатку математично їх описати і обґрунтувати, тобто побудувати математичну модель.

Мета роботи. Розробити математичну модель інтегральних показників механічних систем, що враховує тип – *m*, завод-виготівник – *x*, попередній ланцюг подій – *z*, вид – *p* та їх розміри – *t*.

Методика дослідження. У роботі використано аналітичні методи дослідження механічних систем, базовані на математичному їх представленні і формалізованому описі у просторі ознак у вигляді точок, інформаційно наділених усіма характеристиками даної механічної системи.

Це дозволило застосовувати для побудови геометричної моделі інтегрального показника традиційні методи векторної алгебри. При узагальненні отриманих двовимірних моделей у багатовимірні використано лінійну алгебру.

Виклад основного матеріалу досліджень і обговорення результатів. Для кожної механічної системи S_{npt} інтегральний показник може бути розрахований як лінійна цільова функція ознак $\sigma_{npt}^{(i)}$

$$\begin{array}{l}
K_{1pt} = l_0^{1pt} + l_1^{1pt}\sigma_{1pt}^{(1)} + \dots + l_i^{1pt}\sigma_{1pt}^{(i)} + \dots + l_\rho^{1pt}\sigma_{1pt}^{(\rho)} \\
K_{2pt} = l_0^{2pt} + l_1^{2pt}\sigma_{2pt}^{(1)} + \dots + l_i^{2pt}\sigma_{2pt}^{(i)} + \dots + l_\rho^{2pt}\sigma_{2pt}^{(\rho)} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
K_{npt} = l_0^{npt} + l_1^{npt}\sigma_{npt}^{(1)} + \dots + l_i^{npt}\sigma_{npt}^{(i)} + \dots + l_\rho^{npt}\sigma_{npt}^{(\rho)} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
K_{Npt} = l_0^{Npt} + l_1^{Npt}\sigma_{Npt}^{(1)} + \dots + l_i^{Npt}\sigma_{Npt}^{(i)} + \dots + l_\rho^{Npt}\sigma_{Npt}^{(\rho)},
\end{array} \qquad (2)$$

де $i = 1, 2, \dots, i, \dots, \rho$ – індекс (порядковий номер) ознак; $n = 1, \dots, n, \dots, N$ – номери об'єктів інформаційного моделювання, що відповідають їх позиціям у безлічі механічних систем. При цьому $n = mzx$ [2; 4]; l_0^{npt} – доданок лінійного рівняння, сполучаючий в собі не дані або не ідентифіковані в завданні ознаки; l_i^{npt} – вагові коефіцієнти ознак $\sigma_{npt}^{(i)}$.

При цьому інтегральними показниками K_{npt} є проекції об'єктів інформаційного моделювання на вісь їх переваги *K* (рис. 1), напрям якої визначений зростанням можливостей систем [2; 4].

У цьому випадку, як видно з роботи [2], вагові коефіцієнти при однойменних ознаках $\sigma_{npt}^{(i)}$ ($i = 1, \ldots, \rho$) в рівняннях (2) для різних об'єктів S_{npt} на вісь *K* рівні

$$l_0^{1pt} = l_0^{2pt} = \cdots = l_0^{npt} = \cdots l_0^{Npt} = l_0^{pt}, \tag{3}$$

$$l_i^{1pt} = l_i^{2pt} = \cdots = l_i^{npt} = \cdots l_i^{Npt} = l_i^{pt}. \tag{4}$$

Рівність цих коефіцієнтів визначено з того, що вони є направляючими косинусами і синусами проекцій інформаційних об'єктів на вісь *K* відносно осей початкових ознак $\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}, \ldots, \sigma^{(i)}, \ldots, \sigma^{(\rho)}$. Ці коефіцієнти *l* мають бути такими, щоб великим значенням початкових ознак $\sigma_{npt}^{(i)}$ відповідали більш високі значення інтегральних показників K_{npt}. Тобто вони повинні відповідати умові зростання можливостей S_{npt} уздовж напряму *K*.

Таким чином, визначивши числові значення вагових коефіцієнтів $l_0^{pt}, l_1^{pt}, \ldots, l_i^{pt}, \ldots, l_\rho^{pt}$, отримуємо новий показник механічної системи K_{npt} (2).

Проектуючи точки безлічі *S* на 1-у ГК, ЦВ або ВЦТ, і розташовуючи об'єкти інформаційного моделювання в порядку зростання величин цих проекцій, можна отримати початковий ряд переваги сталей.

При цьому можна вважати, що кожній позиції S_{npt} в початковому ряду переваги відповідає певне значення показника K_{npt} і його положення на новій осі *K*. Таким чином, значення K_{npt} збільшуватимуться відповідно до зростання можливостей даних систем.

Проте, визначивши K_{npt}, і порівнюючи їх один з одним для усіх *N* – об'єктів початкового ряду переваги, можна отримати

$$K_{1pt} \geqslant K_{2pt} \geqslant \cdots \geqslant K_{n-1pt} \geqslant K_{npt} \geqslant \cdots \geqslant K_{Npt} \tag{5}$$

послідовну систему нерівностей, в якій інтегральні показники (2) розташовуються в порядку убування їх значень.

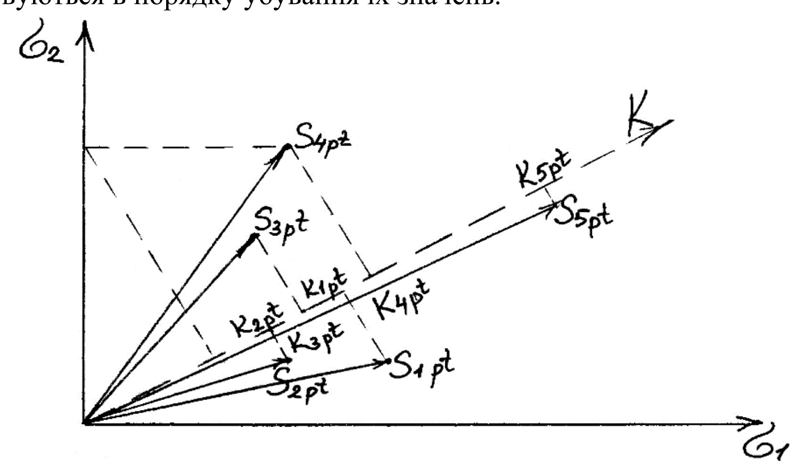

Рис. 1. Проекція кожної точки S_{npt} на вісь *K* є значенням комплексного показника K_{npt}.

Таким чином, безлічі *S* можуть бути однозначно побудовані у варіаційний ряд в порядку убування їх інтегральних показників

$$S_{1pt}, S_{2pt}, \dots, S_{n-1pt}, S_{npt}, S_{n+1pt}, \dots, S_{N-1pt}, S_{Npt}. \qquad (6)$$

В результаті цього отримуємо ранжування систем по убуванню їх можливостей.

Віднімаючи з кожного елемента ланцюжка нерівностей (5) значення показника можливостей, що йде за ним, отримуємо ряд, в якому різниця інтегральних показників убуває зі збільшенням номерів порівнюваних об'єктів:

$$K_{1pt} - K_{2pt} \geqslant K_{2pt} - K_{3pt} \geqslant \dots \geqslant K_{n-1pt} - K_{npt} \geqslant \dots \geqslant K_{N-1pt} - K_{Npt} \geqslant 0. \qquad (7)$$

Таким чином, з рядків переваги об'єктів інформаційного моделювання (5), (6), отримуємо ряд порівняння механічних систем.

Для того щоб послідовність нерівностей (7) виконувалася, тобто перша система у варіаційному ряду (6) мала б найбільший або рівний подальшому об'єкту інтегральний показник, а остання – найменший або рівний попередньому, необхідно, щоб парні різниці інтегральних показників були позитивними або дорівнювали 0:

$$K_{1pt} - K_{2pt} \geqslant 0, \dots, K_{n-1pt} - K_{npt} \geqslant 0, \dots, K_{N-1pt} - K_{Npt} \geqslant 0. \qquad (8)$$

Таким чином, з ряду порівняння (7) отримуємо систему нерівностей (8). Тепер, підставляючи в нерівності (8) замість K_{npt} їх математичні вирази (2), враховуючи рівність коефіцієнтів (3) і (4), і приймаючи для цих умов в (2) і (3), що $l_0^{pt} = 0$, отримаємо систему лінійних нерівностей:

$$\begin{gathered}
\sum_{i=1}^{\rho} l_i^{pt}(\sigma_{1pt}^{(i)} - \sigma^{(i)}{}_{2pt}) \geqslant 0 \\
\sum_{i=1}^{\rho} l_i^{pt}(\sigma_{2pt}^{(i)} - \sigma^{(i)}{}_{3pt}) \geqslant 0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\sum_{i=1}^{\rho} l_i^{pt}(\sigma_{n-1pt}^{(i)} - \sigma^{(i)}{}_{npt}) \geqslant 0 \\
\sum_{i=1}^{\rho} l_i^{pt}(\sigma_{npt}^{(i)} - \sigma^{(i)}{}_{n+1pt}) \geqslant 0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\textstyle\sum_{i=1}^{\rho} l_i^{pt}(\sigma_{N-1pt}^{(i)} - \sigma^{(i)}{}_{Npt}) \geqslant 0,
\end{gathered} \qquad (9)$$

де $i = 1, \dots, \rho$ – порядкові номери початкових ознак; $(\sigma_{n-1pt}^{(i)} - \sigma^{(i)}{}_{npt}) = \Delta\sigma_{n-1n}^{(i)}$ – різниці координат порівнюваних інформаційних об'єктів порівняння, що є величинами $\left[\Delta\sigma_{n-1n}^{(i)}\right]_{pt}$ початкових однойменних ознак S_{n-1pt} и S_{npt} ($n = 1, \dots, N$).

При цьому сукупності різниць однойменних ознак порівнюваної пари інформаційних об'єктів у нерівностях системи рівнянь (9) є координатами вектора порівняння пари систем у просторі початкових властивостей:

$$\Delta\overrightarrow{\sigma_{n-1,n}} = \left\{\sigma^{(1)}_{n-1pt} - \sigma^{(1)}{}_{npt}, \ldots, \sigma^{(i)}_{n-1pt} - \sigma^{(i)}{}_{npt}, \ldots, \sigma^{(\theta)}_{n-1pt} - \sigma^{(\theta)}{}_{npt}\right\}, \quad (10)$$

які є матрицею-рядком

$$\Delta\overrightarrow{\sigma_{n-1,n}} = \left\|\Delta\sigma^{(i)}_{n-1,n}\right\|. \quad (11)$$

Такі вектори утворюються різницями пар векторів $\overrightarrow{O_{n-1pt}}$ і $\overrightarrow{O_{npt}}$ двох порівнюваних об'єктів інформаційного моделювання S_{n-1pt} и S_{npt} (рис. 2)

$$\overline{O}_{(n-1)pt} - \overline{O}_{npt} = \Delta\overrightarrow{\sigma_{(n-1),n}}. \quad (12)$$

Для отриманих таким чином векторів порівняння (10) введемо позначення *P* і порядкові номери μ:

$$\Delta\overrightarrow{\sigma_{n-1,n}} = \overrightarrow{P_\mu} = \vec{P}_{n'npt}, \quad (13)$$

де $\mu = 1, \ldots, M$ – індекс (номер) пари об'єктів *n'* і *n* з початкового ряду переваги, які зіставляють.

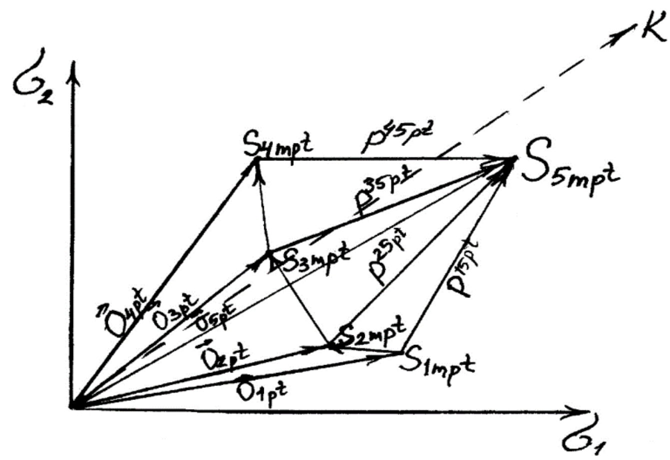

Рис. 2. Вектори інформаційних об'єктів $\overline{O}_{1pt}, \overline{O}_{2pt}, \overline{O}_{3pt}, \overline{O}_{4pt}, \overline{O}_{5pt}$ утворюють у просторі (σ_1, σ_2) безліч точок $\{S_{1pt}, S_{2pt}, S_{3pt}, S_{4pt}, S_{5pt}\}$ (систем). Різниці між векторами $\overline{O}_{1pt} - \overline{O}_{5pt} = \overline{P}_{15pt}$, $\overline{O}_{2pt} - \overline{O}_{5pt} = \overline{P}_{25pt}$, $\overline{O}_{3pt} - \overline{O}_{5pt} = \overline{P}_{35pt}$, $\overline{O}_{4pt} - \overline{O}_{5pt} = \overline{P}_{45pt}$ визначають вектори переваги у напрямі зростання можливостей *K*

На рис. 2, 3 замість значення індексу μ вказано номери порівнюваних об'єктів *n* і *n'*. При цьому кожній парі порівнюваних систем $\{S_{n-1pt}, S_{npt}\}$ у їх варіаційному ряду (5) відповідатиме вектор порівняння $\Delta\overrightarrow{\sigma_{n-1,n}}$ та індекс порівняння μ (табл. 1).

Таблиця 1

Таблиця індексів порівняння

$\{S_{1pt}, S_{2pt}\}$	$\{S_{2pt}, S_{3pt}\}$	...	$\{S_{n-1pt}, S_{npt}\}$	...	$\{S_{N-1pt}, S_{Npt}\}$
$\Delta\overrightarrow{\sigma_{12}}$	$\Delta\overrightarrow{\sigma_{23}}$	...	$\Delta\overrightarrow{\sigma_{n-1,n}}$	...	$\Delta\overrightarrow{\sigma_{N-1,N}}$
1	2	...	M	...	M

Переносячи вектори порівняння в початок координат, можна зіставити їх між собою (рис. 3). Вектори, розташовані у просторі під гострим кутом до 1-ї ГК або ВЦТ, матимуть орієнтацію в передбачуваному позитивному напрямі осі *K*, уздовж якого можливості систем зростають. Вектори $\Delta\overrightarrow{\sigma_{n-1,n}}$, що утворюють тупі або прямі кути з віссю *K*, відповідають зниженню або постійності можливостей систем, тому вони відкидаються і до розгляду не беруться. Таким чином, отримуємо інтервальний ряд, в якому послідовність векторів порівняння

$$\overrightarrow{\Delta\sigma_{12}}, \overrightarrow{\Delta\sigma_{23}}, \dots, \overrightarrow{\Delta\sigma_{n-1,n}}, \overrightarrow{\Delta\sigma_{n,n+1}}, \dots, \overrightarrow{\Delta\sigma_{N-1,N}} \qquad (14)$$

утворює векторний ряд переваги механічних систем

$$\overrightarrow{P_1}, \dots, \overrightarrow{P_\mu}, \dots, \overrightarrow{P_M} . \qquad (15)$$

Послідовно підсумовуючи вектори переваги (5.15) у просторі початкових властивостей (рис. 4, 5) і відкладаючи їх один за одним у порядку дотримання номерів μ, отримаємо певну траєкторію, початковій і кінцевій точкам якої відповідатиме результуючий вектор $\vec{P}$, що визначає фактичний напрям зростання можливостей механічних систем, що вивчаються.

Таким чином, сума векторів (15) дає результуючий вектор зростання можливостей

$$\overrightarrow{P_1} + \dots + \overrightarrow{P_\mu} + \dots + \overrightarrow{P_M} = \vec{P}. \qquad (16)$$

При цьому напрям осі порівняння можливостей *K* можна вибрати так, щоб він співпадав з вектором $\vec{P}$.

Довжини векторів (15) складають убуваючий варіаційний ряд

$$\left|\overrightarrow{P_1}\right| \geqslant \left|\overrightarrow{P_2}\right| \geqslant \dots \geqslant \left|\overrightarrow{P_\mu}\right| \geqslant \dots \geqslant \left|\overrightarrow{P_M}\right|, \qquad (17)$$

який утворює матрицю-рядок векторів переваги

$$P = \left\|P_\mu\right\| = \left(P_1 P_2 \cdots P_\mu \cdots P_M\right). \qquad (18)$$

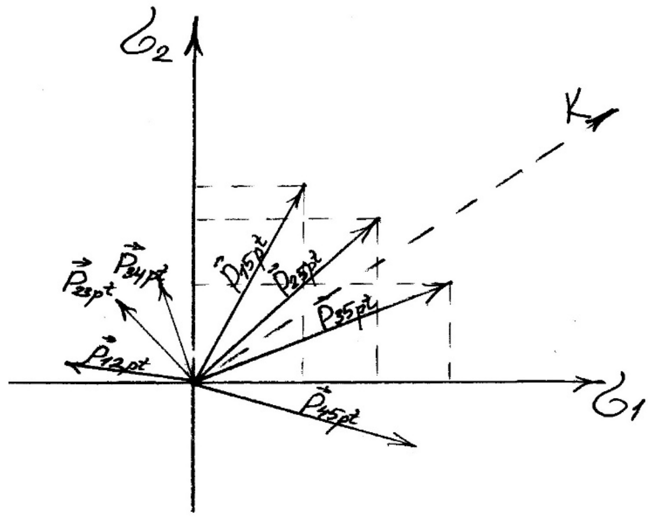

Рис. 3. Вектори $\overline{P_{15pt}}$, $\overline{P_{25pt}}$, $\overline{P_{35pt}}$, $\overline{P_{45pt}}$, що утворюють гострі кути з передбачуваним напрямом осі *K*, відповідають критерію зростання можливостей систем і є векторами переваги. Інші вектори порівняння $\overline{P_{12pt}}$, $\overline{P_{23pt}}$ відкидаються, так як не відповідають підвищенню можливостей

Отриману таким чином матрицю-рядок (18) можна переписати у вигляді

$$P = \left\|\Delta\sigma_{n-1,n}\right\| = \left(\Delta\sigma_{12}, \Delta\sigma_{23}, \cdots, \Delta\sigma_{n-1,n}, \Delta\sigma_{n,n+1}, \cdots, \Delta\sigma_{N-1,N}\right). \qquad (19)$$

При цьому кожен елемент цієї матриці є матрицею-стовпцем, що складається з координат векторів порівняння, отримуваною транспонуванням матриці (11)

$$\Delta\sigma_{n-1,n} = \left\| \Delta\sigma^{(i)}_{n-1,n} \right\|^{T} = \begin{pmatrix} \Delta\sigma^{(1)}{}_{n-1,n} \\ \Delta\sigma^{(2)}{}_{n-1,n} \\ \vdots \\ \Delta\sigma^{(i)}{}_{n-1,n} \\ \vdots \\ \Delta\sigma^{(\rho)}{}_{n-1,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^{(1)}{}_{\mu} \\ p^{(2)}{}_{\mu} \\ \vdots \\ p^{(i)}{}_{\mu} \\ \vdots \\ p^{(\rho)}{}_{\mu} \end{pmatrix} = P_{\mu}, \qquad (20)$$

де $p^{(1)}{}_{\mu}, \dots, p^{(i)}{}_{\mu}, \dots, p^{(\rho)}{}_{\mu}$ – координати вектору переваги $\vec{P}_{\mu}$.

Виконавши підстановку матриць-стовпців (20) у матрицю-рядок (19), отримуємо матрицю порівняння ознак

$$P = \left\| \Delta\sigma_{n-1,n} \right\| = \begin{pmatrix} \Delta\sigma^{(1)}{}_{12}\,\Delta\sigma^{(1)}{}_{23} \cdots \Delta\sigma^{(1)}{}_{n-1,n}\Delta\sigma^{(1)}{}_{n,n+1} \cdots \Delta\sigma^{(1)}{}_{N-1,N} \\ \Delta\sigma^{(2)}{}_{12}\,\Delta\sigma^{(2)}{}_{23} \cdots \Delta\sigma^{(2)}{}_{n-1,n}\Delta\sigma^{(2)}{}_{n,n+1} \cdots \Delta\sigma^{(2)}{}_{N-1,N} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Delta\sigma^{(i)}{}_{12}\,\Delta\sigma^{(i)}{}_{23} \cdots \Delta\sigma^{(i)}{}_{n-1,n}\Delta\sigma^{(i)}{}_{n,n+1} \cdots \Delta\sigma^{(i)}{}_{N-1,N} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Delta\sigma^{(\rho)}{}_{12}\,\Delta\sigma^{(\rho)}{}_{23} \cdots \Delta\sigma^{(\rho)}{}_{n-1,n}\Delta\sigma^{(\rho)}{}_{n,n+1} \cdots \Delta\sigma^{(\rho)}{}_{N-1,N} \end{pmatrix}. \qquad (21)$$

Підсумовуючи елементи рядків, отримуємо координати вектора зростання можливостей

$$\vec{P} = \{\textstyle\sum_{n=2}^{N}\Delta\sigma^{(1)}{}_{n-1,n}, \dots, \sum_{n=2}^{N}\Delta\sigma^{(i)}{}_{n-1,n}, \dots, \sum_{n=2}^{N}\Delta\sigma^{(\rho)}{}_{n-1,n}\}. \qquad (22)$$

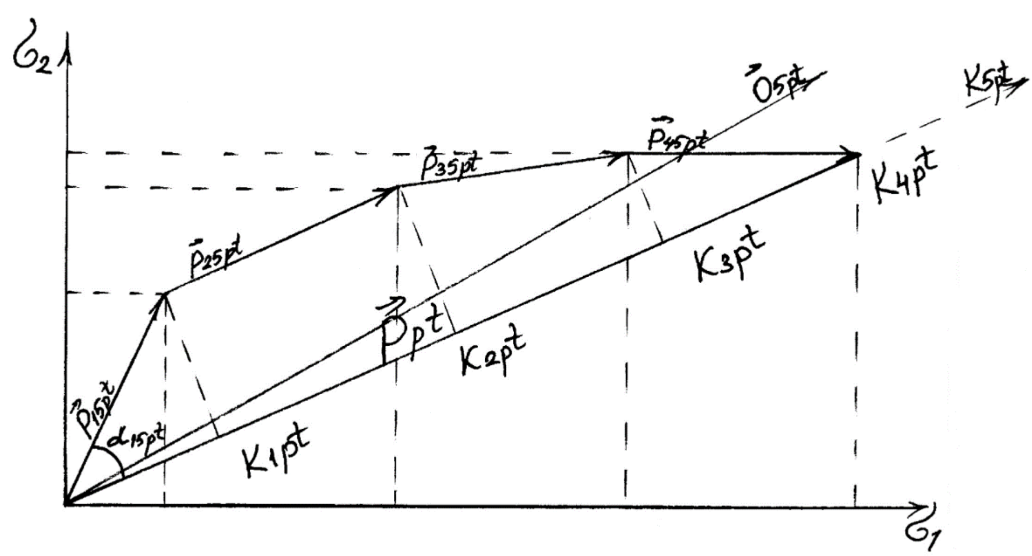

Рис. 4. Результуючий вектор зростання можливостей, побудований підсумовуванням векторів порівняння (переваги)

Тепер для визначення інтегральних показників (2) досить розрахувати невідомі коефіцієнти l_i^{pt} в системі нерівностей (9), задаючи вектор, координати якого утворюють матрицю-рядок

$$\overline{l^{pt}} = (l_1^{pt}, l_2^{pt}, \dots, l_i^{pt}, \dots, l_\rho^{pt}) = \|l_i^{pt}\|, \tag{23}$$

рівні, згідно з (4), ваговим коефіцієнтам $l_i^{1pt}, l_i^{2pt}, \dots, l_i^{npt}, \dots, l_i^{Npt}$ ознак ($i = 1, \dots, \rho$) в рівняннях (2). Тому

$$\overline{l^{pt}} = \|l_i^{pt}\| = \|l_i^{npt}\| = \overline{l^{npt}}. \tag{24}$$

У різних векторів $\overline{l^{npt}}$, заданих матрицями $\|l_i^{npt}\|$ для різних об'єктів S_{npt} ($n = 1, \dots, N$), сукупності однойменних координат (2) утворюють ряд матриць-стовпців ($i = 1, \dots, \rho$)

$$\|l^{npt}\|_i = \begin{pmatrix} l_i^{1pt} \\ l_i^{2pt} \\ \vdots \\ l_i^{npt} \\ \vdots \\ l_i^{Npt} \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Враховуючи, що вектори $\overline{l^{npt}}$ ($n = 1, \dots, N$) представлені матрицями-рядками (23), однойменні елементи яких утворюють матриці-стовпці (25), отримуємо матрицю коефіцієнтів системи рівнянь (2):

$$L = \|l_i^{npt}\| = \begin{pmatrix} l_1^{1pt}, l_2^{1pt}, \dots, l_i^{1pt}, \dots, l_\rho^{1pt} \\ l_1^{2pt}, l_2^{2pt}, \dots, l_i^{2pt}, \dots, l_\rho^{2pt} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ l_1^{npt}, l_2^{npt}, \dots, l_i^{npt}, \dots, l_\rho^{npt} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ l_1^{Npt}, l_2^{Npt}, \dots, l_i^{Npt}, \dots, l_\rho^{Npt} \end{pmatrix}. \tag{26}$$

При цьому стовпці матриці утворені рівними між собою елементами (4):

$$\|l_i^{npt}\| = \|l_i^{pt}\| = \begin{pmatrix} l_1^{pt}, l_2^{pt}, \dots, l_i^{pt}, \dots, l_\rho^{pt} \\ l_1^{pt}, l_2^{pt}, \dots, l_i^{pt}, \dots, l_\rho^{pt} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ l_1^{pt}, l_2^{pt}, \dots, l_i^{pt}, \dots, l_\rho^{pt} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ l_1^{pt}, l_2^{pt}, \dots, l_i^{pt}, \dots, l_\rho^{pt} \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Складаючи елементи стовпці в матриці (25), отримуємо координати результуючого вектора:

$$\vec{l} = \left\{\sum_{n=1}^{N} l_1^{npt}, \dots, \sum_{n=1}^{N} l_i^{npt}, \dots, \sum_{n=1}^{N} l_\rho^{npt}\right\} = \left\{N l_1^{pt}, \dots, N l_i^{pt}, \dots, N l_\rho^{pt}\right\}. \tag{28}$$

Звідси випливає, що

$$\vec{l} = N\overline{l^{npt}} = N\overline{l^{pt}}. \tag{29}$$

При цьому координати вектора $\overline{l^{pt}}$ чи елементи матриці $\|l_i^{pt}\|$ – шукані коефіцієнти l_i^{pt}, є направляючими косинусами осі порівняння можливостей K, відносно початкових осей $\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}, \dots, \sigma^{(i)}, \dots, \sigma^{(\rho)}$ простору ознак механічних систем. Тому в умовах даного завдання вектор $\vec{l}$ співпадатиме з віссю K, а отже і з вектором зростання якості $\vec{P}$. Уздовж цієї осі вектори переваги (15) утворюють гострі кути і орієнтовані в позитивному її напрямі.

Таким чином, вектор $\vec{l}$ є градієнтом (напрямом зростання) цільової функції K_{npt} (2). По суті, він орієнтований у напрямі основного призначення безлічі механічних систем, наприклад призначених для виробництва певного виду металовиробів. Тому називатимемо $\vec{l}$ вектором призначення безлічі інформаційних об'єктів. У глобальній безлічі механічних систем цей термін застосуємо для кластерів, представлених близькими значеннями ознак [3].

Проте, в загальному випадку, що виходить за межі даного завдання, вектори призначення окремих систем $\overline{l^{pt}}$; і зростання можливостей $\vec{P}$ не обов'язково повинні співпадати за напрямом.

Таким чином, скалярне перемноження векторів призначення на результуючий вектор порівняння, кут між якими дорівнює 0, дає відрізок $|\Delta K|$

$$\vec{P} \cdot \overline{l^{pt}} = |\Delta K| = \sum_{n=2}^{N} \Delta K_{(n-1)n}, \tag{30}$$

де $\Delta K_{(n-1)n}$ – відстані між проекціями порівнюваних об'єктів інформаційного моделювання на вісь K або різниця їх інтегральних показників, тобто проекції векторів переваги. Оскільки

$$(l_1^{pt})^2 + \dots + (l_i^{pt})^2 + \dots + (l_\rho^{pt})^2 = 1, \tag{31}$$

то довжина вектора призначення механічної системи $|\overline{l^{pt}}| = 1$, тому приходимо до висновку, що

$$|\vec{P}| = |\Delta K|. \tag{32}$$

Обчислюючи відношення координат вектора $\vec{P}$ (катетів) (22) до відрізка $|\Delta K|$ (гіпотенузи) знаходимо значення направляючих косинусів осі K:

$$l_1^{pt} = \frac{\sum_{n=2}^{N} \Delta\sigma^{(1)}{}_{n-1,n}}{|\Delta K|}, \dots, l_i^{pt} = \frac{\sum_{n=2}^{N} \Delta\sigma^{(i)}{}_{n-1,n}}{|\Delta K|}, \dots, l_\rho^{pt} = \frac{\sum_{n=2}^{N} \Delta\sigma^{(\rho)}{}_{n-1,n}}{|\Delta K|}. \tag{33}$$

Враховуючи, що початкові ознаки утворюють матрицю даних

$$\left\|\sigma_{npt}^{(i)}\right\| = \begin{pmatrix} \sigma_{1pt}^{(1)} \sigma_{1pt}^{(2)} \dots \sigma_{1pt}^{(i)} \dots \sigma_{1pt}^{(\rho)} \\ \sigma_{2pt}^{(1)} \sigma_{2pt}^{(2)} \dots \sigma_{2pt}^{(i)} \dots \sigma_{2pt}^{(\rho)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sigma_{npt}^{(1)} \sigma_{npt}^{(2)} \dots \sigma_{npt}^{(i)} \dots \sigma_{npt}^{(\rho)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sigma_{Npt}^{(1)} \sigma_{Npt}^{(2)} \dots \sigma_{Npt}^{(i)} \dots \sigma_{Npt}^{(\rho)} \end{pmatrix}, \tag{34}$$

і приймаючи без втрати спільності $l_0^{npt} = 0$ при $n = 1, \dots, N$, отримуємо систему лінійних рівнянь (2) у матричній формі:

$$\left\|l_i^{npt}\right\| \cdot \left\|\sigma_{npt}^{(i)}\right\|^T = \left\|K_{npt}\right\|, \tag{35}$$

де $\left\|K_{npt}\right\|$ – матриця інтегральних показників, що складається з однакових рядків

$$\left\|K_{npt}\right\| - \begin{pmatrix} K_{1pt} K_{2pt} \cdots K_{npt} \cdots K_{Npt} \\ \vdots \\ K_{1pt} K_{2pt} \cdots K_{npt} \cdots K_{Npt} \end{pmatrix}. \tag{36}$$

Аналогічно в матричній формі може бути записана система нерівностей (9):

$$\left\|l_i^{npt}\right\| \cdot \left\|\Delta\sigma^{(i)}{}_{n-1,n}\right\|^T \geqslant \left\|\Xi_{n-1,n}^{t}\right\|, \tag{37}$$

де $\left\|\Xi_{n-1,n}^{t}\right\|$ – матриця, усі елементи, якої дорівнюють 0. Переходячи до векторів переваги (18), отримаємо матричну систему нерівностей:

$$\left\|l_i^{pt}\right\| \cdot P_\mu \geqslant 0\,. \tag{38}$$

Звідси нерівності (9) отримуємо у векторній формі:

$$\overline{l^{pt}} \cdot \vec{P}_\mu = l_1^{pt} \Delta\sigma^{(1)}{}_{n-1,n} + \dots + l_i^{pt} \Delta\sigma^{(i)}{}_{n-1,n} + \dots + l_\rho^{pt} \Delta\sigma^{(\rho)}{}_{n-1,n} \geqslant 0. \tag{39}$$

З цих нерівностей (39) виходить, що вектори призначення і переваги двох систем, що зіставляються, не співпадають за напрямом. Отже, вони можуть виступати їх незалежними характеристиками. При цьому відповідні скалярні добутки векторів призначення (23) на вектори переваги (12) утворюють відрізки-проекції (30), розташовані на осі порівняння можливостей систем *K* і спрямовані уздовж неї:

$$\left|\overline{\Delta K_{n-1,n}}\right| = \overline{l^{pt}} \cdot \vec{P}_\mu = l_1^{pt} p^{(1)}{}_\mu + \dots + l_i^{pt} p^{(i)}{}_\mu + \dots + l_\rho^{pt} p^{(\rho)}{}_\mu, \tag{40}$$

де $p^{(1)}{}_\mu, \dots, p^{(i)}{}_\mu, \dots, p^{(\rho)}{}_\mu$ – координати вектору переваги $\vec{P}_\mu$.

Таким чином, в умовах даного завдання скалярні добутки $\overline{l^{npt}} \cdot \vec{p}_\mu$ визначають відстані між проекціями об'єктів інформаційного моделювання

$$\left|\overline{\Delta K_{n-1,n}}\right| = K_{(n-1)pt} - K_{npt}, \tag{41}$$

розташованих на осі порівняння можливостей механічних систем *K*.

Таким чином, завдання визначення міри близькості між системами S_{npt} ($n = 1, \dots, N$) вирішено, виконано математичне обґрунтування і опис інтегральних показників механічних систем.

Отримані результати відкривають можливості нетрадиційної класифікації механічних систем після виявлення близькості інтегральних показників перспективи в порівнянні показників можливостей з кращими зразками і визначення оптимальних параметрів технологічних процесів, що забезпечують їх.

Висновки

1. Отримано математичну модель інтегральних показників механічних систем у просторі їх ознак.

2. Розроблено геометричні і алгебраїчні моделі векторів порівняння, переваги і призначення механічних систем.

3. Розроблено метод побудови осі переваги можливостей механічних систем.

4. Побудовано модель представлення механічних систем на осі переваги, яка дозволяє виконувати ранжування механічних систем у порядку зростання їх можливостей.

5. Показано, що проекції об'єктів інформаційного моделювання на вісь переваги, виражені як відстані від центра ознакового простору, є інтегральними показниками механічних систем.

6. Розроблено модель порівняння механічних систем.

7. Дана модель представлення механічних систем на осі переваги відкриває нові можливості при аналізі їх особливостей.

Перспективи подальших досліджень. Представлення механічних систем на осі переваги і розрахунок інтегральних показників дозволяє реалізувати операторно-векторні моделі технологічних процесів [4]. Подальші дослідження будуть направлені на застосування розробленого методу для ранжування механічних систем, оптимізації їх параметрів [3] і моделювання різних технологічних процесів.

Бібліографічні посилання

1. **Юшкевич О. П.** Модель редукции пространства описания сталей / О. П. Юшкевич, В. И. Погорелый, П. О. Юшкевич // Строительство, материаловедение, машиностроение: сб. научн. трудов. ПГАСА. – Вып. 59. – 2011. – 184 с.

2. **Юшкевич О. П.** Модель представления репрезентативных показателей качества металлоизделий до и после термической обработки. / О. П. Юшкевич // Металознавство та термічна обробка металів: наук. та інформ. Журнал. ПГАСА. – 2011. – № 3.

3. **Большаков В. И.** Оптимизация марочного сортамента конструкционных сталей – путь к снижению металлоёмкости и повышению экономичности стальных конструкций // В. И. Большаков, В. К. Флоров, С. К. Калиновский. – Днепропетровск : ДИСИ, 1989.

4. **Юшкевич О. П.** Модель представления комплексного показателя качества сталей до и после термической обработки / О. П. Юшкевич // Теория и практика металлургии : общегосударственный научно-технический журнал. АИНУ. – 2011. – № 3 – 4.

Надійшла до редколегії 03.06.2017