

УДК 539.3

А. В. ВОРОПАЙ**УПРАВЛЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ ПЛАСТИНЫ С ПРИСОЕДИНЁННОЙ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ МАССОЙ. АКТИВНАЯ ВИБРОЗАЩИТА**

Механическая система состоит из прямоугольной изотропной пластины средней толщины, шарнирно-опёртой по контуру, и присоединённой к ней сосредоточенной массы. На пластину воздействует нестационарное нагружение, вызывающее колебания. Влияние сосредоточенной массы моделируется дополнительной нестационарной сосредоточенной силой (реакцией), приложенной к пластине в точке контакта вместо массы. Управление колебаниями осуществляется с помощью введения дополнительной (управляющей) нагрузки, закон изменения во времени которой подлежит определению. Излагаются результаты решения обратной задачи идентификации управляющего воздействия. Исследования сводятся к анализу системы интегральных уравнений Вольтерра, которые решаются численно с использованием регуляризирующего алгоритма А. Н. Тихонова. Приведены примеры расчетов по определению управляющих воздействий в задачах активного управления нестационарными колебаниями пластины с дополнительной сосредоточенной массой, а также их гашения.

Ключевые слова: пластина средней толщины, сосредоточенная масса, нестационарное нагружение, управление нестационарными колебаниями, обратная задача, интегральные уравнения Вольтерра, регуляризирующий алгоритм А. Н. Тихонова.

О. В. ВОРОПАЙ**УПРАВЛІННЯ НЕСТАЦІОНАРНИМИ КОЛИВАННЯМИ ПЛАСТИНИ З ПРИЄДНАНОЮ ЗОСЕРЕДЖЕНОЮ МАСОЮ. АКТИВНИЙ ВІБРОЗАХИСТ**

Механічна система складається з прямокутної ізотропної пластини середньої товщини, шарнірно-обпертої по контуру, та приєднаної до неї зосередженої маси. На пластину діє нестационарне навантаження, яке збуджує коливання. Вплив зосередженої маси моделюється додатковою нестационарною зосередженою силою (реакцією), яка прикладена до пластини в місці контакту замість маси. Управління коливаннями здійснюється за допомогою додаткового (керуючого) навантаження, закон зміни у часі якого підлягає визначенню. Викладаються результати розв'язання оберненої задачі ідентифікації керуючого впливу. Дослідження зводяться до аналізу системи інтегральних рівнянь Вольтерра, які розв'язуються чисельно з використанням регуляризовуючого алгоритму А. М. Тихонова. Наведені приклади розрахунків визначення керуючих навантажень в задачах активного управління нестационарними коливаннями пластини з додатковою зосередженою масою, а також їх гасіння.

Ключові слова: пластина середньої товщини, зосереджена маса, нестационарне навантаження, управління нестационарними коливаннями, обернена задача, інтегральні рівняння Вольтерра, регуляризовуючий алгоритм А. М. Тихонова.

A. V. VOROPAY**CONTROLLING NONSTATIONARY VIBRATIONS OF A PLATE WITH ATTACHED CONCENTRATED MASS. ACTIVE VIBRATION PROTECTION**

The mechanical system consists of a rectangular isotropic plate of medium thickness, hinged on the contour, and attached to it concentrated mass. The plate is impacted by nonstationary loading, causing vibrations. The influence of the concentrated mass is simulated by additional nonstationary concentrated force (reaction) applied to the plate at contact point instead of the mass. The vibrations are controlled by inserting additional control force, which variation in time should be determined. The results of solving the controlling force identification inverse problems are presented. The research is reduced to an analysis of the Volterra integral equation system, which is solved numerically using Tikhonov regularizing algorithm. Computational examples of determining control action in problems of controlling nonstationary vibrations of a plate with additional concentrated mass and vibration suppression are given.

Key words: plate of medium thickness, concentrated mass, nonstationary loading, control of nonstationary vibration, inverse problem, Volterra integral equations, Tikhonov regularization algorithm.

Введение и анализ последних исследований. Активное управление колебаниями осуществляется с помощью введения в механическую систему дополнительных управляющих нагрузок. В этом случае задача управления сводится к идентификации этих неизвестных нагрузок, которые могут быть определены из решения соответствующих обратных нестационарных задач. А выбор конкретной *системы управления* и механизмов реализации найденных управляющих сил осуществляется уже на стадии практических или экспериментальных исследований. Зачастую *задачи управления* параметрами напряженно деформированного состояния или нестационарными колебаниями посвящены «гашению» колебаний. Одним из наиболее простых и распространенных методов гашения колебаний является использование амортизаторов. Применение амортизаторов или других видов гасителей может относиться как к системам *пассивной виброзащиты*, так и *активной*, в зависимости от того, имеются ли возможности управления этими устройствами.

Обратим внимание на некоторые работы, связанные с пластинчатыми элементами конструкций.

Укажем, что в работе [1] описан аналитический метод нахождения частот колебаний механической системы, состоящей из изотропной прямоугольной пластины, а также сосредоточенной массы, пружины и гасителя колебаний, присоединённых к пластине в некоторых точках. В этой работе для описания колебаний пластины также используются двойные ряды ортогональных функций.

В публикации [2] описано численное решение задачи о свободных колебаниях укрепленных панелей с произвольным набором граничных условий, а также несущих множественные сосредоточенные массы и присоединенные жесткости. Такие панели являются основными составляющими элементами кораблей и морских сооружений. Решение основано на методе предполагаемых мод, в качестве функций приближения используются характеристические ортогональные многочлены, обладающие свойствами *балочных функций Тимошенко* и удов-

© А. В. Воропай, 2019

летворяющие заданным краевым условиям. Для пластин применяется теория Миндлина, а для ребер жесткости – теория балок Тимошенко. Соотношения для собственных значений получаются с помощью уравнения движения Лагранжа. Разработан численный метод для анализа свободных колебаний неизолированных плит и жестких панелей, несущих сосредоточенные массы и локально поддерживаемых опорами или пружинами. В работе [3] описаны дальнейшие исследования авторов, в которых на основе предложенного ими метода рассматриваются также задачи о вынужденных колебаниях.

В инженерной практике массивная машина может быть размещена на плите, поддерживаемой балками, которые рассматриваются как упругие граничные условия. Вибрация плит из-за периодического возбуждения массивным оборудованием может вызывать повреждение зданий и являться источником шума. В работе [4] представлен аналитический подход к анализу вибраций прямоугольной пластины, несущей массивный станок с однородными упругими опорами. Машина моделируется распределенной массой. Поперечные перемещения точек пластины определяются как суперпозиция двойных косинус-рядов Фурье и нескольких дополнительных функций. Все неизвестные коэффициенты Фурье рассчитываются на основе метода Рэлея – Ритца. Для проверки предложенного подхода представлены несколько числовых примеров с классическими граничными условиями. Результаты показывают хорошее соответствие между аналитическими результатами и результатами, основанными на анализе методом конечных элементов (ANSYS). Исследовано влияние размера пластины, местоположения машины и жесткости опоры.

Отдельно выделена статья [5], в которой описано аналитико-численное решение для задачи нестационарного нагружения механической системы, состоящей из прямоугольной шарнирно-опертой пластины, и присоединенной к ней сосредоточенной массы с использованием интегральных уравнений Вольтерра. Укажем, что в настоящей работе используется аналогичный подход.

В работе [6] рассмотрена механическая система, состоящая из тонкой пластины и присоединенных к ней дискретных масс в виде накладок. Проанализировано влияние толщины и площади пятна контакта накладок на динамическое поглощение вибрации. Показано, что несколько дискретных масс лучше поглощают вибрации во всем частотном диапазоне 0 – 1000 Гц. Кроме того отмечается, что существует оптимальный вес дискретной массы для оптимального поглощения вибраций и оптимальная толщина накладок для данной области, а также оптимальная площадь для данной толщины, в этом случае накладки ведут себя оптимально как динамические поглотители вибраций.

В статье [7] рассматриваются вынужденные колебания тонкой пластины с «дискретным динамическим гасителем» с использованием метода конечных элементов.

Гашение колебаний можно рассматривать как частный случай управления колебаниями, когда целью управления является минимизация амплитуд перемещений/деформаций или их полное устранение. В теории автоматического управления (ТАУ) часто рассматриваются задачи подобного рода. Известны основные схемы автоматического управления/регулирования (САУ или САР): замкнутая САУ (управление с обратной связью) и разомкнутая САУ.

Замкнутые САУ обладают рядом преимуществ, которые подробно рассмотрены в ТАУ. Такие схемы активно используются в настоящее время и являются основой для создания современных систем управления реального времени. Однако, при управлении высокоскоростными процессами (например, нестационарными колебаниями) построение замкнутых САУ является серьезной задачей, требующей также наличия сложного и дорогостоящего оборудования при построении обратной связи.

В статьях [8, 9] для активного управления колебаниями гибких прямоугольных пластин используется разработанный авторами подход с использованием ТАУ. Управление осуществляется на основе динамического многоканального контроллера, использующего результаты моделирования колебаний пластины, выполненные с помощью метода конечных элементов.

В случае управления нестационарными колебаниями, вызываемыми импульсными (ударными) нагрузками, характер изменения, во времени которых является повторяемым и может быть отдельно изучен на основании решения задач идентификации, возможно построение более дешевых разомкнутых САУ.

Для решения подобных задач целесообразно использовать следующий подход – управление колебаниями осуществляется с помощью введения в механическую систему дополнительных управляющих нагрузок. Тогда задача управления сводится к идентификации этих неизвестных нагрузок, которые определяются из решения интегральных уравнений или их систем, к которым могут быть сведены обратные нестационарные задачи.

В работах [10, 11] детально описана возможность идентификации внешних нестационарных воздействий, вызывающих колебания прямоугольных пластин.

Выбор конкретной системы управления и механизмов реализации найденных управляющих сил осуществляется уже на стадии практических или экспериментальных исследований.

В работе [12] представлено решение задачи об управлении нестационарными колебаниями в некоторой точке пластины прямоугольной формы с помощью введения вспомогательной (управляющей) нагрузки.

В данной работе рассматривается возможность управления нестационарными колебаниями механических систем, в которых имеются прямоугольные пластины при импульсном поперечном нагружении. Искомое решение начально-краевой задачи комбинируется из решения, отвечающего воздействию на пластины заданной системы возмущающих нагрузок, и решения, которое соответствует воздействию на пластину дополнительной (управляющей) системы нагрузок. На финишном этапе построения решения используется сглаживающий функционал А. Н. Тихонова [13].

Постановка задачи. Механическая система состоит из прямоугольной упругой изотропной пластины средней толщины шарнирно-опертой по ее периметру и сосредоточенной массы, лежащей на ее верхней лицевой поверхности (рис. 1). Предполагается, что изменение перемещения во времени сосредоточенной массы полностью совпадает с изменением прогиба пластины в точке, где находится масса, то есть $w_M(t) = w(x_M, y_M, t)$.

На пластину в некоторой точке воздействует поперечная импульсная нагрузка $P(t)$, вызывающая нестационарные колебания пластины и массы. Требуется управлять нестационарными колебаниями в точке пластины $w_S(t) = w(x_S, y_S, t)$, так чтобы удовлетворить требуемому критерию (заранее сформулированному). В качестве критерия управления может быть выбрано уменьшение амплитуд прогиба, то есть изменение прогиба пластины в точке управления стремится к нулю $w_S(t) \rightarrow 0$ (гашение колебаний) или же колебания в точке управления должны отвечать некоторому требуемому закону изменения во времени $w_S(t) = w_C(t)$ (например, иметь вид синусоиды).

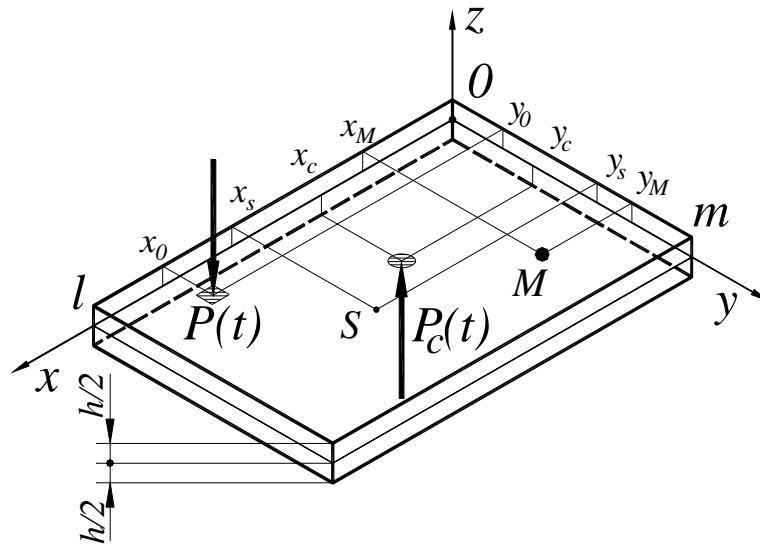


Рис. 1 – Рассматриваемая схема управления нестационарными колебаниями пластины и сосредоточенной массы.

Укажем, что задача решается в общей постановке, когда точки управления (x_S, y_S) и нахождения сосредоточенной массы (x_M, y_M) не совпадают, однако полученное решение будет справедливо и для частного случая, когда точка управления совпадает с точкой присоединения сосредоточенной массы $(x_M = x_S, y_M = y_S)$.

Управление осуществляется посредством приложения к пластине дополнительной (управляющей) нагрузки $P_C(t)$. Задача управления заключается в идентификации закона изменения во времени этой нагрузки $P_C(t)$. Таким образом, для определения закона изменения во времени управляющего воздействия требуется решить обратную нестационарную задачу для механической системы, состоящей из пластины и массы.

При решении задачи предполагалось, что координаты точек приложения нагрузок (возмущающей и управляющей) и координаты сосредоточенной массы произвольны (любые точки, принадлежащие пластине и не лежащие на ее границе). Также считалась известной величина сосредоточенной массы.

Решение задачи управления. В рамках теории пластин С. П. Тимошенко представим следующую систему дифференциальных уравнений, которая с учетом соответствующих начальных и граничных условий определяет решение, описывающее нестационарные деформационные процессы в пластине с учетом сосредоточенной массы M :

$$\left\{ \begin{array}{l} G'h(\nabla^2 w + \psi_{xy}) = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - P(x, y, t) + P_c(x, y, t) + R(x, y, t); \\ DV^2 \psi_{xy} - G'h(\psi_{xy} + \nabla^2 w) = \rho \cdot I \frac{\partial^2 \psi_{xy}}{\partial t^2}; \\ \frac{D}{2} [(1-\nu)\nabla^2 \varphi_{xy} + (1+\nu)\nabla_1^2 \psi_{xy}] - G'h(\varphi_{xy} + \nabla_1^2 w) = \rho \cdot I \frac{\partial^2 \varphi_{xy}}{\partial t^2}, \\ M \frac{d^2 w(x_M, y_M, t)}{dt^2} = R(x_M, y_M, t), \end{array} \right. \quad (1)$$

где h – толщина пластины; $G' = k'G$ – приведенный модуль сдвига; k' – коэффициент сдвига; $I = h^3/12$; ψ_x ,

ψ_y – углы поворота нормали; ρ , E , ν – упругие постоянные материала пластины; t – время;

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}; D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}; \psi_{xy} = \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y}; \phi_{xy} = \frac{\partial \psi_x}{\partial x} - \frac{\partial \psi_y}{\partial y}; \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Укажем, что:

$P(x, y, t)$ – возмущающая нагрузка (сосредоточенная или распределенная);

$P_c(x, y, t)$ – управляющее воздействие на пластину (сосредоточенная или распределенная нагрузка);

$R(x, y, t) = \delta(x - x_M) \cdot \delta(y - y_M) \cdot R(x_M, y_M, t)$ – реакция пластины на воздействие сосредоточенной массы M .

Описание решения подобных систем и итоговые соотношения приведены в [5].

Для нахождения перемещения сосредоточенной массы $w(x_M, y_M, t) = w_M(t)$, можно записать два интегральных соотношения, рассматривая по отдельности динамику точки пластины и сосредоточенной массы:

$$\begin{cases} w_M(t) = \int_0^t P(\tau) K_P(t-\tau) d\tau - \int_0^t P_c(\tau) K_{P_c}(t-\tau) d\tau - \int_0^t R(\tau) K_R(t-\tau) d\tau; \\ w(x_M, y_M, t) = w_M(t) = \int_0^t R(\tau) \frac{t-\tau}{M} d\tau. \end{cases} \quad (2)$$

После подстановки $w_M(t)$ из второго уравнения в первое система (2) может быть преобразована к следующему интегральному уравнению:

$$\int_0^t R(\tau) \left[K_R(t-\tau) + \frac{t-\tau}{M} \right] d\tau = \int_0^t P(\tau) K_P(t-\tau) d\tau - \int_0^t P_c(\tau) K_{P_c}(t-\tau) d\tau. \quad (3)$$

Интегральное уравнение (3) после дискретизации можно представить в матричном виде:

$$\mathbf{A}_{RM} \mathbf{R} = \mathbf{A}_{PM} \mathbf{P} - \mathbf{A}_{PcM} \mathbf{P}_c, \quad (4)$$

где вектор \mathbf{P} – соответствует известной функции $P(t)$; \mathbf{P}_c – $P_c(t)$; \mathbf{R} – неизвестный вектор, соответствующий $R(t)$; матрицы \mathbf{A}_{RM} , \mathbf{A}_{PM} и \mathbf{A}_{PcM} отвечают соответствующим ядрам уравнения (3).

Матричное уравнение (4) справедливо в случае, когда управляющее воздействие $P_c(t)$ известно. Однако при решении задач управления целью является определение управляющего воздействия. То есть в уравнение (4) входит две неизвестных функции $P_c(t)$ и $R(t)$. Для их определения необходимо в уравнении (4) перенести неизвестное слагаемое в левую часть уравнения и дополнить его выражением для критерия управления, в которое также войдут две искомые функции $P_c(t)$ и $R(t)$. Таким образом получается система двух интегральных уравнений Вольтерра, записанная для двух точек пластины – точке, в которой расположена присоединённая сосредоточенная масса $w_M(t) = w(x_M, y_M, t)$, и точке, в которой осуществляется управление согласно требуемого критерия $w_S(t) = w(x_S, y_S, t)$. В матричном виде систему можно записать:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_c \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{PM} \mathbf{P} \\ \mathbf{w}_C - \mathbf{A}_{PS} \mathbf{P} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

где матрицы, соответствующие ядрам, входящим в интегралы искомых функций, обозначены \mathbf{A}_{ij} , так что индекс $j=1$ отвечает $P_c(t)$; $j=2$ – $R(t)$; $i=1$ – точке (x_M, y_M) ; $i=2$ – (x_S, y_S) ; вектор \mathbf{w}_C – соответствует требуемому критерию управления $w_C(t)$. Причем для случая гашения колебаний можно принять $w_C(t) = -w_S(t)$, тогда $w_C(t) + w_S(t) = 0$.

В результате численно-аналитического решения (5) определяются искомые зависимости $R(t)$ и $P_c(t)$. Решение указанной системы уравнений в силу некорректности осуществляется с использованием *регуляризирующего алгоритма Тихонова* [13].

Существенное влияние на «качество» управления оказывает параметр регуляризации α , содержащийся в регуляризирующем алгоритме Тихонова. В задачах управления этот параметр определяется на основе минимизации по α *функционала качества*, соответствующего приближению полученных значений прогиба к требуемым значениям критерия:

$$M^\alpha [P_c] = \left\| w_C - A_p P + A_R R^\alpha + A_{Pc} P_c^\alpha \right\|. \quad (6)$$

Также при выборе параметра регуляризации α необходимо вводить и учитывать дополнительные ограничения для управляющих воздействий (ограничения по амплитуде, времени или мощности).

Примеры численных расчетов. При расчетах срединная плоскость пластины была связана с плоскостью

xOy декартовой системы координат. Считалось, что возмущающая нагрузка равномерно распределена по прямоугольной области со сторонами Δx и Δy соответственно и центром (x_0, y_0) , а управляющая нагрузка равномерно распределена по кругу радиуса r с центром (x_C, y_C) . При вычислениях принимались следующие значения:

- модуль упругости $E = 2.07 \cdot 10^{11}$ Па; коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$; плотность $\rho = 7890$ кг/м³;
- толщина пластины $h = 0.4$ м; длина $l = 0.6$ м; ширина $m = 0.4$ м;
- число членов в соответствующих двойных рядах Фурье 50×50 .

На рис. 2 приведена схема расположения точек при управлении колебаниями. Предполагается, что необходимо обеспечить требуемый закон изменения перемещения в точке пластины $w_C(t)$ в виде синусоиды. Координаты точек:

- $x_0 = 0.4$ м, $y_0 = 0.1$ м – приложения возмущающей нагрузки;
- $x_C = 0.2$ м, $y_C = 0.15$ м – приложения управляющей нагрузки;
- $x_S = 0.3$ м, $y_S = 0.2$ м – в которой осуществляется управление;
- $x_M = 0.15$ м, $y_M = 0.3$ м – присоединения сосредоточенной массы.

На рис. 3 показаны графики изменения функционалов «качества» (6) – кривая 1 и «суммарной нагрузки» – кривая 2 в зависимости от параметра регуляризации α . Укажем, что значение параметра регуляризации для удобства отложено на логарифмической шкале.

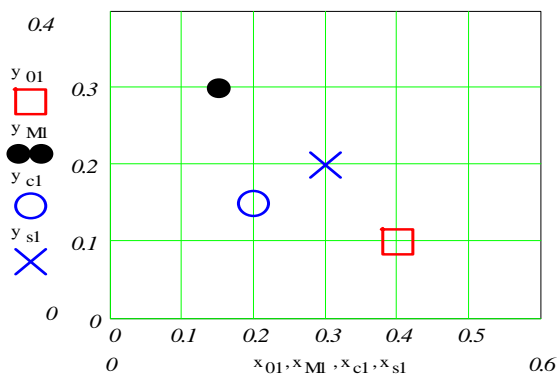


Рис. 1 – Схема нагружения пластины с массой.

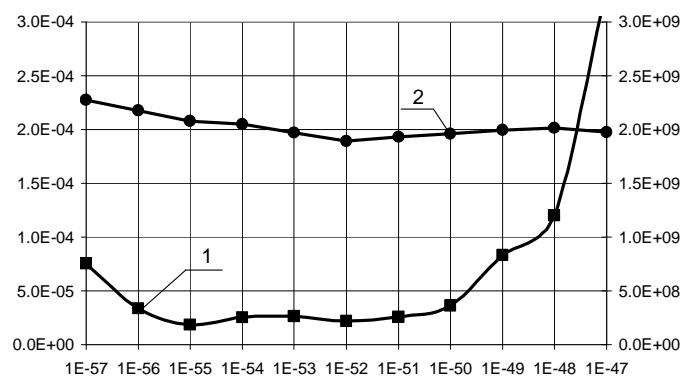


Рис. 2 – К выбору параметра регуляризации.

Из рис. 3 видно, что параметр регуляризации желательно брать меньше $\alpha = 10^{-49}$, а наилучшее «качество» достигается при $\alpha = 10^{-55}$. Однако, можно выделить ещё локальный минимум функционала (6) при $\alpha = 10^{-52}$, который соответствует минимуму функционала суммарной нагрузки и соответствует меньшим значениям управляющего воздействия $P_c(t)$.

При практической реализации активного управления колебаниями целесообразно при выборе параметра регуляризации учитывать не только функционал качества, но и минимизировать «суммарное воздействие», то есть необходимо выбирать компромиссное решение.

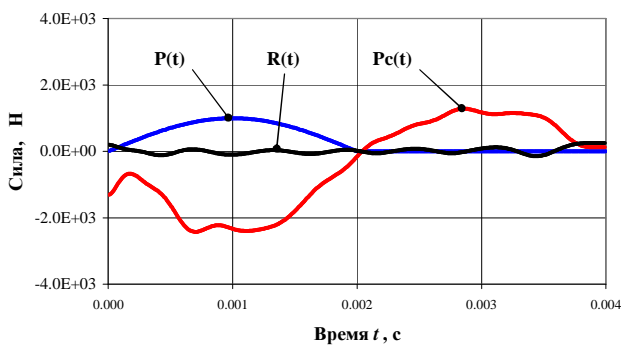


Рис. 4 – Определение реакции сосредоточенной массы и управляющего воздействия при $\alpha = 10^{-52}$.

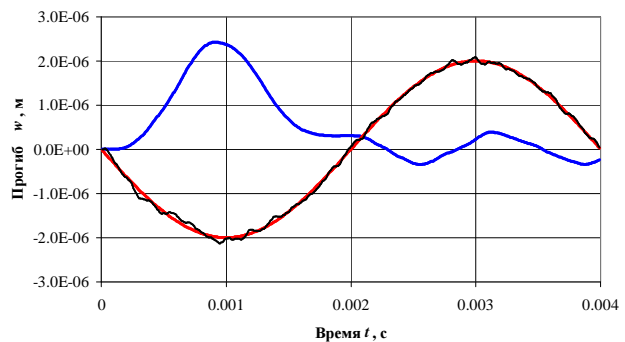


Рис. 5 – Результаты управления при $\alpha = 10^{-52}$.

На рис. 4 показаны изменения нагрузок $P(t)$, $P_c(t)$, $R(t)$:

– возмущающая нагрузка $P(t)$ изменяется в виде полуволны синусоиды с длительностью импульса $2 \cdot 10^{-3}$ секунды;

– определенные в результате решения СИУ (5) значения управляющего воздействия $P_c(t)$ (имеет амплитуды, превышающие возмущающее воздействие) и реакции массы $R(t)$ (величина значительно меньше, чем эквивалентные силы $P(t)$ и $P_c(t)$, измеряемые в ньютонах).

Укажем, что для удобства анализа результатов величины возмущающей и управляющей нагрузок, а также реакции сосредоточенной массы, приведены в виде эквивалентных сил, измеряемых в ньютонах (равномерно распределенные нагрузки, измеряемые в паскалях, были умножены на соответствующие площади контакта, которые предполагались неизменными).

На рис. 5 показаны три кривые изменения перемещения в точке управления:

– требуемое перемещение в точке управления – целевая функция для управления (синусоидальное изменение);

– перемещение в точке управления при воздействии только возмущающей нагрузки;

– результат управления при воздействии возмущающей нагрузки и управляющего воздействия (тонкая кривая – практически совпадает с требуемой кривой, но имеет незначительные отклонения).

Далее представлены результаты расчетов аналогичной задачи, за исключением того, что критерием является гашение колебаний.

Описание рис. 6, рис. 7 и рис. 8 аналогично описанию рис. 3, рис. 4 и рис. 5, соответственно.

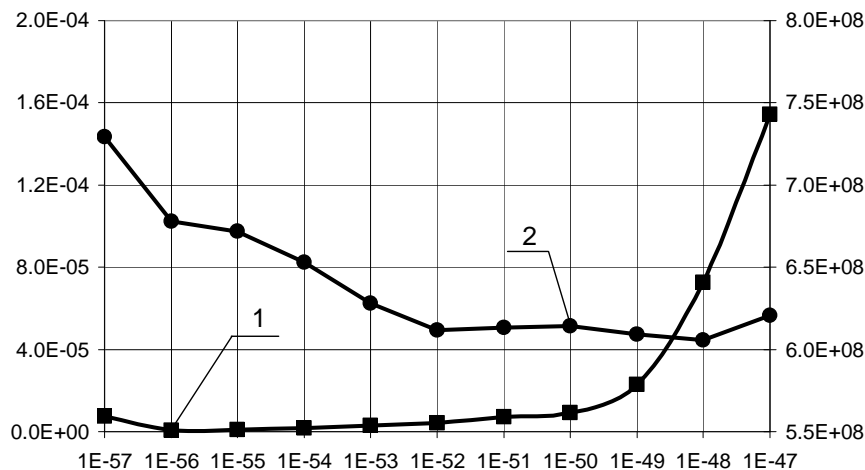


Рис. 6 – К выбору параметра регуляризации.

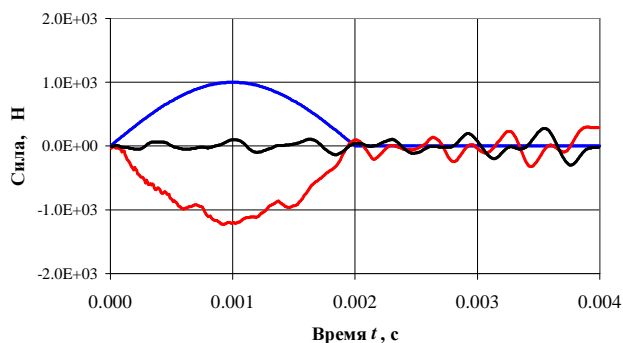


Рис. 7 – Реакции сосредоточенной массы и управляющего воздействия при $\alpha = 10^{-56}$.

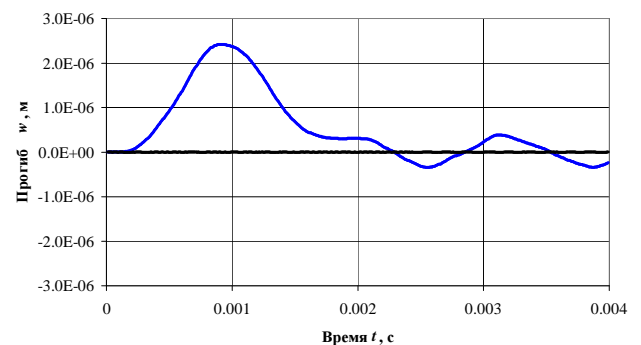


Рис. 8 – Результаты управления при $\alpha = 10^{-56}$.

Выводы. Показана возможность управления нестационарными колебаниями механической системы, состоящей из сосредоточенной массы, лежащей на прямоугольной шарнирно опёртой пластине, с помощью дополнительной (управляющей) нагрузки. На основе представленных результатов можно сделать вывод о том, что предложенная схема управления и алгоритм определения управляющего воздействия при решении обратной задачи для механической системы являются эффективными и достаточно устойчивыми.

Список литературы

1. Das Y. C., Navaratna D. R. Vibrations of a Rectangular Plate With Concentrated Mass, Spring, and Dashpot. // *J. Appl. Mech.* – 1963. – Vol. 30 (1). – P. 31 – 36. doi:10.1115/1.3630102.
2. Dae Seung Cho, Byung Hee Kim, Jin-Hyeong Kim, Tae Muk Choi, Nikola Vladimird. Free vibration analysis of stiffened panels with lumped mass and stiffness attachments // *Ocean Engineering.* – 2016. – Vol. 124. – P. 84 – 93.
3. Dae Seung Cho, Jin-Hyeong Kim, Tae Muk Choi, Byung Hee Kim, Nikola Vladimird. Free and forced vibration analysis of arbitrarily supported rectangular plate systems with attachments and openings // *Engineering Structures.* – 2018. – Vol. 171. – P. 1036 – 1046. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2017.12.032>.
4. Lingzhi Wang, Zhitao Yan, Zhengliang Li, Zhimiao Yan. Vibration of a Rectangular Plate Carrying a Massive Machine with Elastic Supports // *International Journal of Structural Stability and Dynamics.* – 2016. – Vol. 16. – P. 1550069. – Issue 10. <https://doi.org/10.1142/S0219455415500698>.
5. Воронай А. В. Нестационарные колебания пластины с присоединенной сосредоточенной массой // Вестник национального технического университета «ХПИ». Динамика и прочность машин. – Харьков : НТУ «ХПИ», 2008. – №47. – С. 42 – 48.
6. Vinayak Ranjan, Ghosh M. K. Forced vibration response of thin plate with attached discrete dynamic absorbers // *Thin-Walled Structures.* – 2005. – Vol. 43. – Issue 10. – P. 1513 – 1533. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2005.07.001>.
7. Ranjan V., Ghosh M. K. Forced vibration response of thin plate with attached discrete dynamic absorbers // *Journal of Thin-Walled Structures.* 2005. – Vol. 43. – P. 1513 – 1533.
8. Yang Jingyu, Chen Guoping. Computed Force-Based Sliding Mode Control for Vibration of Flexible Rectangular Plate // *Journal of Computational and Theoretical Nanoscience.* – 2012. – Vol. 6. – Number 1. – P. 385 – 390. <https://doi.org/10.1166/asl.2012.2207>.
9. Yang Jingyu, Chen Guoping. Robust Nominal Model-Based Sliding Mode Robust Control for Vibration of Flexible Rectangular Plate // *Applied Mathematics & Information Sciences.* – 2013. – Vol. 7(2L). – P. 671 – 678. <http://dx.doi.org/10.12785/amis/072L42>.
10. Yanyutin E. G., Voropaj (Voropay) A. V. Identification of the impulsive load on an elastic rectangular plate // *International Applied Mechanics.* – 2003. – Vol. 39(10). – P. 1199 – 1204.
11. Voropai (Voropay) A. V., Yanyutin E. G. Identification of several impulsive loads on a plate // *International Applied Mechanics.* – 2007. – Vol. 43(7). – P. 780 – 785.
12. Yanyutin E. G., Voropay A. V. Controlling nonstationary vibrations of a plate by means of additional loads // *Int. J. Solids and Struct.* – 2004. – Vol. 41. – P. 4919 – 4926.
13. Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. – М. : Наука. // Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 200 с.

References (transliterated)

1. Das Y. C., Navaratna D. R. Vibrations of a Rectangular Plate With Concentrated Mass, Spring, and Dashpot. *J. Appl. Mech.* 1963, vol. 30 (1), pp. 31–36. doi:10.1115/1.3630102.
2. Dae Seung Cho, Byung Hee Kim, Jin-Hyeong Kim, Tae Muk Choi, Nikola Vladimird. Free vibration analysis of stiffened panels with lumped mass and stiffness attachments. *Ocean Engineering.* 2016, vol. 124, pp. 84–93.
3. Dae Seung Cho, Jin-Hyeong Kim, Tae Muk Choi, Byung Hee Kim, Nikola Vladimird. Free and forced vibration analysis of arbitrarily supported rectangular plate systems with attachments and openings. *Engineering Structures.* 2018, vol. 171, pp. 1036–1046. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2017.12.032>.
4. Lingzhi Wang, Zhitao Yan, Zhengliang Li, Zhimiao Yan. Vibration of a Rectangular Plate Carrying a Massive Machine with Elastic Supports. *International Journal of Structural Stability and Dynamics.* 2016, vol. 16, issue 10, 1550069. <https://doi.org/10.1142/S0219455415500698>.
5. Voropay A. V. Nestsionarnye kolebaniya plastiny s prisoedinennoy sosredotochennoy massoy [Non-stationary vibrations of a plate with attached concentrated mass]. *Vestnik natsional'nogo tekhnicheskogo universiteta "KhPI". Dinamika i prochnost' mashin* [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Dynamics and strength of machines]. Kharkov, NTU "KhPI" Publ., 2008, no. 47, pp. 42–48.
6. Vinayak Ranjan, Ghosh M. K. Forced vibration response of thin plate with attached discrete dynamic absorbers. *Thin-Walled Structures.* 2005, vol. 43, issue 10, p. 1513–1533. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2005.07.001>.
7. Yang Jingyu, Chen Guoping. Computed Force-Based Sliding Mode Control for Vibration of Flexible Rectangular Plate. *Journal of Computational and Theoretical Nanoscience.* 2012, vol. 6, no. 1, pp. 385–390. <https://doi.org/10.1166/asl.2012.2207>.
8. Yang Jingyu, Chen Guoping. Robust Nominal Model-Based Sliding Mode Robust Control for Vibration of Flexible Rectangular Plate. *Applied Mathematics & Information Sciences.* 2013, vol. 7(2L), pp. 671–678. <http://dx.doi.org/10.12785/amis/072L42>.
9. Yanyutin E. G., Voropaj (Voropay) A. V. Identification of the impulsive load on an elastic rectangular plate. *International Applied Mechanics.* 2003, vol. 39(10), pp. 1199–1204.
10. Yanyutin E. G., Voropaj (Voropay) A. V. Identification of the impulsive load on an elastic rectangular plate. *International Applied Mechanics.* 2003, vol. 39(10), pp. 1199–1204.
11. Voropai (Voropay) A. V., Yanyutin E. G. Identification of several impulsive loads on a plate. *International Applied Mechanics.* 2007, vol. 43(7), pp. 780–785.
12. Yanyutin E. G., Voropay A. V. Controlling nonstationary vibrations of a plate by means of additional loads. *Int. J. Solids and Struct.* 2004, vol. 41, pp. 4919–4926.
13. Tikhonov A. N., Goncharskiy A. V., Stepanov V. V., Yagola A. G. *Regulyarizuyushchie algoritmy i apriornaya informatsiya* [Regularization algorithms and a priori information]. Moscow, Nauka, Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury Publ., 1983. 200 p.

Поступила (received) 06.09.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Воронай Олексій Валерійович (Voropay Alexey Valerievich) – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (050) 524-92-52; e-mail: voropay.alexey@gmail.com.