

УДК 534.1:539.3

В. П. ОЛЬШАНСЬКИЙ**НАБЛИЖЕНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ УДАРУ ТІЛ З СИНГУЛЯРНОЮ ТОЧКОЮ НА ПОВЕРХНІ КОНТАКТУ**

Складено та зведено до безрозмірної форми інтегральне рівняння сили удару двох пружних тіл обертання, одне з яких має особливу точку на поверхні контакту, де кривизна граничної поверхні є нескінченною. При постановці задачі динамічного стискання тіл використано припущення Г. Герца, зроблені ним при створенні власної теорії квазістатичного удару твердих тіл, і відомий розв'язок вісесиметричної статичної контактної задачі теорії пружності, побудований І. Я. Штаерманом. Методом послідовних наближень за третьою ітерацією одержано наближений розв'язок інтегрального рівняння сили удару та подано у вигляді степеневого ряду. Цей ряд згорнуто в замкнуту форму наближеним методом Шенкса, внаслідок чого отримано компактний аналітичний розв'язок задачі удару. Він зручний для проведення інженерних розрахунків і описує зміну в часі сили удару та хід стискання і розтискання тіл. Одержано також компактні формули для обчислення максимумів сили удару та зближення центрів мас тіл, а також формули для розрахунку тривалостей процесу динамічного стискання та всього удару. Щоб не вийти за межі пружної постановки задачі, рекомендовано використовувати викладену теорію при малих швидкостях зіткнення тіл (до 5 м/с). Основний акцент в роботі зроблено на складання та розв'язання інтегрального рівняння не чисельними, а аналітичними методами. Висока точність отриманого розв'язку підтверджена малими відхиленнями результатів, до яких він призводить, від результатів чисельного інтегрування рівняння удару на комп'ютері. Відносна похибка не перевищує 0,5 %. Показано, що одержані формули можна також використовувати для апроксимації періодичних Атеб-функцій, через які виражається точний розв'язок цієї задачі удару. Наближені розв'язки служать добрим наближенням вказаних спеціальних функцій в першій чверті їх періоду. Наведено приклади розрахунків з обговоренням отриманих чисельних результатів і проведено порівняння з чисельними даними інших публікацій. Встановлено збіжність чисельних результатів, одержаних різними методами, чим підтверджена адекватність розробленої моделі пружного удару тіл обертання, при наявності на поверхні одного з них особливої точки.

Ключові слова: удар, особлива точка, теорія Г. Герца, інтегральне рівняння, апроксимація Атеб-функцій.

В. П. ОЛЬШАНСКИЙ**ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ УДАРА ТЕЛ С СИНГУЛЯРНОЙ ТОЧКОЙ НА ПОВЕРХНОСТИ КОНТАКТА**

Составлено и сведено к безразмерной форме интегральное уравнение силы удара двух упругих тел вращения, одно из которых имеет сингулярную точку на поверхности контакта, где бесконечна кривизна граничной поверхности. При постановке задачи динамического сжатия тел использованы допущения Г. Герца, сделанные им при создании собственной теории квазистатического удара твердых тел, и известное решение осесимметричной статической контактной задачи теории упругости, построенное И. Я. Штаерманом. Методом последовательных приближений, после трех итераций, получено приближенное решение интегрального уравнения силы удара и представлено в виде степенного ряда. Этот ряд свернут к замкнутой форме приближенным методом Шенкса, вследствие чего получено компактное аналитическое решение задачи удара. Оно удобно для проведения инженерных расчетов и описывает изменение во времени силы удара и процессы сжатия и разжатия тел. Получены также компактные формулы для вычисления максимумов силы удара и сближения центров масс тел, а также формулы для расчета продолжительностей процесса динамического сжатия и всего удара. Чтобы не выйти за пределы упругой постановки задачи, рекомендовано использовать изложенную теорию при малых скоростях столкновения тел (до 5 м/с). Основной акцент в работе сделан на составление и решение интегрального уравнения не численно, а аналитическими методами. Высокая точность полученного решения подтверждена малыми отклонениями результатов, к которым оно приводит, от результатов численного интегрирования уравнения удара на компьютере. Относительная погрешность не превышает 0,5 %. Показано, что полученные формулы можно также использовать для апроксимации периодических Атеб-функций, через которые выражается точное решение этой задачи удара. Приближенные решения служат хорошим приближением указанных специальных функций в первой четверти их периода. Приведены примеры расчетов с обсуждением полученных результатов и проведено сравнение с численными данными других публикаций. Установлено соответствие численных результатов, полученных разными методами, чем подтверждена адекватность разработанной модели упругого удара тел вращения при наличии на поверхности одного из них особой точки.

Ключевые слова: удар, особая точка, теория Г. Герца, интегральное уравнение, аппроксимация Атеб-функций.

V. P. OLSHANSKIY**APPROXIMATE SOLUTION OF THE INTEGRAL EQUATION OF BODY SHOCK WITH A SINGULAR POINT ON THE SURFACE OF THE CONTACT**

The integral equation of the impact force of two elastic bodies of revolution, one of which has a singular point on the contact surface, where the curvature of the limiting surface is infinite, is compiled and reduced to a dimensionless form. In formulating the problem of dynamic compression of bodies the assumptions, introduced by G. Hertz when developing his own theory of quasistatic impact of solids, and the well-known solution of the axisymmetrical static contact problem of the theory of elasticity, constructed by I. Ya. Shtaerman, are used. By the method of successive approximations, after three iterations, an approximate solution to the integral equation of the impact force is obtained and is presented in the form of a power series. This series is reduced to a closed form by the approximate Shanks method, which results in a compact analytical solution of the impact problem. It is convenient for engineering calculations and describes the change in time of the impact force and the processes of compressing and unclenching of bodies. Compact formulas are also obtained for calculating the maximums of the impact force and the approach of the centers of mass of the bodies, as well as formulas for calculating the durations of the dynamic compression process and the entire impact. In order not to go beyond the limits of the elastic statement of the problem, it is recommended to use the theory presented at low speeds of collision of bodies (up to 5 m/s). The main emphasis in the work is on the formulation and solution of the integral equation by analytical methods rather than numerically. The high accuracy of the solution obtained is confirmed by small deviations of the results to which it leads from the results of numerical integration of the shock equation on a computer. The relative error does not exceed 0.5 %. It is shown that the obtained formulas can also be used to approximate periodic Ateb-functions through which the exact solution to this impact problem is expressed. Approximate solutions serve as a good approximation of these special functions in the first quarter of their period. Examples of calculations are given, with a discussion of the results obtained, and comparisons are made with the numerical data of other publications. The correspondence of numerical results obtained by different methods is established, which confirms the relevance of the developed model of elastic impact of bodies of revolution in the presence of a singular point on the surface of one of them.

Key words: shock, singular point, G. Hertz theory, integral equation, approximation of the Ateb-function.

© В. П. Ольшанський, 2019

Вступ і огляд літератури. Незважаючи на малу тривалість процесу в часі, механічний удар може характеризуватись великими силами динамічної взаємодії тіл, що призводить до руйнування елементів конструкцій. Тому розрахункам на міцність при ударі приділяється належна увага в курсах опору матеріалів [1 – 3]. Але там удар вважають миттєвим і використовують в розрахунках не *силу удару*, а її *імпульс*. Фактично розглядають не сам *процес удару*, а його *наслідки*, тобто коливання тіл, спричинені ударом [4, 5]. Як правило, розрахунки на удар в опорі матеріалів ґрунтуються не на диференціальних або інтегральних рівняннях, а на енергетичних співвідношеннях.

У більш сучасних і більш адекватних моделях удару, де використовують інтегральні рівняння, їх розв'язують *чисельними методами*. Це досягають заміною інтегралів на скінченні суми [6 – 9]. Із небагатьох публікацій, в яких будували наближені аналітичні розв'язки інтегральних рівнянь, вкажемо на [10, 11]. В монографії [11] одержано такий розв'язок для випадку удару пружних тіл, обмежених гладкими поверхнями другого порядку. Фактично там одержано наближений вираз другого інтегралу диференціального рівняння сили удару в *класичній задачі Г. Герца*. Але, на практиці зустрічаються і більш складні варіанти граничних поверхонь тіл, де викладена теорія втрачає чинність. Наявність особливої точки на поверхні контакту тіл, про яку йдеться в цій роботі, потребує складання нового інтегрального рівняння сили удару, що відрізняється від відомих показником *нелінійності*, та побудови його аналітичних розв'язків, чим і зумовлена мета цієї роботи.

Метою статті є виведення інтегрального рівняння сили удару двох пружних тіл, одне з яких має особливу точку на поверхні контакту, побудова його наближеного аналітичного розв'язку та аналіз його точності.

Для досягнення поставленої мети використана *квазістатична теорія удару пружних тіл*, створена Г. Герцем, та *інтегральний метод* розв'язання динамічної задачі. Проведено перетворення складеного інтегрального рівняння до рекурентного співвідношення. В якості наближеного розв'язку прийнято третє ітераційне наближення, яке потім перетворено до замкнутого виразу *методом Шенкса*. В ході проведення розрахунків проаналізована точність одержаного аналітичного розв'язку задачі.

Виведення та перетворення інтегрального рівняння сили удару. Розглянемо контактну взаємодію пружних тіл, де одне з них обмежене поверхнею обертання $z = Ar^{3/2}$, в якій константа $A > 0$, r – радіальна координата (рис. 1).

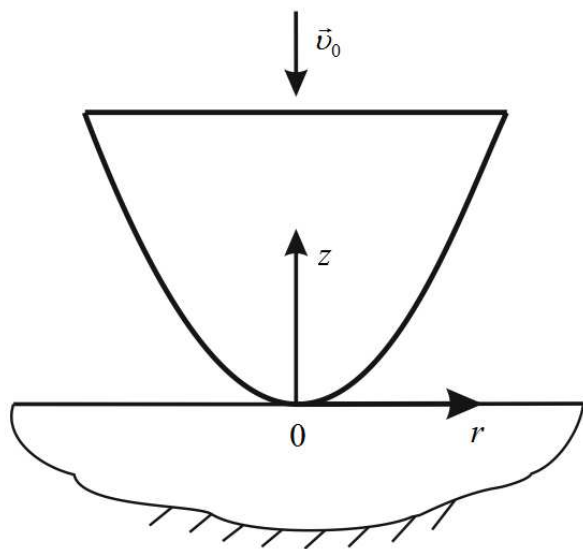


Рис. 1 – Схема зіткнення тіл.

ассона матеріалів тіл, задіяних в ударі; $\Gamma(z)$ – *Гама-функція*.

Якщо початкова швидкість зіткнення тіл v_0 , то за теорією Г. Герца [11], при виконанні залежності (1), інтегральне рівняння сили удару має вигляд:

$$K P^{3/5} = v_0 t - \frac{1}{M} \int_0^t \int_0^{t_1} P(t_2) dt_2 dt_1. \quad (2)$$

Тут $M = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, m_1, m_2 – маси тіл, задіяних в ударі; t – час.

Рівняння (2) лівою частиною відрізняється від того, що розв'язували в [11], тому одержаний там зв'язок втрачає чинність.

Щоб надати рівнянню (2) безрозмірну форму, введемо нові змінні:

Оскільки показник $3/2 < 2$, то кривизна граничної поверхні обертання нескінченна в точці $r = 0$, з якої розпочинається взаємодія тіл при стисканні.

У відповідності з *розв'язком І. Я. Штаєрмана* [12], зближення центрів мас тіл x , під дією стискаючої сили P , описується виразом:

$$x = K P^{3/5}, \quad (1)$$

де

$$K = \frac{3}{2} J_1 A \left(\frac{Q_1 + Q_2}{3A J_2} \right)^{3/5}; \quad Q_1 = \frac{1 - \mu_1^2}{E_1}; \quad Q_2 = \frac{1 - \mu_2^2}{E_2};$$

$$J_1 = \int_0^1 \frac{\sqrt{\xi} d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{[\Gamma(3/4)]^2}{\sqrt{2} \Gamma(3/2)} \approx 1,1918140;$$

$$J_2 = \int_0^1 \frac{\xi^2 \sqrt{\xi} d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{2^{3/2} [\Gamma(7/4)]^2}{\Gamma(7/2)} \approx 0,718884;$$

E_1, E_2, μ_1, μ_2 – *модулі пружності та коефіцієнт Пуассона*

$$P(t) = \alpha f(\tau), \quad t = \beta \tau, \quad (3)$$

де α, β – позитивні сталі; $f(\tau)$ – невідома функція.

Підставивши (3) в (2), отримуємо:

$$f^{3/5}(\tau) = \frac{\beta v_0}{K \alpha^{3/5}} \tau - \frac{\alpha^{2/5} \beta^2}{MK} \int_0^{\tau} \int_0^{\tau_1} f(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1. \quad (4)$$

Константи приймемо такими, щоб:

$$\frac{\beta v_0}{K \alpha^{3/5}} = 1 \quad \text{і} \quad \frac{\alpha^{2/5} \beta^2}{MK} = 1.$$

Ця умова виконується, коли:

$$\alpha = \left(\frac{M v_0^2}{K} \right)^{5/8}; \quad \beta = \left(\frac{M K^{5/3}}{v_0^{2/3}} \right)^{3/8}. \quad (5)$$

Перетворене таким чином безрозмірне інтегральне рівняння (4) зводиться до ітераційного співвідношення:

$$f_{n+1}(\tau) = \left(\tau - \int_0^{\tau} \int_0^{\tau_1} f_{n-1}(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 \right)^{5/3}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

Побудова наближеного розв'язку інтегрального рівняння. Поклавши в (6) $f_0(\tau) = 0$, одержуємо:

$$f_1(\tau) = \tau^{5/3}; \quad f_2(\tau) = \left(\tau - \frac{9}{88} \tau^{11/3} \right)^{5/3} = \tau^{5/3} \left(1 - \frac{9}{88} \tau^{8/3} \right)^{5/3}.$$

Оскільки на етапі динамічного стискання тіл $\tau \in (0; \tau_c)$, де $\tau_c \approx 1,61064$, то $9\tau_c^{8/3}/88 < 1$.

Тому далі скористаємося біноміальним рядом:

$$\left(1 - \frac{9}{88} \tau^{8/3} \right)^{5/3} \approx 1 - \frac{15}{88} \tau^{8/3} + \frac{45}{7744} \tau^{16/3} - \dots,$$

і надамо другому наближенню вигляд:

$$f_2(\tau) \approx \tau^{5/3} - \frac{15}{88} \tau^{13/3} + \frac{45}{7744} \tau^7 - \dots \quad (7)$$

Підставивши (7) в (6), за третьою ітерацією, одержуємо наближений розв'язок інтегрального рівняння:

$$f(\tau) \approx f_3(\tau) \approx \left(\tau - \frac{9}{88} \tau^{11/3} + \frac{135}{26752} \tau^{19/3} - \frac{5}{61952} \tau^9 \right)^{5/3}. \quad (8)$$

Щоб надати виразу (8) більш компактну форму, скористаємося методом Шенкса [11], за яким сума ряду S пов'язана з сумою його n – членів S_n наближеною залежністю [13]:

$$S \approx S_n - \frac{a_n a_{n+1}}{a_{n+1} - a_n}, \quad (9)$$

де a_n і a_{n+1} n – й і $(n+1)$ – й члени ряду.

Покладемо в (8):

$$S_n = \tau - \frac{9}{88} \tau^{11/3}; \quad a_n = -\frac{9}{88} \tau^{11/3}; \quad a_{n+1} = \frac{135}{26752} \tau^{19/3}.$$

Підставивши ці вирази в (9), отримуємо:

$$S \approx \tau - \frac{9}{88} \tau^{11/3} + \frac{1215 \tau^{19/3}}{88(135 \tau^{8/3} + 2736)} = \tau - \frac{342 \tau^{11/3}}{11(15 \tau^{8/3} + 304)}.$$

В результаті наближений розв'язок (8) набуває замкнену форму:

$$f(\tau) \approx \left(\tau - \frac{342}{11} \frac{\tau^{11/3}}{15 \tau^{8/3} + 304} \right)^{5/3}.$$

Враховуючи її та вирази (3) і (5), для обчислення сили удару, на етапі стискання тіл, отримуємо формулу:

$$P(t) \approx \left(\frac{M v_0^2}{K} \right)^{5/8} \left(\tau - \frac{342}{11} \frac{\tau^{11/3}}{15 \tau^{8/3} + 304} \right)^{5/3}. \quad (10)$$

Точний розв'язок цієї задачі удару пов'язаний з *Ateb-синусом* і подається добутком [14]:

$$P(t) = \left(\frac{x_c}{K}\right)^{5/3} \cdot \left[\text{Sa}\left(\frac{5}{3}, 1, \frac{4}{3}\eta\right) \right]^{5/3}, \quad (11)$$

у якому:

$$x_c = \left(\frac{4M v_0^2 K^{5/3}}{3}\right)^{3/8}; \quad \eta = \frac{v_0 t}{x_c}.$$

У підсумку (11) зводиться до співвідношення:

$$P(t) = \left(\frac{4}{3}\right)^{5/8} \left(\frac{M v_0^2}{K}\right)^{5/8} \left[\text{Sa}\left(\frac{5}{3}, 1, \frac{4}{3}\eta\right) \right]^{5/3}. \quad (12)$$

Із виразів (10), (12) випливає, що:

$$\text{Sa}\left(\frac{5}{3}, 1, \frac{4}{3}\eta\right) \approx \left(\frac{3}{4}\right)^{3/8} \left(\tau - \frac{342}{11} \frac{\tau^{11/3}}{15\tau^{8/3} + 304} \right). \quad (13)$$

Оскільки $\tau = \left(\frac{4}{3}\right)^{3/8} \eta$, то апроксимація (13) зводиться до наступної:

$$\text{Sa}\left(\frac{5}{3}, 1, \frac{4}{3}\eta\right) \approx \eta - \frac{114}{11} \frac{\eta^{11/3}}{5\eta^{8/3} + 76}.$$

Далі їй надаємо більш зручний для обчислень вигляд:

$$\text{Sa}\left(\frac{5}{3}, 1, \frac{4}{3}\eta\right) \approx \eta - 0,13636 \frac{\eta^{11/3}}{1 + 0,06579\eta^{8/3}}. \quad (14)$$

Це наближення має чинність в першій чверті періоду Атеб-сінуса $\eta \in [0, \eta_c]$, де $\eta_c \approx 1,44593$.

Інформація про похибки наближення (14) при різних η надана в табл. 1, де також вказано більш точні значення Атеб-сінуса, запозичені з [14], які вважаємо умовно точними.

Таблиця 1 – Наближені та точні значення Атеб-сінуса

η	$\text{Sa}\left(\frac{5}{3}, 1, \frac{4}{3}\eta\right)$		η	$\text{Sa}\left(\frac{5}{3}, 1, \frac{4}{3}\eta\right)$	
	формула (14)	таблиця в [14]		формула (14)	таблиця в [14]
0,2	0,200	0,200	1,0	0,872	0,872
0,4	0,395	0,395	1,2	0,960	0,960
0,6	0,579	0,579	1,3	0,985	0,986
0,8	0,742	0,742	1,4459	0,998	1,000

Найбільша похибка апроксимації (14) в цій таблиці досягається при $\eta = \eta_c$ і становить 0,2 %.

По аналогії з (14), для апроксимації Атеб-косінуса в першій чверті його періоду $\eta \in [0, \eta_c]$ можна використовувати формулу:

$$\text{Ca}\left(\frac{5}{3}, 1, \frac{4}{3}\eta\right) = f(\eta) \approx \eta_c - \eta - 0,13636 \frac{(\eta_c - \eta)^{11/3}}{1 + 0,06579(\eta_c - \eta)^{8/3}}. \quad (15)$$

Її максимальна похибка теж становить 0,2 %. В цьому переконують результати розрахунків, записані в табл. 2, де додатково також вказано наближені значення Атеб-косінуса, до яких призводить відома апроксимація [15, 16]:

$$\text{Ca}\left(\alpha, 1, \frac{1+\alpha}{2}\eta\right) \approx 1 - \frac{2}{1+\alpha} \ln \left[\text{ch}\left(\frac{1+\alpha}{2}\eta\right) \right], \quad \text{при } \alpha = \frac{5}{3}, \quad (16)$$

і гібридне наближення:

$$\text{Ca}\left(\frac{5}{3}, 1, \frac{4}{3}\eta\right) \approx \begin{cases} 1 - 1,2 \sin^2(\sqrt{5/3} \cdot (\eta)) & \text{при } 0 \leq \eta \leq 0,5 \\ f(\eta) & \text{при } 0,5 < \eta \leq \eta_c. \end{cases} \quad (17)$$

Таблиця 2 – Наближені та точні значення Ateb-косинуса

η	$\text{Ca}\left(\frac{5}{3}, 1, \frac{4}{3}\eta\right)$			
	формула (15)	формула (16)	формула (17)	таблиця в [14]
0,0	0,998	1,000	1,000	1,000
0,2	0,973	0,974	0,974	0,974
0,4	0,896	0,898	0,896	0,896
0,6	0,775	0,782	0,775	0,775
0,8	0,619	0,636	0,619	0,619
1,0	0,439	0,469	0,439	0,439
1,2	0,245	0,290	0,245	0,245
1,3	0,146	0,197	0,146	0,146
1,4459	0,000	0,058	0,000	0,000

Із розглянутих кращим наближенням є (17). Воно забезпечує точність в три значущих цифри після коми, якщо вважати умовно точними результати в [14].

Враховуючи апроксимацію (14) та залежності (1), (11), зміни у часі сили удару та зближення центрів мас тіл при стисканні описуємо компактними формулами:

$$P(t)/P_c \approx \left(\eta - 0,13636 \frac{\eta^{11/3}}{1 + 0,06579\eta^{8/3}} \right)^{5/3}; \quad (18)$$

$$x(t)/x_c = \eta - 0,13636 \frac{\eta^{11/3}}{1 + 0,06579\eta^{8/3}}, \quad (19)$$

в яких $P_c = \left(\frac{4M v_0^2}{3K} \right)^{5/8}$; $x_c = \left(\frac{4}{3} M v_0^2 K^{5/3} \right)^{3/8}$; $\eta = \frac{v_0 t}{x_c}$.

Максимуми P_c і x_c досягаються при $\eta = \eta_c$.

Формули (18) і (19) можна використовувати і для розрахунку процесу удару на етапі розтискання тіл, що проходить на проміжку $\eta \in (\eta_c; 2\eta_c)$. Але перед використанням в них треба замінити η на $2\eta_c - \eta$.

Числові результати, їх порівняння і обговорення. Для проведення розрахунків приймаємо: $m_1 = 0,7$ кг; $m_2 = \infty$; $v_0 = 3$ м/с; $E_1 = 2 \cdot 10^{11}$ Па; $\mu_1 = 0,25$; $E_2 = 7,5 \cdot 10^6$ Па; $\mu_2 = 0,5$; $A = 5 \text{ м}^{-1/2}$. Вказаним числовим даним відповідає $K = 1,36119 \cdot 10^{-4} \text{ мН}^{-5/3}$. Розраховані максимуми становлять: $x_c = 8,5173 \cdot 10^{-3}$ м; $P_c = 986,2159$ Н, при тривалостях стискання $t_c = 0,004105$ с і удару $t_y = 0,008210$ с.

Обчислені по формулі (19) відношення $x(t)/x_c$ записано в табл. 3.

Таблиця 3 – Значення $x(t)/x_c$

η	$x(t)/x_c$		η	$x(t)/x_c$	
	формула (19)	Чисельне інтегрування		формула (19)	Чисельне інтегрування
0,3615	0,3582	0,3582	1,4459	0,9977	1,0000
0,7230	0,6826	0,6826	1,8074	0,9148	0,9149
1,0845	0,9148	0,9149	2,1689	0,6826	0,6826

Для порівняння, тут вказано більш точні відношення $x(t)/x_c$, запозичені з роботи [14], де вони отримані чисельним інтегруванням рівняння удару на комп'ютері. Як бачимо, розбіжності наближених і точних результатів не суттєві. В табл. 4 записано обчислені двома способами відношення $P(t)/P_c$ для різних t .

Таблиця 4 – Значення $P(t)/P_c$

η	$P(t)/P_c$		η	$P(t)/P_c$	
	формула (18)	Чисельне інтегрування		формула (18)	Чисельне інтегрування
0,3615	0,1807	0,1807	1,4459	0,9962	1,0000
0,7230	0,5292	0,5292	1,8074	0,8621	0,8622
1,0845	0,8621	0,8622	2,1689	0,5292	0,5292

При $\eta = 1,4459$ похибка наближеного розв'язку в табл. 3 більша, ніж в табл. 2, але вона не перевищує 0,4 %, що підтверджує досить високу точність наближеного аналітичного розв'язку задачі удару.

Перспективи подальших досліджень. Одержаний у статті наближений розв'язок стосується інтегрального рівняння, що описує удар тіл обертання, обмежених поверхнями низького порядку, які мають сингулярну точку. Але викладений метод дає можливість знаходити і наближені аналітичні розв'язки інтегральних рівнянь, які описують більш щільний контакт тіл при їх ударі, коли граничні поверхні мають високий порядок. Отже, в перспективі доцільно побудувати розв'язки більш загальних інтегральних рівнянь, які теж слугуватимуть апроксимації періодичних Атеб-функцій.

Висновки. Наявність сингулярної точки на поверхні контакту одного із тіл, задіяних в ударі, змінює показник нелінійності в інтегральному рівнянні сили удару, порівняно з класичним варіантом теорії Г. Герца. Побудований тут наближений аналітичний розв'язок нового інтегрального рівняння є досить точним і компактним. Він дає можливість аналізувати плинність у часі сили удару та зближення центрів мас тіл, а також обчислити максимальні значення вказаних параметрів. Одержаний розв'язок можна також використовувати для наближеного обчислення значень періодичних Атеб-функцій, через які виражається точний аналітичний розв'язок розглянутої задачі удару, бо він є *апроксимацією туну Паде* для названих спеціальних функцій.

Список літератури

1. Писаренко Г. С., Квітка О. Л., Уманський Е. С. Опір матеріалів. – Київ : Вища школа, 2004. – 655 с.
2. Гурняк Л. І., Гуцуляк Ю. В., Юзків Т. Б. Опір матеріалів. – Львів : Новий світ, 2005. – 364 с.
3. Шкельов Л. Т., Станкевич А. М., Пошивач Д. В. Опір матеріалів. – Київ : Вінок, 2011. – 456 с.
4. Ольшанський В. П., Ольшанський С. В. Сравнение прогибов консольной балки при ударе, вычисленных по теориям Кокса и Сен-Венана // Вібрації в техніці та технологіях : Всеукраїнський науково-технічний журнал. – Вінниця, 2012. – № 4 (68). – С. 94 – 97.
5. Ol'shanskii V. P., Ol'shanskii S. V. Calculation of the dynamic deflection of a beam on inelastic impact by the Cox and Saint-Venant theories // Strength of Materials. – 2013. – Vol. 45. – Issue 3. – P. 361 – 368. DOI: 10.1007/s11223-013-9466-x
6. Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. – Москва : Машиностроение, 1985. – 472 с.
7. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем. – Москва : Машиностроение, 1970. – 734 с.
8. Сметанкина Н. В. Нестационарное деформирование, термоупругость и оптимизация многослойных пластин и цилиндрических оболочек. – Харьков : Мисьдрук, 2011. – 376 с.
9. Ольшанський В. П., Тищенко Л. Н., Ольшанський С. В. Колебания стержней и пластин при механическом ударе. – Харьков : Мисьдрук, 2012. – 320 с.
10. Петренко М. П. Про наближений розв'язок уточненого функціонального рівняння теорії удару // Прикладна механіка. – 1961. – Т. 7. – № 5. – С. 565 – 568.
11. Кильчевский Н. А. Динамическое контактное сжатие твердых тел. Удар. – Киев : Наукова думка, 1976. – 319 с.
12. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. – М. – Л. : Гостехиздат, 1949. – 272 с.
13. Ольшанський В. П. Порівняння наближених розв'язків інтегрального рівняння сили удару тіл в теорії Герца // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2019. – № 8 (1333). – С. 244 – 249.
14. Ol'shanskii V. P., Spol'nik O., Slipchenko M., Znaidiuk V. Modeling the elastic impact of a body with a special point at its surface // East-European Journal of Enterprise Technologies. – 2019. – Vol. 1/7 (97). – P. 25 – 32. DOI: 10.15587/1729-4061.2019.155854
15. Gendelman O., Vakakis A. F. Transition from localization to nonlocalization in strongly nonlinear damped oscillators // Chaos, Solitons and Fractals. – 2000. – Vol. 11. – no. 10. – P. 1535 – 1542. DOI: 10.1016/S0960-0779(99)00076-4
16. Cveticanin L., Pogany T. Oscillator with a Sum of Noninteger-Order Nonlinearities // Journal of Applied Mathematics. – 2012. – Vol. 1. – Article ID- 649050. – 20 p. DOI: 10.1155/2012/649050.

References (transliterated)

1. Pysarenko G. S., Kvitka A. L., Umans'kyi E. S. *Opir materialiv* [Strength of Materials]. Kyiv, Vyshha shkola Publ., 2004. 655p.
2. Gumyak L. I., Gutsulyak Yu. V., Yuzkiv T. B. *Opir materialiv* [Strength of Materials]. Lviv, New World Publ., 2005. 364 p.
3. Shkelyov L. T., Stankevych A. M., Poshyvach D. V. *Opir materialiv* [Strength of Materials]. Kyiv, Svitanok Publ., 2011. 456 p.
4. Ol'shanskii V. P., Ol'shanskii S. V. Sravnenie progibov konsol'noy balki pri udare, vychislennykh po teoriyam Koksa i Cen-Venana [Comparison of cantilever beam deflection at impact, calculated according to the theories of Cox and Saint-Venant]. *Vibratsiyi v tekhnitsi ta tekhnologiyakh : Vseukrayins'kyi naukovo-tekhnichnyy zhurnal* [Vibrations in technology and technologies : All-Ukrainian scientific and technical journal]. Vinnytsia, 2012, no. 4 (68), pp. 94–97.
5. Ol'shanskii V. P., Ol'shanskii S. V. Calculation of the dynamic deflection of a beam on inelastic impact by the Cox and Saint-Venant theories. *Strength of Materials*. 2013, vol. 45, Issue 3, pp. 361–368. DOI: 10.1007/s11223-013-9466-x
6. Timoshenko S. P., Yang D. H., Weaver U. *Kolebaniya v inzhenernom dele* [Fluctuations in engineering]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1985. 472 p.
7. Filippov A. P. *Kolebaniya deformiruemyykh sistem* [Oscillations of deformable systems]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1970. 734 p.
8. Smetankina N. V. *Nestatsionarnoye deformirovaniye, termouprugost' i optimizatsiya mnogoslonykh plastin i tsilindricheskikh obolochek* [Unsteady deformation, thermoelasticity and optimization of multilayer plates and cylindrical shells]. Kharkiv, Mis'kdruk Publ., 2011. 376 p.
9. Ol'shanskii V. P., Tishhenko L. N., Ol'shanskii S. V. *Kolebaniya stержney i plastin pri mekhnicheskoy udare* [Vibrations of rods and plates under mechanical impact]. Kharkiv, Mis'kdruk Publ., 2012. 320 p.
10. Petrenko M. P. Pro nablyzhenyy rozv'yazok utochenogo funktsional'nogo rivnyannya teorii udaru [On the approximate solution of a refined functional equation of impact theory]. *Prykladna mekhanika* [Applied mechanics]. 1961, vol. 7, no. 5, pp. 565–568.
11. Kyl'chevskiy N. A. *Dinamicheskoe kontaktное szhatie tverdyykh tel. Udar* [Dynamic contact compression of solids. Hit]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1976. 319 p.
12. Shtaerman I. Ya. *Kontaktnaya zadacha teorii uprugosti* [Contact problem of the theory of elasticity]. Moscow – Leningrad, Gostekhizdat Publ., 1949. 272 p.
13. Ol'shansk'yy V. P. Porivnyannya nablyzhenykh rozvyazkiv integral'nogo rivnyannya syly udaru til v teorii Hertsa [Comparison of approximate solutions to impact strength integral equation in the framework of Hertz theory]. *Visnyk Natsional'noho tekhnichnoho universytetu «KhPI». Seriya : Matematichne modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series : Mathematical modeling in engineering and technology]. 2019, no. 8 (1333), pp. 244–249.

14. Ol'shanskii V. P., Spol'nik O., Slipchenko M., Znaidiuk V. Modeling the elastic impact of a body with a special point at its surface. *East-European Journal of Enterprise technologies*. 2019, no. 1/7 (97), pp. 25–32. DOI: 10.15587/1729-4061.2019.155854
15. Gendelman O., Vakakis A. F. Transition from localization to nonlocalization in strongly nonlinear damped oscillators. *Chaos, Solitons and Fractals*. 2000, vol. 11, no. 10, p. 1535–1542. DOI: 10.1016/S0960-0779(99)00076-4
16. Cveticanin L., Pogany T. Oscillator with a Sum of Noninteger-Order Nonlinearities. *Journal of Applied Mathematics*. 2012, vol. 1, Article ID-649050, 20 p. DOI: 10.1155/2012/649050

Надійшла (received) 17.10.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Ольшанський Василь Павлович (Ольшанский Василий Павлович, Olshanskiy Vasily Pavlovich) – доктор фізико-математичних наук, професор, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, м. Харків; тел.: (066) 010-09-55.; e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com.

УДК 534.1:539.3

В. П. ОЛЬШАНСЬКИЙ, С. В. ОЛЬШАНСЬКИЙ

ПРО ОБМЕЖЕНУ ТРИВАЛІСТЬ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ ОСЦИЛЯТОРА З НЕЛІНІЙНО В'ЯЗКИМ ОПОРОМ

Показано, що при дії сили степеневано-нелінійного в'язкого опору лінійно пружний осцилятор може мати область застою вільних коливань, як і при дії сили сухого тертя Кулона. Тоді, отримавши задане початкове відхилення від положення рівноваги, такий осцилятор здійснює обмежену кількість розмахів, тобто його вільні коливання проходять на скінченному проміжку часу, що зазвичай спостерігається на практиці. В цьому принципова відмінність коливань розглянутого нелінійного осцилятора від класичного дисипативного лінійного, де вільні затухаючі коливання тривають у часі до нескінченності, бо відсутня область застою. З'ясовано умови, коли сила нелінійного в'язкого опору призводить до появи області застою. Наведено приклади розрахунків вільних коливань і проведено порівняння результатів, одержаних різними способами.

Ключові слова: вільні коливання, нелінійно-в'язке тертя, можливість застою коливань, метод енергетичного балансу.

В. П. ОЛЬШАНСКИЙ, С. В. ОЛЬШАНСКИЙ

ОБ ОГРАНИЧЕННОЙ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТИ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ОСЦИЛЛЯТОРА С НЕЛИНЕЙНО ВЯЗКИМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ

Показано, что при действии силы степенного нелинейного вязкого сопротивления линейно упругий осциллятор может иметь область застоя свободных колебаний, как и при действии силы сухого трения Кулона. Тогда, получив заданное начальное отклонение от положения равновесия, такой осциллятор совершает ограниченное количество размахов, то есть его свободные колебания происходят на конечном промежутке времени, что обычно наблюдается на практике. В этом принципиальное отличие колебаний рассмотренного нелинейного осциллятора от классического диссипативного линейного, где свободные колебания продолжают до бесконечности, поскольку отсутствует область застоя. Определены условия, когда сила нелинейного вязкого сопротивления приводит к появлению области застоя. Приведены примеры расчетов свободных колебаний и проведено сравнение результатов, полученных разными способами.

Ключевые слова: свободные колебания, нелинейно-вязкое трение, возможность застоя колебаний, метод энергетического баланса.

V. P. OLSHANSKIY, S. V. OLSHANSKIY

ON LIMITED DURATION OF OSCILLATIONS OF FREE OSCILLATOR WITH NONLINEAR VISCOUS RESISTANCE

It is shown that under the action of the force of nonlinear viscous resistance, a linearly elastic oscillator can have a stagnation region of free oscillations, as under the action of the Coulomb's dry friction force. Then, having received a given initial deviation from the equilibrium position, such an oscillator performs a limited number of swings, i. e., its free oscillations occur over a finite period of time, which is usually observed in practice. This is the fundamental difference between the oscillations of the considered nonlinear oscillator and the classical dissipative linear one, where free oscillations continue infinitely, since there is no stagnation region. The conditions are determined when the force of nonlinear viscous resistance leads to the appearance of a stagnation region. Examples of calculations of free oscillations are given and the results obtained by applying different methods are compared.

Key words: free oscillations, nonlinear-viscous friction, the possibility of stagnation of oscillations, the energy balance method.

Вступ. Як відомо, зміна *амплітуд вільних коливань у часі в лінійного в'язкопружного осцилятора* відбувається за експоненціальним законом, а тривалість коливань не обмежена у часі. На практиці вільні коливання будь-якого осцилятора завжди зводяться до обмеженої кількості розмахів, а розбіжність теорії з практикою час-то намагаються пояснити додатковою наявністю *сили сухого тертя*. Але виявляється, що за певних обставин обмежену кількість розмахів нелінійний в'язкопружний осцилятор може мати і при відсутності сили сухого тертя. З'ясування умов такої можливості складає предмет даної роботи.

Огляд літературних джерел. Вільні затухаючі коливання лінійного в'язкопружного осцилятора висвітлені

© В. П. Ольшанський, С. В. Ольшанський, 2019