6. Khlopov G. I. *Radioelektronni ta navchal'no-trenuval'ni kompleksy dlya pidvyshhennya bezpeky pol'otiv* [Radioelectronic and training complexes for incresing flight safety], Kharkiv, 2010, 192 pp.
7. Kovalev E. D., Motsar' P. I., Udovenko V. A.. Sozdanie nelineynykh matematicheskikh modeley aerodinamiki i dinamiki poleta vintokrylykh apparatov [Creating non-linear mathematic models of aerodynamics and dynamics of rotorcraft's flight]. *Kolega* [Collegue]. 2010, no. 1, pp. 20–27.
8. Belotserkovskiy S. M., Nisht M. I. *Otryvnoe i bezotryvnoe obtekanie tonkikh kryl'ev ideal'noy zhidkost'yu* [Separated and non-separated flow of the ideal filuid about thin wings]. Moscow, Nauka Publ., 1978. 351 p.
9. Belotserkovskiy S. M., Loktev B. E., Nisht M. I. *Issledovanie na EVM aerodinamicheskikh i aerouprugikh kharakteristik vintov vertoletov* [Computer investigation of the aerodynamic and aeroelastic characteristics of helicopter rotors]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1992. 224p.
10. Aparinov V. A., Dvorak A. V. Metod diskretnykh vikhrey s zamknutymi vikhrevymi ramkami [Metod of discrete vortices with the closed vortex frames]. *Primenenie EVM dlya issledovaniya aerodinamicheskikh kharakteristik letatel'nykh apparatov. Trudy VVIA im. prof. N. E. Zhukovskogo* [Applicatinos of the computers for the investigation of aircraft's aerodynamic characteristics. Proc. of N. E. Zhukovsij Air Force Academy]. Moscow, 1986, issue 1313, pp. 424–429.

Поступила (received) 28.10.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Удовенко Володимир Олексійович (Удовенко Владимир Алексеевич, Udovenko Vladimir Alekseevich) **–** кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, директор, ТОВ «КБ Аеровотекс», м. Харків; тел.: (066) 288-37-06, (097) 271-33-42; e-mail: uva333@mail.ru.

Гладишев Андрій Іванович (Гладышев Андрей Иванович, Gladyshev Andrei Ivanovich) **–** інженер-програміст числового експерименту, ТОВ «КБ Аеровотекс», м. Харків; тел.: (095) 889-19-29; e-mail: petrov@inbox.ru.

УДК 519.6

Н. В. ЧЕРЕМСЬКА

СПЕКТРАЛЬНИЙ РОЗКЛАД ОДНОГО КЛАСУ НЕСТАЦІОНАРНИХ ВИПАДКОВИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

В роботі отримано спектральні розклади для нестаціонарних випадкових послідовностей, у яких при вкладанні в гільбертів простір відповідна послідовність у цьому просторі має зображення $x_n = A^n x_0$, за допомогою спектральної теорії несамоспряжених операторів. Ці зображення є аналогом спектральних розкладів стаціонарних випадкових послідовностей, які є суперпозицією станів дискретних осциляторів. В нестаціонарному випадку для дискретного спектра отримано суперпозицію внутрішніх станів дискретних осциляторів з частотами, які лежать у верхній півплощині, крім того, отримані принципово нові типи спектральних розкладів, коли послідовність зображується у вигляді суперпозиції внутрішніх станів дискретних струн. Також розглянуто перспективи подальших досліджень.

Ключові слова: гільбертів простір, нестаціонарна випадкова послідовність, спектральна теорія несамоспряжених операторів.

Н. В. ЧЕРЕМСКАЯ

СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ОДНОГО КЛАССА НЕСТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

В работе получены спектральные разложения для нестационарных случайных последовательностей, у которых при вложении в гильбертово пространство соответствующая последовательность в этом пространстве имеет представление $x_n = A^n x_0$, с помощью спектральной теории несамосопряженных операторов. Эти представления являются аналогом спектральных разложений стационарных случайных последовательностей, являющихся суперпозицией состояний дискретных осцилляторов. В нестационарном случае для дискретного спектра получена суперпозиция внутренних состояний дискретных осцилляторов с частотами, лежащими в верхней полуплоскости, кроме этого, получены принципиально новые типы спектральных разложений, когда последовательность представляется в виде суперпозиции внутренних состояний дискретных струн. Также рассмотрены перспективы дальнейших исследований.

Ключевые слова: гильбертово пространство, нестационарная случайная последовательность, спектральная теория несамосопряженных операторов.

N. V. CHEREMSKAYA

SPECTRAL EXPANSION FOR A CLASS OF NON-STATIONARY RANDOM SEQUENCES

In this paper we obtain spectral decompositions for non-stationary random sequences for which, when embedded in a Hilbert space, the corresponding sequence in this space can be represented $x_n = A^n x_0$ using the spectral theory of non-self-adjoint operators. These representations are analogous to the spectral decompositions of stationary random sequences, which are a superposition of the states of discrete oscillators. In the non-stationary case, for a discrete spectrum, a superposition of the internal states of discrete oscillators with frequencies lying in the upper half-plane is obtained, in addition, fundamentally new types of spectral decompositions are obtained when the sequence is represented as a superposition of the internal states of discrete strings. Also we consider some recommendations for further research.

Key words: Hilbert space, non-stationary random sequence, spectral theory of non-self-adjoint operators.

Вступ. *Спектральні розклади випадкових функцій* є основою для прикладного аналізу випадкових процесів і послідовностей, через те, що являють собою суперпозицію внутрішніх станів гармонічних осциляторів з дійсними частотами [1]. У випадку, коли умова стаціонарності (в широкому сенсі) порушується, побудова спектральної теорії нестаціонарних випадкових послідовностей наштовхується на істотні труднощі. Здається, побудова загальної теорії навряд чи здійсниться. Тому більш логічним є напрям, коли виділяються деякі класи нестаціонарних випадкових функцій. *А. М. Колмогоров* у своїх роботах [2, 3] вперше використав *спектральну теорію несамоспряжених* або *неунітарних операторів* для побудови спектральної теорії стаціонарних випадкових процесів або стаціонарних випадкових послідовностей.

Аналіз останніх досліджень. Для розв'язання задач, для яких припущення щодо статистичної стаціонарності не виконується, використовувались певні узагальнення стаціонарних випадкових функцій, які являють собою *адитивні* або *мультиплікативні збурення* стаціонарних випадкових процесів або однорідних випадкових полів, а саме: випадкові функції зі стаціонарними приростами, які використовуються, наприклад, для моделювання *атмосферної турбулентності* [4, 5, 6], локально-стаціонарні випадкові процеси та локально-однорідні випадкові поля, які використовуються, наприклад, для моделювання поширення електромагнітних хвиль у атмосфері Венери [7, 8, 9] та інші.

Проте, спроба застосування перелічених вище моделей нестаціонарних процесів для низки задач призводить до великих похибок. Враховуючи вищесказане, актуальною задачею є побудова спектральної теорії нестаціонарних випадкових послідовностей, яка б не мала цих недоліків.

Постановка задачі. Побудова спектральної теорії нестаціонарних випадкових послідовностей природньо потребує використання спектральної теорії несамоспряжених або *квазіунітарних операторів* [10, 11, 12]. В даній роботі запропоновано метод отримання спектральних розкладів нестаціонарних випадкових послідовностей, у яких при вкладанні в *гільбертів простір* відповідна послідовність у цьому просторі має зображення $x_n = A^n x_0$.

Математична модель. Якщо $A : H \to H$, H – гільбертів простір – самоспряжений обмежений оператор, то кореляційна функція, яку можна обчислити як відповідний скалярний добуток [13], залежить від суми аргументів (*ганкелева випадкова послідовність*). Для такої послідовності легко отримати спектральне зображення вигляду:

$$\xi_n = \int_a^b \lambda^n dZ(\lambda),$$

де $Z(\lambda)$ – стандартний випадковий процес з *некорельованим приростом*.

Якщо послідовність неганкелева, але $\dim\left(\overline{\operatorname{Im} A}\right)H < \infty$, то для отримання спектрального розкладу можна застосувати методи теорії несамоспряжених операторів та асоційованих відкритих систем [13]. Трійку $\left(H,\ A \in [H, H],\ \xi_0 \in H\right)$ називатимемо *операторним зображенням випадкової послідовності* (тобто у відповідному *гільбертовому просторі* послідовність має зображення $x_n = A^n x_0$).

Розглянемо два випадки спектра оператора A.

Нехай спектр оператора A дискретний та міститься у верхній комплексній півплощині. Введемо підпростір гільбертова простору H : $E = \left(\overline{\operatorname{Im} A}\right)H$. Нехай $\dim E = r < \infty$. Розглянемо дві послідовності некорельованих випадкових величин $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ та $\{a_\alpha\}_{\alpha=1}^{\infty}$ з нульовими математичними очікуваннями та одиничними дисперсіями $Mz_k \overline{z_j} = \delta_{kj}$, $Ma_\alpha \overline{a_\beta} = \delta_{\alpha\beta}$, де δ_{ij} – *символ Кронекера*. Розглянемо сукупність детермінованих функцій $\psi_k(n)$, яка задовольняє системі різницевих рівнянь першого порядку:

$$i\psi_k(n+1) + \lambda_k \psi_k(n) = \sum_{\alpha=1}^{r} u_k^{(\alpha)}(n) \sqrt{\omega_\alpha} Ma_\alpha \overline{z_k};$$

$$\psi_k(n)\big|_{n=0} = \psi_k(0);$$

$$u_{k+1}^{(\alpha)}(n) = u_k^{(\alpha)}(n) - i\sqrt{\omega_\alpha} Ma_\alpha \overline{z_k} \psi_k(n);$$

$$u_k^{(\alpha)}(n)\Big|_{k=0} = 0, \quad u_k^{(\alpha)}(n) = Mu_k(n)\overline{a_\alpha}\,, \tag{1}$$

де λ_k – власні числа оператора A, а ω_α – власні числа оператора $2\operatorname{Im} A$.

Теорема 1. *Якщо* $x(n,\omega)$ *– нестаціонарна випадкова послідовність, яка має операторне зображення у відповідному гільбертовому просторі вигляду* $x_n = A^n x_0$, *то є справедливим розкладання*:

$$x_n = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(n) z_k\,, \tag{2}$$

де $\psi_k(n)$ *знаходиться із системи (1).*

Доведення. Включимо A до операторного комплексу $K = (A, H, g_1, \ldots, g_r, J = I)$. Тоді [13] комплекс K можна зобразити у вигляді зчеплення операторних комплексів $K_m^\perp$, де $K_m^\perp$ – проекція комплексу K на підпростір $H_m^\perp = H_{m-1} \Theta H_m$, де $H_m = H \Theta H_m^\perp$, а H_m^* – зростаюча система скінченновимірних інваріантних підпросторів $H_0^* \subset H_1^* \subset H_2^* \subset \ldots$ така, що $\dim(H_{m-1}^* \Theta H_m^*) = 1$ та $\lim\limits_{m\to\infty} H_m^* = H$. Комплекс K має структуру

$$K_m^\perp = P_m^\perp H = \left(A_m^\perp, H_m^\perp, g_1^{(m)}, \ldots, g_r^{(m)}, I\right),\ A_m^\perp h_m = \lambda_m h_m,\ g_\alpha^{(m)} = P_m^\perp g_\alpha = \left\langle g_\alpha, z_m \right\rangle z_m\,.$$

$P_m^\perp$ – проекція на підпростір $H_m^\perp = H_{m-1} \Theta H_m$, де $H_m = H - H_m^*$.

Позначимо $z_m(n) = \psi_m(n) z_m$. Маємо для відкритої системи, яка асоційована з комплексом $K_m^\perp$:

$$\psi_m(n+1) + i\lambda_m \psi_m(n) = -i\sum_{\alpha=1}^{r} u_{\alpha,m}(n)\langle g_\alpha, z_m\rangle\,;$$

$$\psi_m\big|_{n=0} = \psi_{m,0}\,;$$

$$v_{\alpha,m}(n) = u_{\alpha,m}(n) - i\overline{\langle g_\alpha, z_m\rangle}\psi_m(n)\,.$$

Тоді, використовуючи результати роботи по зчепленню операторних комплексів [10], отримуємо усі твердження теореми, враховуючи, що g_α можна обрати у вигляді $g_\alpha = \sqrt{|\omega_\alpha|}a_\alpha$, де $|\omega_\alpha|$ – власні числа оператора $2\operatorname{Im} A$. Розглядаючи $2\operatorname{Im} A = B,\ B = B^*$ та обираючи як базис власні вектори a_α оператора B, маємо:

$$Bu = B\left(\sum_{\alpha=1}^{r} u_\alpha a_\alpha\right).$$

Через те, що $\omega_\alpha = \operatorname{sign}\omega_\alpha |\omega_\alpha|$ отримуємо:

$$\sum_{\alpha=1}^{r} \langle \cdot, a_\alpha\rangle B a_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{r} \omega_\alpha \langle \cdot, a_\alpha\rangle a_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{r} E_\alpha \langle \cdot, \mathrm{g}_\alpha\rangle \mathrm{g}_\alpha\,.$$

Отже, $g_\alpha = \sqrt{|\omega_\alpha|}a_\alpha \quad \omega_1, \ldots, \omega_p > 0, \quad \omega_{p+1}, \ldots, \omega_r < 0$.

Враховуючи, що елементами гільбертових просторів H та E є випадкові величини, а ортогональність еквівалентна некорельованості, отримуємо твердження теореми.

Розглянемо випадок оператору A, який у відповідному операторному зображенні має нескінченнократний спектр у нулі та скінченновимірний неермітовий підпростір (*вольтерів дисипативний оператор*).

Включимо оператор A до операторного комплексу $\tilde{K} = (\tilde{A}, \tilde{H}, \tilde{g}_1, \ldots, \tilde{g}_r, J = I)$, де $\tilde{g}_\alpha = \sqrt{|\omega_\alpha|}a_\alpha \left(\alpha = \overline{1,r}\right)$, $Ma_\alpha \overline{a_\beta} = \delta_{\alpha\beta}$, тоді за теоремою 8.3 [13] комплекс $\tilde{K}$ є унітарно еквівалентним комплеку

$$K = \left(A, L^2_{[0,l]}, g_1(x), \ldots, g_r(x), I\right),$$

де

$$Af(x) = i\int_0^x f(y) g(y)\overline{g(y)}\,dy, \quad 0 \le x \le l; \quad f(x) \in L^2_{[0,l]}; \quad g(x) = \left(\theta_1(x), \ldots, \theta_r(x)\right);$$

$$\int_0^l g(x)\overline{g(x)}\,dx = \begin{pmatrix} \omega_1 & & & \\ 0 & \omega_2 & & \\ 0 & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \omega_r \end{pmatrix}; \quad \sum_{\alpha=1}^{r} \left|\theta_\alpha(x)\right|^2 \equiv 1, \quad (0 \le x \le l).$$

Введемо функцію $\mathrm{Z}_\Delta(x) = \begin{cases} 1, & x' \le x \le x''; \\ 0, & x \notin [x', x''], \end{cases}$ де $\Delta = [x', x'']$ $(0 \le x' \le x'' \le l)$;

$$\left\langle \mathrm{Z}_{\Delta 1}(x), \mathrm{Z}_{\Delta 2}(x) \right\rangle = d\left\langle \Delta_1 \cap \Delta_2 \right\rangle,$$

де d – довжина інтервалу $\Delta_1 \cap \Delta_2$. Тоді g_α та $f(x)$ як елементи гільбертового простору $L^2_{[0,l]}$ можна зобразити у вигляді $g_\alpha = \int_0^l \theta_\alpha(x)\,d\,\mathrm{Z}_{[0,x]}$, $f = \int_0^l f(x)\,d\,\mathrm{Z}_{[0,x]}$.

Рівняння відкритої системи, яка асоційована з комплексом, набуває вигляду:

$$f(n+1, x) - i\left(i\int_0^x f(n, y) \sum_{\alpha=1}^{r} \overline{\theta_\alpha(y)}\,\theta_\alpha(x)\,dy \right) = -i\sum_{\alpha=1}^{r} u_\alpha(n)\,\theta_\alpha(x);$$

$$f(n, x)\big|_{n=0} = f_0(x);$$

$$v_\alpha(n) = u_\alpha(n) - i\int_0^l f(n, y)\,\overline{\theta_\alpha(y)}\,dy;$$

$$f(n+1, x) = -i\sum_{\alpha=1}^{r} \theta_\alpha(x)\left[u_\alpha(n) - i\int_0^x f(n, y) \sum_{\alpha=1}^{r} \overline{\theta_\alpha(y)}\,dy \right].$$

Таким чином,

$$f(n+1, x) = -i\sum_{\alpha=1}^{r} \theta_\alpha(x)\,u_\alpha(n, x), \tag{3}$$

де

$$u_\alpha(n, x) = u_\alpha(n) - i\int_0^l f(n, y)\,\overline{\theta_\alpha(y)}\,dy;$$

$$u_\alpha(n, x)\big|_{x=0} = 0;$$

$$\frac{du_\alpha(n, x)}{dx} = -if(n, x)\,\overline{\theta_\alpha(x)}.$$

Через те, що $\tilde{A} = \bigcup A \bigcup^{-1}$, де $\bigcup$ – унітарний оператор, який відображує $L^2_{[0,l]}$ на H, та вважаючи $\mathrm{Z}_x = \bigcup z_{[0,x]}$, отримуємо теорему.

Теорема 2. *Для кожної послідовності $x_n = A^n x_0$ скінченного квазірангу, де A цілком несамоспряжений оператор зі спектром у нулі, існує спектральна міра z_x $(0 \le x \le l)$ та множина функцій $\theta_\alpha(x)\left(\alpha = \overline{1, r}\right)$, яка задовольняє наступним умовам*:

$$\left\langle \Delta_1 z, \Delta_2 z \right\rangle = d\left(\Delta_1 \cap \Delta_2\right),$$

де $\Delta_k z$ $(k = 1, 2)$ – прирости z_k відповідно на інтервалах Δ_k; $d(\Delta_1 \cap \Delta_2)$ – довжина спільної частини інтервалів Δ_k;

$$\sum_{\alpha=1}^{r} \left|\theta_\alpha(x)\right|^2 \equiv 1, \quad (0 \le x \le l);$$

$$\int_0^l \theta_\alpha(x)\,\overline{\theta_\beta(x)}\,dx = \delta_{\alpha\beta},$$

а послідовність x_n *можна зобразити у вигляді*:

$$x_n = \int_0^l f(n, x) dz_x , \tag{4}$$

де функція $f(n, x)$ *знаходиться із системи рівнянь (3).*

Доведення. Через те, що $W(n, m) = i \sum_{\alpha,\beta=1}^{r} \varphi_\alpha(n) J_{\alpha\beta} \overline{\varphi_\beta(m)} = i \sum_{\alpha=1}^{r} E_\alpha \varphi_\alpha(n) \overline{\varphi_\beta(m)}$, де $J_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; $E_\alpha = \begin{cases} 1, \ \alpha = \overline{1, p}; \\ -1, \ \alpha = \overline{p+1, r} \end{cases}$ та $\varphi_\alpha(n) = \left\langle A^n x_0, \tilde{g}_\alpha \right\rangle_H = \int_0^l f(n, x) \overline{g_\alpha(x)} dx$, то в даному випадку

$$g_\alpha(x) = \theta_\alpha(x), \quad f(n, x) = -i \sum_{\alpha=1}^{r} \theta_\alpha(x) u_\alpha(n-1, x).$$

Поклавши $u_\alpha(n) = 0$ та $x = l$, отримуємо, що $\varphi_\alpha(n) = i u_\alpha(n-1, l)$,

$$f(n+1, x) = -i \sum_{\alpha=1}^{r} \theta_\alpha(x) u_\alpha(n, x);$$

$$u_\alpha(n, x) = u_\alpha(n) - i \int_0^x f(n, y) \overline{\theta_\alpha(y)} dy;$$

$$u_\alpha(n) \equiv 0, \ f(n, y)\big|_{n=0} = f_0(y);$$

$$\frac{du_\alpha(n+1, x)}{dx} = -if(n+1, x) \theta_\alpha(x);$$

$$\frac{du_\alpha(n+1, x)}{dx} = -\sum_{\beta=1}^{r} \theta_\beta(x) u_\beta(n, x) \overline{\theta_\alpha(x)}.$$

Таким чином, $W(n, m)$ можна зобразити у вигляді

$$W(n, m) = i \sum_{\alpha=1}^{r} E_\alpha u_\alpha(l, n) \overline{u_\beta(l, m)},$$

де $u_\alpha(n, x)$ задовольняє наступній системі диференційних різницевих рівнянь:

$$\frac{du_\alpha(n+1, x)}{dx} + \sum_{\beta=1}^{r} \theta_\beta(x) u_\beta(n, x) \overline{\theta_\alpha(x)} = 0;$$

$$u_\alpha(0, n) = 0;$$

$$u_\alpha(x, 0) = -i \int_0^x f_0(y) \overline{\theta_\alpha(y)} dy,$$

а $f_0(x)$ – початковий елемент послідовності $f(n, x) = A^n f_0(x)$ в гільбертовому просторі $L^2_{[0,l]}$. Розв'язання цієї системи дозволяє знайти функцію $f(n, x)$ в спектральному розкладі $x_n = \int_0^l f(n, x) dz_x$ за формулою:

$$f(n, x) = i \sum_{\alpha=1}^{r} \frac{du_\alpha(n, x)}{dx} \theta_\alpha(x).$$

Цю формулу легко отримати, використовуючи умову $\sum_{\alpha=1}^{r} \left|\theta_\alpha(x)\right|^2 = 1$ та рівняння

$$u_\alpha(n, x) = -i \int_0^x f(n, y) \overline{\theta_\alpha(y)} dy.$$

Перспективи подальших досліджень. Автор вважає, що використовуючи операцію зчеплення операторних комплексів та операторних систем, які асоційовані з операторними комплексами, можна отримати спектральні розклади загального вигляду (коли спектр нестаціонарної випадкової послідовності міститься на скінченному інтервалі дійсної осі, кожна точка якого є точкою спектра нескінченної кратності). Аналогічний підхід може бути використано при побудові дискретних випадкових полів, для яких відповідна послідовність в гільбертовому просторі має вигляд $x(n, p) = A_1^n A_2^p x_0$, де A_j – обмежені двічі переставні несамоспряжені оператори. Використовуючи спектральну теорію операторів [14], для $x(n, p)$ можна отримати зображення вигляду

$$x(n, p) = \int_D f(n, \lambda, p, \mu)\xi(d\lambda, d\mu),$$

де $\xi(\Delta_1, \Delta_2)$ – стандартна стохастична міра, яка визначена на прямокутниках $\Delta \subseteq D$, $D = [a, b] \times [c, d]$; $M\xi(\Delta_1, \Delta_2) = S(\Delta_1 \cap \Delta_2)$, де $S(\Delta_1 \cap \Delta_2)$ – площа прямокутників $(\Delta_1 \cap \Delta_2)$. Функція $f(n, \lambda, p, \mu)$ знаходиться з системи диференційно-різницевих рівнянь, яка аналогічна системі (4), а

$$A_1 f(u, v) = i\int_0^u f(\tau_1, v)d\tau_1, \quad A_2 f(u, v) = i\int_0^v f(u, \tau_2)d\tau_2 .$$

У випадку, коли у дисипативних операторів A_1 та A_2 з дискретним спектром є спільний ланцюжок підпросторів, то для $x(n, p)$ можна отримати зображення вигляду:

$$x(n, p) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(n, p) z_k(\omega),$$

де $z_k(\omega)$ – некорельовані випадкові величини, а $\psi_k(n, p)$ знаходяться з системи різницевих рівнянь вигляду (2).

Висновки. Таким чином, спектральна теорія несамоспряжених операторів дозволила для нестаціонарних випадкових послідовностей, які допускають операторні зображення, отримати спектральні розклади.

Ці зображення є аналогом спектральних розкладів стаціонарних випадкових послідовностей, які є суперпозицією станів дискретних осциляторів, амплітуди яких некорельовані між собою та пов’язані функціонально. В нестаціонарному випадку для дискретного спектра отримуємо суперпозицію внутрішніх станів дискретних осциляторів з частотами, які лежать у верхній півплощині, до того ж, як і в стаціонарному випадку, амплітуди некорельовані, але функціонально зв’язані рекурентним співвідношенням. Слід відзначити, що, крім того, з’являються принципово нові типи спектральних розкладів, коли послідовність зображується у вигляді суперпозиції внутрішніх станів дискретних струн.

Список літератури

1. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. – М. : Наука,1977. – 654с.
2. *Колмогоров А. Н.* Кривые в гильбертовом пространстве, инвариантные по отношению к однопараметрической группе движений // ДАН СССР. – 1940. – Т.26. – № 1. – С. 6 – 9.
3. *Колмогоров А. Н.* Спираль Винера и некоторые интересные кривые в гильбертовом пространстве // ДАН СССР. – 1940. – Т.26. – №2. – С. 115 – 118.
4. *Монин А. С., Яглом А. М.* Статистическая гидродинамика. I ч. – М. : Наука, 1965. – 640 с.
5. *Рытов С. М.* Введение в статистическую радиофизику. I ч. Случайные процессы. – М. : Наука, 1976. – 496с.
6. *Тихонов В. И., Харисов В. Н.* Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. – М. : Радио и связь, 1991. – 608с.
7. *Исимару А.* Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных середах. Т. 1. – М. : Мир, 1981. – 279с.
8. *Исимару А.* Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных середах. Т. 2. – М. : Мир, 1981. – 317с.
9. *Татарский В. И.* Распространение волн в турбулентной атмосфере. – М. : Наука, 1967. – 548с.
10. *Лившиц М. С.* Операторы, колебания, волны. Открытые системы. – М. : Наука, 1966. – 298с.
11. *Бродский М. С.* Треугольные и жордановы представления линейных операторов. – М. : Наука, 1969. – 287с.
12. *Kuzhel A.* Characteristic Functions and Models of Nonself-Adjoint Operators. – Dokdrecht, Boston, London : Kluwer Academic Publishers, 1996. – 267 p.
13. *Лившиц М. С., Янцевич А. А.* Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах. – Харьков : Изд-во ХГУ, 1971. – 160с
14. *Золотарев В. А.* О треугольных моделях систем дважды перестановочных операторов // ДАН Арм.ССР. – 1979. – ХП. – № 3. – С. 136 – 140.

References (transliterated)

1. Gikhman I. I., Skorokhod A. V. *Vvedeniye v teoriyu sluchaynykh protsessov* [Introduction to the theory of random processes]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 654 p.
2. Kolmogorov A. N. Krivye v gil'bertovom prostranstve, invariantnye po otnosheniyu k odnoparametricheskoy gruppe dvizheniy [Curves in Hilbert space invariant with respect to the one-parameter displacement group]. *DAN SSSR* [Repots of the Academy of Science of the USSR]. 1940, vol. 26, no. 1, pp. 6–9.
3. Kolmogorov A. N. Spiral' Vinera i nekotoryye interesnye krivye v gil'bertovom prostranstve [Wiener spiral and other interesting curves in Hilbert space]. *DAN SSSR* [Repots of the Academy of Science of the USSR]. 1940, vol. 26, no. 2, pp. 115–118.
4. Monin A. S., Yaglom A. M. *Statisticheskaya gidrodinamika. I ch.* [Stochastic hydrodynamics. Part I]. Moscow, Nauka Publ., 1965. 640 p.
5. Rytov S. M. *Vvedeniye v statisticheskuyu radiofiziku. I ch. Sluchaynyye protsessy* [Introduction to the statistical radiophysics. Part I. Random pro-

cesses]. Moscow, Nauka Publ., 1976. 496 p.
6. Tikhonov V. I., Kharisov V. N. *Statisticheskiy analiz i sintez radiotekhnicheskikh ustroystv i system* [Statistical analysis and synthesis of radiotechnical devices and systems]. Moscow, Radio i svyaz' Publ., 1991. 608 p.
7. Isimaru A. *Rasprostranenie i rasseyanie voln v sluchayno-neodnorodnykh sredakh. T. 1* [Distribution and scattering of waves in randomly inhomogeneous media. Vol. 1]. Moscow, Mir Publ., 1981. 279 p.
8. Isimaru A. *Rasprostraneniye i rasseyaniye voln v sluchayno-neodnorodnykh sredakh. T. 2* [Distribution and scattering of waves in randomly inhomogeneous media. Vol. 2]. Moscow, Mir Publ., 1981. 317 p.
9. Tatarskiy V. I. *Rasprostraneniye voln v turbulentnoy atmosfere* [Distribution of waves in turbulent atmosphere]. Moscow, Nauka Publ., 1967. 548 p.
10. Livshits M. S. *Operatory, kolebaniya, volny. Otkrytyye sistemy* [Operators, oscillations, waves. Open systems]. Moscow, Nauka Publ., 1966. 298 p.
11. Brodskiy M. S. *Treugol'nye i zhordanovy predstavleniya lineynykh operatorov* [Triangular and Jordan representations of linear operators]. Moscow, Nauka Publ., 1969. 287 p.
12. Kuzhel' A. *Characteristic Functions and Models of Nonself-Adjoint Operators.* Dokdrecht, Boston, London : Kluwer Academic Publishers, 1996. 267 p.
13. Livshits M. S., Yantsevich A. A. Teoriya operatornykh uzlov v gil'bertovykh prostranstvakh [Operator node theory in Hilbert spaces]. Khar'kov, Izd-vo KHGU Publ., 1971. 160 p.
14. Zolotarev V. A. O treugol'nykh modelyakh sistem dvazhdy perestanovochnykh operatorov [On triangular models for system of twice commuting operator]. *DAN Arm. SSR* [Reports of the Academy of Science of Armenian SSR]. 1979, KhP, no. 3, pp. 136–140.

Надійшла (received) 26.10.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Черемська Надія Валентинівна (Черемская Надежда Валентиновна, Cheremskaya Nadezhda Valentinovna) **–** кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (050) 225-15-44; e-mail: cheremskaya66@gmail.com.

УДК 519.217

Н. А. ЧИКИНА, И. В. АНТОНОВА

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ МЕТОДОМ СКРЫТЫХ МАРКОВСКИХ МОДЕЛЕЙ

Рассмотрен нестандартный метод анализа и прогнозирования медико-социальных временных рядов – метод скрытых моделей Маркова (СММ). Приведены основные теоретические положения математического аппарата цепей Маркова и СММ, проанализированы ограничения применения метода прогнозирования на основе Марковской модели временного ряда, его преимущества и недостатки. Проверка на стационарность временных рядов проводилась с помощью расширенного теста Дики – Фуллера. Рассмотрена процедура построения скрытой Марковской модели ряда первых разностей и методика получения прогнозного значения. Построена 3×3 – модель СММ для первых разностей временного ряда. Скрытые состояния модели получены в результате процедуры кластерного анализа, построен алфавит для их идентификации.

Ключевые слова: прогнозирование, временной ряд, стохастические процессы, метод скрытых моделей Маркова, цепи Маркова, динамические байесовские сети.

Н. О. ЧІКІНА, І. В. АНТОНОВА

ПРОГНОЗУВАННЯ ЧАСОВИХ РЯДІВ МЕТОДОМ ПРИХОВАНИХ МОДЕЛЕЙ МАРКОВА

Розглянуто нестандартний метод аналізу і прогнозування медико-соціальних часових рядів – метод прихованих моделей Маркова (ПММ). Наведено основні теоретичні положення математичного апарату ланцюгів Маркова і ПММ, проаналізовані обмеження застосування методу прогнозування на основі Марківської моделі часового ряду, його переваги та недоліки. Перевірка на стаціонарність часових рядів проводилась за допомогою розширеного тесту Дікі – Фуллера. Розглянута процедура побудови прихованої Марківської моделі ряду перших різниць і методика отримання прогнозного значення. Побудована 3×3 – модель ПММ для перших різниць часового ряду. Приховані стани моделі отримані в результаті застосування кластерного аналізу, побудований алфавіт для їх ідентифікації.

Ключові слова: прогнозування, часовий ряд, стохастичні процеси, метод прихованих моделей Маркова, ланцюги Маркова, динамічні байєсовські мережі.

N. A. CHIKINA, I. V. ANTONOVA

TIME SERIES FORECASTING BY THE METHOD OF HIDDEN MARKOV MODELS

A non-standard method for analyzing and forecasting medical and social time series, namely the Hidden Markov Models method (HMM), is considered. The basic theoretical principles of mathematical apparatus of Markov chains and HMM are presented, the application limitations of forecasting method based on the Markov model of time series, its advantages and disadvantages are analyzed. The time series were tested for stationarity using the Augmented Dickey – Fuller test. The procedure of constructing the Hidden Markov Model for the time series of the first differences and the method for obtaining the predicted value are considered. A 3×3 – HMM model for the time series of the first differences is built. The hidden states of the model are obtained as a result of the Cluster Analysis procedure, an alphabet is constructed for their identification.

Key words: forecasting, time series, stochastic processes, the Hidden Markov Models method, Markov chains, dynamic Bayesian networks.