УДК 004.932

*А. П. ТАРАСЕНКО, С. Н.ТРОХИМЧУК*

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПРЕДПОСЫЛКИ ПОЛИНОРМАЛИЗАЦИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ МНОЖЕСТВА ОДНОТИПНЫХ ОБЪЕКТОВ

В настоящей статье с общетеоретических позиций рассматриваются вопросы, касающиеся определения оператора нормализации изображений множества однотипных объектов и построения соответствующего ему отображения. Предложенный подход построения полинормализатора относится к нелинейным методам цифровой обработки изображений, которые эффективнее традиционных линейных методов и обладают универсальностью. Это указывает на общность в анализе видеоинформации и открывает перспективные направления в дальнейших исследованиях.

**Ключевые слова:** полинормализация, нормализатор, множество однотипных объектов.

*О. П. ТАРАСЕНКО, С. М. ТРОХИМЧУК*

## ТЕОРЕТИЧНІ ПЕРЕДУМОВИ ПОЛІНОРМАЛІЗАЦІЇ ЗОБРАЖЕНЬ МНОЖИНИ ОДНОТИПОВИХ ОБ’ЄКТІВ

У даній статті з загальнотеоретичних позицій розглянуто питання щодо визначення оператора нормалізації зображень множини однотипових об’єктів та побудови відповідаючого йому відображення. Введено поняття полінормалізатора та отримані результати відносно його формального опису. Доведено ряд тверджень щодо побудови полінормалізатора. Запропонований підхід побудови полінормалізатору відноситься до нелінійних методів цифрової обробки зображень, які є ефективнішими за традиційні лінійні методи, а також універсальними. Це вказує на спільність в аналізі відеоінформації і відкриває перспективні напрями в подальших дослідженнях.

**Ключові слова:** полінормалізація, нормалізатор, множина однотипових об’єктів.

*A. P. TARASENKO, S. M. TROKHYMCHUK*

## THEORETICAL PRECONDITIONS OF POLYNORMALIZATION OF IMAGES OF SET OF SAME TYPE OBJECTS

From general-theoretical positions the questions concerning determination of the operator of normalisation of images of a set of the same type objects and construction of the corresponding mapping are considered. The concept of polynormalizer is introduces and the results concerning its formal description are obtained. A number of the statements on polynormalzer constructions are proved. The approach proposed for creating a polynormalizer belongs to nonlinear methods of digital processing of images which are more effective than traditional linear methods as well as universal. This indicates generality in the analysis of video information and opens perspective directions for further researches.

**Key words:** polynormalization, normalizer, set of the same type objects.

**Введение.** Традиционные методы нормализации, успешно обрабатывающие изображения одного объекта, находящегося в поле зрения видеодатчика, принципиально не в состоянии проводить анализ группы объектов. В основу существующих алгоритмов нормализации положены линейные методы обработки изображений объектов, которые успешно справлялись с поставленными ранее задачами [1]. С ростом числа объектов, обрабатываемых с помощью монокулярных систем формирования изображений, малоэффективно проводить наращивание типовых специализированных технических устройств, ориентированных на анализ изображений одного объекта. Это приводит к нерациональному использованию подобных систем. Получившие широкое распространение корреляционные методы требуют большого объема вычислений. Выход из этого положения может быть найден путем разработки принципиально новых, в частности, нелинейных методов обработки визуальной информации множества объектов, поскольку потенциально нелинейные методы обладают большей универсальностью и эффективностью, чем линейные.

**Целью данной статьи** является развитие теоретических основ анализа группы объектов с использованием алгоритмов полинормализации, которые, как показали дальнейшие исследования авторов, обладают нелинейностью, что подтверждает главный подход в использовании нелинейных методов с точки зрения системного анализа.

**Исходные предпосылки.** Пусть в *трехмерном евклидовом пространстве* $R^3$ заданы $n$ пространственных объектов $S_i (i = \overline{1, n})$. *Пространственный объект* представляет собой связное множество точек, ограниченное некоторой замкнутой поверхностью и занимающее определенное положение в пространстве $R^3$ [2]. Соответствующие объектам $S_i$ центральные проекции [3] на подпространство $R^2$ обозначим через $A_i$, где $A_i \in R^2$ $(i = \overline{1, n})$. На рис. 1 показан пример центральных проекций для трех пространственных объектов. В оптических системах центр проекции соответствует задней узловой точке объектива [4].

Положим, что $A_i$ $(i = \overline{1, n})$ размещены в некоторой замкнутой области $D$, называемой *полем зрения*, где $D \subset R^2$, если выполняются следующие условия:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \bigcap D = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \,; \tag{1}$$

$$\forall i,\ j = \overline{1,n} : i \neq j \quad A_i \bigcap A_j = \varnothing \,. \tag{2}$$

При этом также полагаем, что плоское изображение $B(x, y)$, регистрируемое фотокамерой (или на экране передающей телевизионной трубки) и соответствующее центральной проекции $A$ пространственного объекта $S$, описывается уравнением двумерной свертки и представляет собой интенсивность отраженного от объекта светового потока [5, 6].

Определим на подпространстве $R^2$ *финитные функции* $\tilde{B}_i(x, y)$, однозначно характеризующие объекты $S_i$, следующим образом:

$$\tilde{B}_i(x, y) \equiv \begin{cases} B_i(x, y) \ \ \forall\ (x, y) \in A_i; \\ 0 \quad \forall (x, y) \in R^2 / A_i, \end{cases} \tag{3}$$

$\forall i : i = \overline{1, n}$.

На рис. 1 замкнутые области $A_i$ принято называть [7] *носителями изображений* $B_i(x, y)$, $R^2 / A_i$ – *разностью* $R^2$ и $A_i$. Изображения $B_i(x, y)$ $(i = \overline{1, n})$, в силу высказанных выше предложений, являются неотрицательно-определёнными непрерывными функциями и принадлежат пространству $C^2(D)$ дважды дифференцируемых непрерывных функций в области $D$.

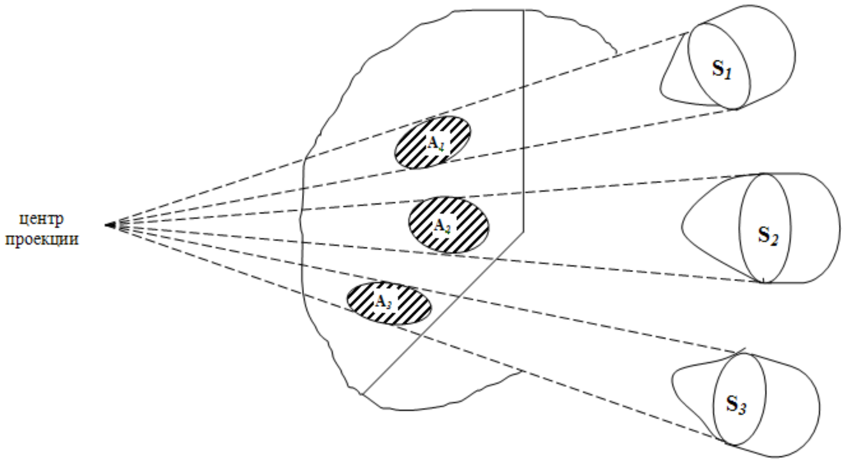


Рис.1 – Центральные проекции для трех пространственных объектов.

Тогда изображение $B(x, y)$ $n$ объектов $S_i (i = \overline{1, n})$, попавших в поле зрения и удовлетворяющих выражениям (1), (2), (3), эквивалентно равенству

$$B(x, y) = \sum_{i=1}^{n} B_i(x, y) \,. \tag{4}$$

Действие группы $G$ геометрических преобразований в пространстве $R^2$ на множестве $M = \{B(x, y)\}$ изображений порождает отношение эквивалентности, которому соответствует разбиение множества на непересекающиеся *классы эквивалентности* $m_\lambda$, где $\lambda \in N$, $N$ – множество натуральных чисел [8]. Рассмотрим некоторый класс эквивалентности $m < M$, образованный фиксированным *нормальным (эталонным) изображением*.

$$B_0(x, y) \in m, \exists g \in G : B(x, y) = B_0(g \circ (x, y)) \tag{5}$$

или сокращенно $B = B_0 \circ g$, где «$\circ$» обозначает действие группы $G$. Тогда выражение (4), с учетом того, что $B_i(x, y) \in m$,

$$B_i(x, y) = B_0(g_i \circ (x, y)),\ \ i = \overline{1, n}$$

и удовлетворяют условиям (1), (2), (3), будет выглядеть следующим образом:

$$B(x, y) = \sum_{i=1}^{n} B_0(g_i \circ (x, y)) \,. \tag{6}$$

**Исследование полинормализатора.** В классической теории нормализации изображений все основные определения и утверждения были получены для случая, когда в поле зрения $D$ присутствует изображение одного объекта, то есть $B(x,\, y) = B_0(g_i^0(x,\, y))$. Поэтому необходимо расширить основные понятия, заложенные в классической теории нормализации, которые бы позволили формализовать процедуру нормализации изображений нескольких объектов.

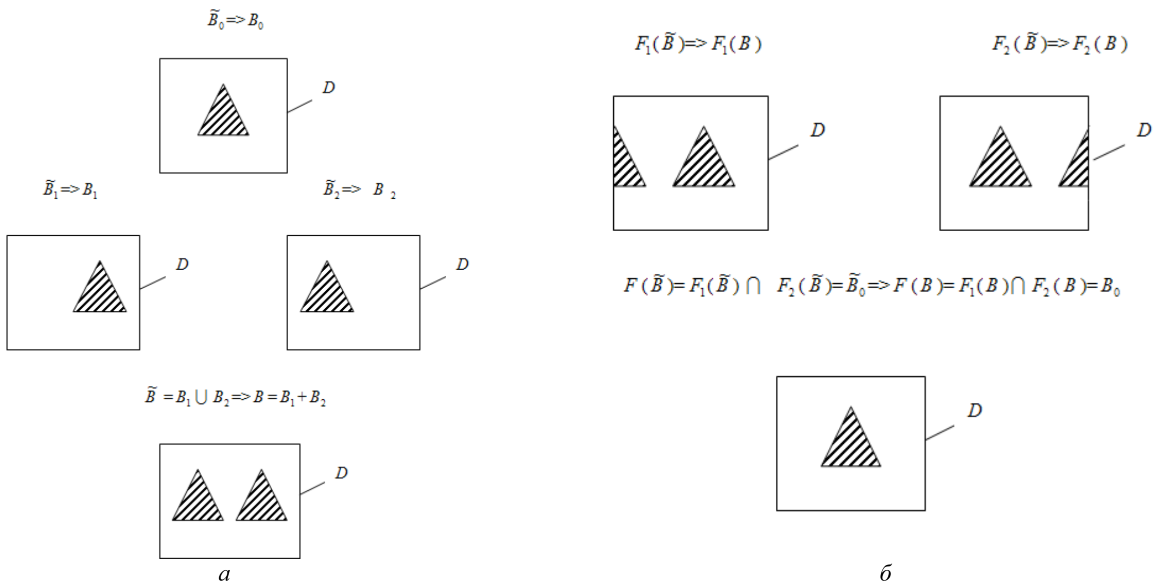


Рис. 2 – Пример полинормализатора $F$ для двух изображений однотипных объектов:
*а* – пример двух однотипных объектов, подверженных группе смещений; *б* – результат полинормализаци.

В содержательном плане задача нормализации изображений нескольких однотипных объектов (полинормализация) заключается в том, чтобы по изображению $B(x,\, y)$, представленному в виде (6), найти эталонное изображение $B_0(x,\, y)$.

Под однотипными объектами следует понимать такие трехмерные связные объекты, центральные проекции которых представляют собой изображения, принадлежащие одному и тому же классу эквивалентности $M$. Следовательно, необходимо построить такой оператор $F : F(B) = B_0$.

Для этого введем следующие определения.

*Определение I.* Преобразование $F : M \to M$ называется $\pi_n$ *– оператором*, где $n \ge 1$, если существует такая совокупность $\pi$ – операторов [7] $F_i$, $i = \overline{1, n}$, что для любого изображения $B$, удовлетворяющего (6), выполняется равенство

$$F(B) = \bigcap_{i=1}^{n} F_i(B)\,, \tag{7}$$

где : $F_i(B) = B \circ \overline{\Phi_i} < B >,\; \overline{\Phi_i} : M \to G,\; i = \overline{1, n}$.

*Определение II.* Преобразование $F : M \to M$ называется *оператором нормализации изображений* нескольких однотипных объектов (*полинормализатором*), если $F$ есть $\pi_n$ – оператор и $F(B) \in M_0$, где $M_0$ – множество эталонных изображений.

На рис. 2 приведен пример, иллюстрирующий смысл введенных выше определений в случае действия группы смещений.

Для полинормализатора $F$ справедливо следующее утверждение.

*Утверждение*. Если отображение $F : M \to M$ является полинормализатором, то существует отображение $\overline{\Phi_i} : M \to G$, которое удовлетворяет следующему соотношению:

$$\bigcup_{i=1}^{n} B_i \circ \overline{\Phi_i} < B_i > = \bigcap_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{n} B_j \circ \overline{\Phi_i} < B_j > .$$

*Доказательство*. Так как $B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ и полинормализатор $F$ является отображением множества $M$ самого на себя, то воспользуемся следующей теоремой, которая гласит, что образ суммы множеств равен сумме образов этих множеств [9], то есть

$$F(B)=F\left(\bigcup_{i=1}^{n}B_i\right)=\bigcup_{i=1}^{n}F\left(B_i\right).$$

Для одного изображения $B_i$ полинормализатор $F$ совпадает с нормализатором $F$. Поэтому [9] существует отображение $\overline{\Phi_{\text{i}}}:M\to G$, $i=\overline{1,n}$. Окончательно получаем, что

$$\bigcup_{i=1}^{n}B_i\ \ o\ \ \overline{\Phi_{\text{i}}}<B_i>=\bigcap_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{n}B_j\ \ o\ \ \overline{\Phi_{\text{i}}}<B_j>.$$

Таким образом, справедливость утверждения доказана.

**Нелинейная процедура построения полинормализатора параметров смещений.** До сих пор в *теории нормализации изображений* рассматривались в основном линейные методы (линейность методов вытекает из решений систем линейных уравнений). Однако при анализе изображений нескольких однотипных объектов возникает определенная трудность применения линейных методов. Это связано, прежде всего, с вырожденностью системы исходных линейных уравнений).

Рассмотрим нелинейную процедуру построения полинормализатора.

Для этого введем следующее функциональное преобразование:

$$\Phi_{\kappa}\left(\omega_1\right)=\int_D e^{k\omega_1 x}B\left(x,y\right)ds_{xy}\ . \tag{8}$$

Так как

$$B\left(x,y\right)=\sum_{i=1}^{n}B_i\left(x,y\right)=\sum_{i=1}^{n}B_0\left(x+a_i,\ y+b_i\right),$$

где $a_i$ и $b_i$ соответственно параметры смещения по оси $X$ и оси $Y$, то проанализируем выражение (8):

$$\Phi_{\kappa}\left(\omega_1\right)=\int_D e^{k\omega_1 x}\sum_{i=1}^{n}B_0\left(x+a_i,\ y+b_i\right)ds_{xy}=\sum_{i=1}^{n}\int_D e^{k\omega_1 x}B_0\left(x+a_i,y+b_i\right)ds_{xy}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}e^{-k\omega_1 a_i}\int_D e^{k\omega_1 u}B_0\left(u,v\right)ds_{uv}=\Phi_k^0\left(\omega_1\right)\sum_{i=1}^{n}x_i^k\ ,$$

где $u=x+a_i$, $v=y+b_i$ и

$$\Phi_k^0\left(\omega_1\right)=\int_D e^{k\omega_1 x}B_0\left(x,y\right)ds_{xy}\ ,\ \ x_i^k=e^{-k\omega_1 a_i}>0\quad\forall i:\ i=\overline{1,n}\,.$$

В результате получаем нелинейную алгебраическую систему $n$ уравнений с $n$ неизвестными:

$$C_k\left(\omega_1\right)=C_k=\sum_{i=1}^{n}x_i^k\ , \tag{9}$$

где

$$C_k\left(\omega_1\right)=C_k=\Phi_k\left(\omega_1\right)\big/\Phi_k^0\left(\omega_1\right)>0\,,$$

так как $\Phi_k\left(\omega_1\right)$, $\Phi_k^0\left(\omega_1\right)>0$ в силу неотрицательности подынтегральных функций.

Можно заметить, что $C_k$, $k=\overline{1,n}$ из (9) являются симметрическими многочленами переменных $x_i$, $i=\overline{1,n}$ и называются *степенными суммами*. Существует определенная связь между степенными суммами $C_k$, $k=\overline{1,n}$ и элементарными симметрическими многочленами $\sigma_k$, $k=\overline{1,n}$ в виде *формулы Ньютона*:

$$c_k-c_{k-1}\sigma_1+c_{k-2}\sigma_2-\ldots+\left(-1\right)^{k-1}c_1\sigma_{k-1}+\left(-1\right)^k k\sigma_k=0\,,\ \ c_0=1\,,\ \ k=\overline{1,n}\,.$$

Формула Ньютона позволяет последовательно находить выражения для $c_k$, $k=\overline{1,n}$ через $\sigma_k$, $k=\overline{1,n}$, а также выразить элементарные симметрические многочлены $\sigma_k$, $k=\overline{1,n}$, зная первые $n$ степенных сумм $c_k$, $k=\overline{1,n}$.

$$\sigma_1=c_1\,;$$

$$\sigma_2=\frac{1}{2}\left(c_1\sigma_1-c_2\right)=\frac{1}{2}\left(c_1^2-c_2\right);$$

$$\sigma_3=\frac{1}{3}\left(c_3-c_2\sigma_1+c_1\sigma_2\right)=\frac{1}{6}\left(c_1^3-3c_1c_2+2c_3\right)$$

и так далее.

Известно, что с точностью до знака элементарные симметрические многочлены являются коэффициентами некоторого многочлена от одного неизвестного, имеющего старшим коэффициентом единицу. Следовательно, задачу нахождения решения системы можно свести к задаче нахождения действительных положительных корней некоторого многочлена $n-$й степени

$$f(x)=x^n+\alpha_1x^{n-1}+\alpha_2x^{n-2}+\ldots+\alpha_n=0. \qquad (10)$$

где $\alpha_i=(-1)^i\sigma_i$, а $\sigma_i$ являются действительными положительными функциями от $c_1$, $c_2$, …, $c_i$, $\forall i: i\le n$.

В связи с этим рассмотрим вопрос существования положительных корней $f(x)$. Сначала установим число отрицательных корней, воспользовавшись *правилом знаков Декарта*, которое гласит, что число положительных корней (подсчитанное с учетом кратности) уравнения

$$f(x)=\alpha_0x^n+\alpha_1x^{n-1}+\alpha_2x^{n-2}+\ldots+\alpha_n=0$$

не больше числа перемен знака в последовательности

$$\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n$$

коэффициентов $f(x)$ и может отличаться от него лишь на четное число. Так как при замене $x$ на $-x$ корни уравнения меняют знаки, то воспользовавшись правилом Декарта, оценим число отрицательных корней. Для этого проанализируем случаи, когда показатель степени четный и нечетный. Рассмотрим первый случай $n=2k$. Запишем выражение для $f(x)$ в (10). Имеем

$$f(-x)=(-x)^{2k}+\alpha_1(-x)^{2k-1}+\alpha_2(-x)^{2k-2}+\ldots+\alpha_{2k}=x^{2k}-\alpha_1x^{2k-1}+\alpha_2x^{2k-2}-\ldots+\alpha_{2k}$$

или, учитывая, что для нечетных $i$ $\alpha_i=-\sigma_i$, получаем:

$$f(-x)=x^{2k}+\sigma_1x^{2k-1}+\sigma_2x^{2k-2}+\ldots+\alpha_{2k}. \qquad (11)$$

Следовательно, последовательность знаков коэффициентов (11) выглядит следующим образом:

$$\begin{matrix} + & + & + & + & + & + & \ldots & + \\ 1 & \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & \sigma_4 & \sigma_5 & \ldots & \sigma_{2k}. \end{matrix} \qquad (12)$$

Так как число перемен знаков в последовательности (12) равно нулю, следовательно, число отрицательных корней в уравнении (10) также равно нулю. Для второго случая, когда $n$ – нечетное ($n=2k+1$), выражение для $f(-x)$ имеет вид:

$$f(-x)=(-x)^{2k+1}+\alpha_1(-x)^{2k}+\alpha_2(-x)^{2k-1}+\ldots+\alpha_{2k+1}=-x^{2k+1}+\alpha_1x^{2k-1}-\alpha_2x^{2k-1}+\ldots+\alpha_{2k+1}.$$

Учитывая, что для нечетных $i$ $\alpha_i=-\sigma_i$ получаем

$$f(-x)=-x^{2k+1}-\sigma_1x^{2k}-\sigma_2x^{2k-1}-\ldots-\sigma_{2k+1}. \qquad (13)$$

Последовательность знаков коэффициентов (13) равна

$$\begin{matrix} - & - & - & - & - & - & \ldots & - \\ -1 & -\sigma_1 & -\sigma_2 & -\sigma_3 & -\sigma_4 & -\sigma_5 & \ldots & -\sigma_{2k+1}. \end{matrix}$$

Следовательно, и для нечетных $n$ число отрицательных корней уравнения также равно нулю. Отсюда можно сделать вывод: корнями уравнения могут быть либо положительные числа, либо положительные и комплексные. Наличие комплексных корней свидетельствует о том, что исходная нелинейная система алгебраических уравнений (9) является переопределенной, то есть число уравнений $n$ больше числа $m$ неизвестных. Это означает, что априорно задаваемое число однотипных объектов не соответствует фактически обрабатываемому или можно предположить о существовании объектов, изображения которых не принадлежат рассматриваемому классу эквивалентности. Следует отметить, что в общем случае для нахождения корней (10) можно использовать различные итерационные методы.

Рассмотрим аналогичную процедуру получения выражения (9), но для вычисления смещений $b_i$, $i=\overline{1,n}$ по оси $Y$. Для этого функциональное преобразование (8) видоизменим:

$$\overset{\approx}{\Phi}_\kappa(\omega_2)=\int\limits_D e^{k\omega_2 y}B(x,y)ds_{xy}.$$

С другой стороны,

$$\overset{\approx}{\Phi}_\kappa(\omega_2)=\overset{\approx}{\Phi}{}_k^0(\omega_2)\sum_{i=1}^n y_i^k,$$

где

$$\overset{\approx}{\Phi}{}_k^0(\omega_2)=\int\limits_D e^{k\omega_2 y}B_0(x,y)ds_{xy},\quad y_i^k=e^{-k\omega_2 b_i}>0,\quad \forall i: i=\overline{1,n}.$$

Аналогично системе (9) будет выглядеть и система $n$ уравнений для определения $n$ неизвестных $y_i$, где

$$y_i=e^{-\omega_2 b_i},\quad \forall i: i=\overline{1,n};$$

$$D_k(\omega_2) = D_k = \sum_{i=1}^{n} y_i^k , \quad (14)$$

где $D_k(\omega_2) = D_k = \overset{\approx}{\Phi}_k(\omega_2) \Big/ \overset{\approx}{\Phi}{}_k^0(\omega_2) > 0$, так как $\overset{\approx}{\Phi}_k(\omega_2)$, $\overset{\approx}{\Phi}{}_k^0(\omega_2) > 0$.

Решая систему уравнений (14) аналогично системе (10) получим корни $y_i$, $i = \overline{1, n}$. Следовательно, в результате решения подобных систем (10) и (14) имеем наборы параметров смещений $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$. Естественно, возникает вопрос о соответствии параметров смещений. Применение совместно методов полного перебора и корреляции требует значительных вычислительных затрат.

Для преодоления этого недостатка рассмотрим функциональное преобразование

$$\overset{\equiv}{\Phi}_\kappa(\omega_3) = \int_D e^{k\omega_3(x+y)} B(x,y)\, ds_{xy} .$$

Это выражение можно представить в виде произведения сомножителей:

$$\overset{\equiv}{\Phi}_\kappa(\omega_3) = \overset{\equiv}{\Phi}{}_k^0(\omega_3) \sum_{i=1}^{n} p_i^k ,$$

где

$$\overset{\equiv}{\Phi}{}_k^0(\omega_3) = \int_D e^{k\omega_3(x+y)} B_0(x,y)\, ds_{xy} , \quad p_i^k = e^{-k\omega_3(a_i+b_i)} > 0 \quad \forall i, k = \overline{1, n} ,$$

то есть $p_i = e^{-\omega_3(a_i+b_i)}$ являются функциями сумм соответствующих смещений по оси $X$ и по оси $Y$. Составим алгебраическую систему уравнений с неизвестными:

$$E_k(\omega_3) = E_k = \sum_{i=1}^{n} p_i^k ,$$

где

$$E_k(\omega_3) = E_k = \overset{\equiv}{\Phi}_k(\omega_3) \Big/ \overset{\equiv}{\Phi}{}_k^0(\omega_3) > 0 , \quad \text{так как} \quad \overset{\equiv}{\Phi}_k(\omega_3),\ \overset{\equiv}{\Phi}{}_k^0(\omega_3) > 0 .$$

Решая ее аналогично (10) и (14)определяем значения

$$s_i^+ = a_i + b_i = -\ln p_i / \omega_3 .$$

Теперь определим соответствие между изображениями $B_i(x,y)$ и параметрами их смещений относительно эталонного изображения $B_0(x,y)$, располагая совокупностями $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ и $\{s_i^+\}$. Для этого составим подстановку:

$$R = \begin{pmatrix} a_{i_1} & a_{i_2} & \dots & a_{i_n} \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} k \neq l \Rightarrow i_k \neq i_l ; \\ i_k, i_l \leq n. \end{array} \quad (15)$$

Поставим в соответствие каждой подстановке вида (15) набор $\{\xi_i\}$, где:

$$\xi_i = \left(a_{i_1} + b_1, a_{i_2} + b_2, \dots, a_{i_n} + b_n\right) \quad i = \overline{1, n!} .$$

Упорядочивая и сравнивая $\xi_i$ $i = \overline{1, n!}$ с упорядоченным вектором $\xi_0 = \left(s_1^+, s_2^+, \dots, s_n^+\right)$, определяем истинные значения параметров смещений. Число вариантов перебора равно $n!$, где $n$ – количество однотипных объектов, попавших в поле зрения $D$, и это число намного меньше числа вариантов перебора, используемого при корреляционном методе.

Для сравнительно небольшого числа объектов $n \leq 4$ можно получить в явном виде формулы, необходимые для вычисления параметров смещений этих объектов.

Рассмотрим вначале случай, когда $n = 2$. Тогда система уравнений (9) имеет вид

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = c_1 ; \\ x_1^2 + x_2^2 = c_2 . \end{cases}$$

Откуда, выражая $x_2$ в первом уравнении и подставляя его во второе, получаем квадратное уравнение. Корни этого уравнения имеют вид:

$$x_{1(1,2)} = \frac{c_1 \pm \sqrt{2c_2 - c_1^2}}{2} . \quad (16)$$

Соответственно, $x_{2(1,2)} = x_{1(2,1)}$ то есть один из корней есть $x_1$, а другой – $x_2$.Покажем, что дискриминант в (16) является неотрицательным. Действительно,

$$2c_2 - c_1^2 = 2\left(x_1^2 + x_2^2\right) - \left(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2\right) = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = \left(x_1 - x_2\right)^2 \geq 0 .$$

Таким образом, решение исходной системы уравнений существует и выражается единственным образом с помощью (16). Аналогичным образом получаются выражения для $y_1$, $y_2$ и $p_1$, $p_2$. Достаточно проверить два варианта $(2! = 2)$, чтобы установить соответствие между параметрами смещений $\{a_1, a_2\}$, $\{b_1, b_2\}$ и $\{s_1^+, s_2^+\}$, а именно:

$$\text{1-й вариант} \quad \xi_1 = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \to \xi_0\left(s_1^+, s_2^+\right);$$

$$\text{2-й вариант} \quad \xi_2 = (a_2 + b_1, a_1 + b_2) \to \xi_0\left(s_1^+, s_2^+\right).$$

В общем случае вопрос об определении неизвестных в нелинейных системах уравнений вида (9) решается через определение корней многочленов, коэффициенты которых выражаются через левые части этих систем. Определение действительных, а, следовательно, и положительных корней многочленов может осуществляться с помощью последовательно используемых итерационных методов. Последовательно понижая степень построенных многочленов, можно сделать предложенную процедуру определения корней универсальной.

**Выводы.** В статье предложен обобщенный подход к теории нормализации изображений, который показал возможность расширения понятий нормализации изображений, и доказано существование, а также преобразование оператора нормализации в случае наличия нескольких однотипных объектов. Рассмотрена реализация предложенной теории к практически важной ситуации с определением параметров смещений и представлены все необходимые для этого расчеты.

**Список литературы**


1. *Gorokhovatskyi V. A., Vechirska I. D., Chetverikov G. G.* Method for Building of Logical Data Transform in the Problem of Establishing Links between the Objects in Intellectual Telecommunication Systems // Telecommunications and Radio Engineering. – 2016. – Vol. 75. – No. 18. – P. 1645 – 1655.
2. *Стоян Ю. Г., Гиль Н. И.* Методы и алгоритмы размещения плоских геометрических объектов. – Киев : Наукова думка, 1976. – 247 с.
3. *Фоли Дж., А. вэн Дэм.* Основы интерактивной машинной графики. Т. 1. – М. : Мир, 1985. – 367 с.
4. *Анисимов Б. В., Курганов В. Д., Злобин В. К.* Распознавание и цифровая обработка изображений. – М. : Высшая школа, 1983. – 296 с.
5. *Эндрюс Г., Инло Л.* Обработка изображений при помощи ЦВМ. – М. : Мир, 1973. – 160с.
6. *Виттих В. А., Сергеев В. В., Сойфер В. А.* Обработка изображений в автоматизированных системах научных исследований. – М. : Наука, 1982. – 213 с.
7. *Путятин Е. П., Шульгин И. В.* К вопросу моделирования механизмов нормализации зрительных образов. // В кн. : Проблемы бионики. – Харьков : Вища школа, 1971. – Вып. 5. – С. 102 – 104.
8. *Шафаревич И. Р.* Основы алгебраической геометрии. – М. : Наука, 1972. – 567 с.
9. *Gorokhovatsky V. A.* Efficient Estimation of Visual Object Relevance during Recognition through their Vector Descriptions // Telecommunications and Radio Engineering. – 2016. – Vol. 75. – No 14. – P. 1271 – 1283.


**References (transliterated)**


1. Gorokhovatskyi V. A., Vechirska I. D., Chetverikov G. G. Method for Building of Logical Data Transform in the Problem of Establishing Links between the Objects in Intellectual Telecommunication Systems. *Telecommunications and Radio Engineering*. 2016, vol. 75, no. 18, pp. 1645–1655.
2. Stoyan Yu. G., Gil' N. I. *Metody i algoritmy razmesheniya ploskikh geometricheskikh ob"ektov* [Methods and Algorithms for Placing Plane Geometric Objects]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1976. 247 p.
3. Foli Dg., A. ven Dem. *Osnovy interaktivnoy mashinnoy grafiki. T. 1* [Basics of Interaction Computer Graphics. Vol. 1]. Moscow, Mir Publ., 1985. 367 p.
4. Anisimov B. V., Kurganov V. D., Zlobin V. K. *Raspoznavanie i tsifrovaya obrabotka izobrazheniy* [Image Recognition and Digital Processing]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1983. 296 p.
5. Endryus G., Inlo L. *Obrabotka izobrazheniy pri pomoshhi TSVM* [Image Processing by Digital Computer]. Moscow, Mir Publ., 1973. 160 p.
6. Vittikh V. A., Sergeev V. V., Soyfer V. A. *Obrabotka izobrazheniy v avtomatizirovannykh systemakh nauchnykh issledovaniy* [Image Processing in Scientific Research Automated Systems]. Moscow, Nauka Publ., 1982. 213 p.
7. Putyatin E. P., Ghul'gin I. V. K voprosu modelirovaniya mekhanizmov normalizatsii zritel'nykh obrazov [On the problem of modeling visual image normalization mechanisms. In : *Problemy bioniki* [Bionics Problems]. Kharkov, Vyshhya shkola Publ., 1971, vol. 5, pp. 102–104.
8. Shafarevich I. P. *Osnovy algebraicheskoy geometrii* [Basic Algebraic Geometry]. Moscow, Nauka Publ., 1972. 567 p.
9. Gorokhovatsky V. A. Efficient Estimation of Visual Object Relevance during Recognition through their Vector Descriptions. *Telecommunications and Radio Engineering*. 2016, vol. 75, no. 14, pp. 1271–1283.


*Поступила (received) 21.06.2019*

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

***Тарасенко Александр Прокофьевич (Тарасенко Олександр Прокопович, Tarasenko Alexander Prokofevich)*** – кандидат технічних наук, доцент, ДВНЗ «Харківський інститут банківської справи», м. Харків; тел.: (066) 637-25-63; e-mail: tap-top@ukr.net.

***Трохимчук Сергей Николаевич (Трохимчук Сергій Миколайович, Trokhymchuk Sergii Mikolayovich)*** – кандидат технічних наук, доцент, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (057) 733-7917-05-45; e-mail: trohimchuk_sn@uipa.edu.ua.