

МОДЕЛЬ ДЛЯ ВІДТВОРЕННЯ СПЕКУЛЯРНОЇ СКЛАДОВОЇ КОЛЬОРУ ПРИ ФОРМУВАННІ ВИСОКОРЕАЛІСТИЧНИХ БІОМЕДИЧНИХ ЗОБРАЖЕНЬ

Запропоновані нові моделі відбивної здатності поверхні на основі дистрибутивних функцій, які забезпечують закон збереження енергії. Запропоновані функції відрізняються від базових введенням нормуючого множника. Використання запропонованих моделей забезпечить підвищення реалістичності та усунення артефактів при формуванні спекулярної складової кольору.

Ключові слова: : рендеринг, модель освітлення, дистрибутивна функція відбивної здатності поверхні, спекулярна складова кольору, реалістичні графічні зображення, біомедичні зображення.

S.O. ROMANYUK, S.V. PAVLOV, I.V. ABRAMCHUK
Vinnitsa National Technical University,

MODEL FOR RECREATION OF SPECULAR COLOR COMPONENT AT FORMING HIGHLY- REALISTIC BIOMEDICAL IMAGES

New model is proposed of surface reflectivity based on distribution functions that provide energy conservation. The proposed functions differ from the basic introduction normalizing factor. Using the proposed models will improve the feasibility and removal of artifacts in the formation specular color component.

Keywords: rendering, lighting model, distributive function of surface reflectivity, specular component of color, realistic graphics, biomedical image

Вступ

У сучасних умовах комп'ютерна графіка стрімко розвивається, оскільки забезпечує високий рівень інформативності, відтворює найвагоміші аспекти процесу або явища. Найбільшу реалістичність забезпечує тривимірна графіка, основана на роботі з просторовими моделями об'єктів, що обумовлює її широке використання в біомедицині.

Біомедичні зображення відображають біологічні об'єкти і їх процеси з метою викликати певний діагностичний, лікувальний або профілактичний ефект при застосуванні в медичній практиці. При формуванні реалістичних графічних біомедичних зображень, для яких передбачається подальше трансформування та обробка, важливо дотриматися фізичної сутності процесів, що відбуваються в реальному житті.

Аналіз літературних джерел та постановка задачі

За оптичні властивості поверхні відповідає двопробенева дистрибутивна функція відбивної здатності ДФВЗ (BRDF –Bidirectional Reflectance Distributive Function) [1-11]. Вона є моделлю освітлення та визначає, яку частку випромінювання, що надійшло в точку з напрямку \vec{L} , буде відбито в напрямку \vec{V} (рис. 1, а). ДФВЗ є функцією кількох змінних

$$BRDF = f_{\lambda}(\alpha, \mu_1, \varphi, \mu_2, x) = f(\vec{L}, \vec{V}, \vec{N}),$$

де λ – довжина хвилі, (α, μ_1) , (φ, μ_2) - параметри, що визначають відповідно напрямок падаючого світла і напрямок спостереження.

Інтенсивність випромінювання I [10] в заданому напрямку визначається як величина променевого потоку через ділянку ds_{\perp} (рис. 1,б), перпендикулярну променю, в межах диференціального тілесного кута $d\omega$, який дорівнює площі нескінченно малого елемента на поверхні одиничної сфери.

$$I = \frac{d\Phi}{ds_{\perp} d\omega} = \frac{d\Phi}{ds \cos \alpha d\omega}.$$

ДФВЗ може бути розрахована за формулою [59, 248]

$$BRDF = dI(\vec{V}_i) / I(L_i) \cos \alpha_i d\omega_i.$$

У комп'ютерній графіці найчастіше використовують модель визначення спекулярної складової кольору Фонга [1,2,6], що має вигляд

$$I_s = I \cdot \varpi(\varphi, \lambda) \cdot \cos^n \psi,$$

де $\varpi(\varphi, \lambda)$ - крива відбиття, що визначає відношення дзеркально відбитого світла до падаючого як функцію кута падіння φ і довжини хвилі λ , n – коефіцієнт спекулярності поверхні.

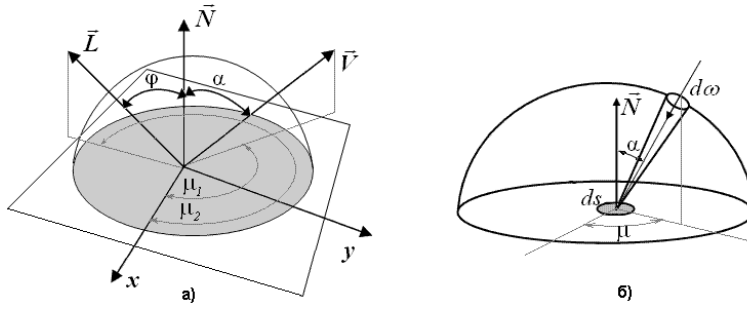


Рис. 1. Вихідні дані для розрахунку ДФВЗ

Функція $\varpi(\varphi, \lambda)$ складна, тому її у більшості випадків заміняють константою k_s , яку визначають експериментально або вибирають з естетичних міркувань.

У ДФВЗ Фонга [1] (рис. 2) $BRDF_F = \vec{V} \cdot \vec{R}$, де $\vec{R} = 2 \cdot (\vec{L} \cdot \vec{N}) \cdot \vec{N} - \vec{L}$. Вектор \vec{R} називають вектором дзеркального відбиття [2, 3]. У дистрибутивній функції Бліна [1, 7-9], яка історично з'явилася пізніше ДФВЗ Фонга, замість $\vec{V} \cdot \vec{R}$ використовують скалярний добуток (дорівнює косинусу кута) між векторами \vec{N} і \vec{H} : $BRDF_B = \vec{N} \cdot \vec{H}$, де $\vec{H} = (\vec{L} + \vec{V}) / |\vec{L} + \vec{V}|$.

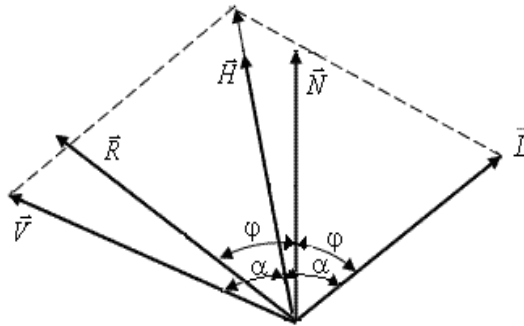


Рис. 2. Вектори нормалей до точки поверхні

Об'єднуючи модель освітлення Фонга з моделлю Ламберта отримуємо модель освітлення, яка враховує всі три складові кольору. Така модель освітлення отримала назву моделі освітлення Фонга з ламбертовим дифузним відбиттям [2, 3]. Згідно з цією моделлю інтенсивність кольору в заданій точці поверхні розраховується за формулою

$$I = I_a \cdot k_a + I(k_d(\vec{N} \cdot \vec{L}) + k_s \cdot (\vec{R} \cdot \vec{V})^n).$$

У сучасних засобах тривимірної графіки широкого поширення отримала дистрибутивна функція Шліка [1, 2], яка має такий вигляд: $\cos \theta / (n - n \cos \theta + \cos \theta)$, де θ - кут між векторами \vec{N} і \vec{H} . Ця ДФВЗ має значно меншу обчислювальну складність порівняно з функціями Фонга та Бліна. На жаль, наявність операції ділення значно ускладнює апаратну реалізацію функції.

У роботі [4] запропоновано апроксимувати ДФВЗ Фонга та Бліна $\cos^n \theta$, $\theta \in [0; \pi/2]$ функцією $\left(\frac{n}{16}(\cos \theta - 1) + 1\right)^{16}$. Така функція при $n = 16..1024$ добре наближає (рис. 3) оригінальну функцію $\cos^n \theta$ на деякому проміжку $\theta \in [0; \theta_{cr}(n)] \subset [0; \pi/2]$, де $\theta_{cr}(n)$ — нуль відповідної функції, проте за межами цього проміжку швидко зростає. Тому при $n = 16..1024$ необхідно розглядати модифіковану функцію

$$cs_16(\theta, n) = \begin{cases} \left(\frac{n}{16}(\cos \theta - 1) + 1\right)^{16}, & \theta \in [0; \theta_{cr}(n)], \\ 0, & \theta \in (\theta_{cr}(n); \pi/2]; \end{cases} \quad (1)$$

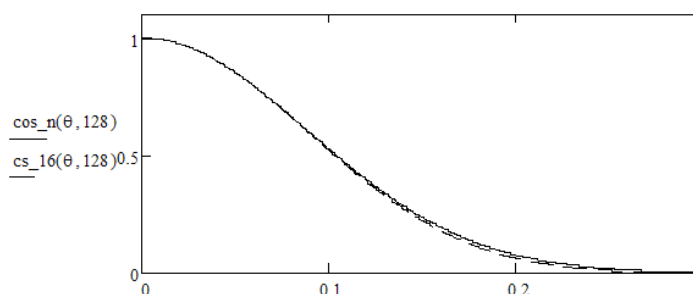


Рис. 1. Графіки функцій: $\cos^n \theta$ і $cs_{16}(\theta, n)$ при $n = 128$.

Точне значення $\theta_{cr}(n) = \arccos((n-16)/n)$ апроксимуємо більш простим: $\theta_{cr}(n) = 6/\sqrt{n}$. При $n = 16..1024$ ця апроксимація викликає незначні збурення похибки $\Delta(\theta, n) = \cos^n \theta - cs_{16}(\theta, n)$, які є меншими по порядку ніж сама похибка, обчислена при точному значенні $\theta_{cr}(n)$.

Так, для функції (1) $\max_{n=16..1024} (\Delta(\theta, n)) = 1.7 \cdot 10^{-2}$, $\min_{n=16..1024} (\Delta(\theta, n)) = -9.7 \cdot 10^{-3}$. Графік похибки $\Delta(\theta, n)$ наведено на рис. 4.

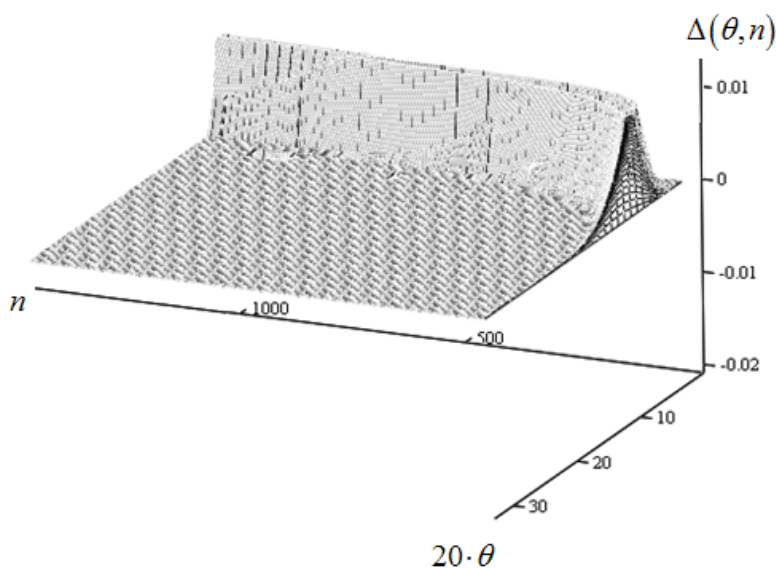


Рис. 2. Графік зміни похибки $\Delta(\theta, n)$ ($n = 16..1024$, $20 \cdot \theta \in [0; 30]$)

Основний недолік останньої ДФВЗ полягає в тому, що вона при формуванні зображень, як і класичні моделі відбивної здатності поверхні, не забезпечує дотримання закону збереження енергії [4-11], що може призвести до небажаних наслідків в медичній практиці.

Мета статті – розробка енергетично-коректних дистрибутивних функцій на основі функції

$$\left(\frac{n}{16} (\cos \theta - 1) + 1 \right)^{16}.$$

Розробка енергетично-коректних моделей відбивної здатності поверхонь

Для того, щоб ДФВЗ була енергетично коректною (відповідала закону збереження енергії), величина напівсферичної інтегральної відбивальної здатності поверхні повинна задовольняти умові [5-8]:

$$\int_{\Omega} f_r(\omega, \omega_r) \cdot \cos \theta \cdot d\omega \leq 1.$$

Відповідності до закону збереження енергії, будемо шукати нормуючі коефіцієнти $coef$ для функції ДФВЗ виду (1) з умови максимізації енергії віддзеркаленого світла.

При розробці енергетично-коректних ДФВЗ будемо використовувати найбільш поширені [6] моделі відбивної здатності поверхонь.

Введемо позначення. Нехай L, R, N, H — одиничні вектори: L — вектор падаючого світла, R — вектор дзеркального відбиття, N — вектор нормалі, $\vec{H} = (\vec{L} + \vec{V}) / |\vec{L} + \vec{V}|$, $\cos \theta/2 = N \cdot H = \cos \alpha$.

При переході до сферичних координат отримаємо $d\omega = \sin \theta \cdot d\varphi \cdot d\theta$.

Для моделі Фонга енергетична коректність ДФВЗ вимагає виконання умови [6]:

$$\text{coef}(n) \cdot \int_{\Omega} (R \cdot V)^n \cdot d\omega = 1.$$

Замінімо у останньому інтегралі дистрибутивну функцію $(R \cdot V)^n = \cos^n \theta$ апроксимаційною функцією $cs_16(\theta, n)$ (1). Перейшовши до сферичних координат, запишемо

$$\text{coef}(n) \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} cs_16(\theta, n) \cdot \sin \theta \cdot d\theta d\varphi = 1.$$

Враховавши, що функція (1) відмінна від нуля лише при $\theta \in [0; \theta_cr(n)] \subset [0; \pi/2]$, $\theta_cr(n) = 6/\sqrt{n}$, отримаємо:

$$\begin{aligned} & \text{coef}(n) \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_cr(n)} \left(\frac{n}{16} (\cos \theta - 1) + 1 \right)^{16} \cdot \sin \theta \cdot d\theta d\varphi = \\ & = \text{coef}(n) \cdot 2\pi \int_0^{\theta_cr(n)} \left(\frac{n}{16} (\cos \theta - 1) + 1 \right)^{16} \sin \theta \cdot d\theta = \text{coef}(n) \cdot 2\pi \cdot \text{Int}(n). \end{aligned}$$

Отже, рівняння для визначення нормуючого коефіцієнта має такий вигляд

$$\text{coef}(n) \cdot 2\pi \cdot \text{Int}(n) = 1. \quad (2)$$

Множник $\text{Int}(n) = \int_0^{\theta_cr(n)} \left(\frac{n}{16} (\cos \theta - 1) + 1 \right)^{16} \sin \theta \cdot d\theta$ нелінійно залежить від n . Для визначення $\text{coef}(n)$, обчислимо $\text{Int}(n)$ при $n = 16..1024$ (чисельно) і знайдемо за методом найменших квадратів такий $\text{coef}(n)$, що добре наближає рівняння (3) і легко обчислюється. В результаті оптимізації отримано $\text{coef}(n) = 1.063n / (2\pi)$. Графік зміни похибки $res(n) = |2\pi \cdot \text{coef}(n) \cdot \text{Int}(n) - 1|$,

$\max_{n=16..1024} res(n) = 4.7 \cdot 10^{-4}$ зображено на рис. 3.

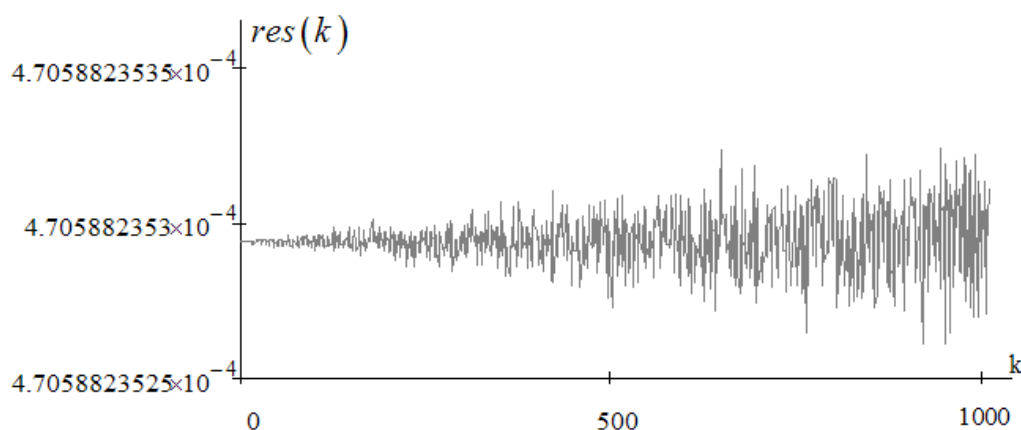


Рис. 3. Графік зміни похибки $res(k) = |2\pi \cdot \text{coef}(k) \cdot \text{Int}(k) - 1|$, $k = 16..1024$

Для модифікованої моделі Фонга [8] енергетична коректність ДФВЗ вимагає виконання умови [5]:

$$\text{coef}(n) \cdot \int_{\Omega} (R \cdot V)^n (N \cdot L) \cdot d\omega = 1.$$

Замінивши у останньому інтегралі ДФВЗ $(R \cdot V)^n = \cos^n \theta$ модельною ДФВЗ (1), і враховуючи, що $(N \cdot L) = \cos \theta$, перейдемо до сферичних координат

$$coef(n) \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} cs_{16}(\theta, n) \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta \cdot d\theta d\varphi = 1,$$

Оскільки функція (1) відмінна від нуля лише при $\theta \in [0; \theta_{cr}(n)] \subset [0; \pi/2]$, $\theta_{cr}(n) = 6/\sqrt{n}$, то:

$$\begin{aligned} &coef(n) \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_{cr}(n)} \left(\frac{n}{16} (\cos \theta - 1) + 1 \right)^{16} \cos \theta \cdot \sin \theta \cdot d\theta d\varphi = \\ &= coef(n) \cdot 2\pi \int_0^{\theta_{cr}(n)} \left(\frac{n}{16} (\cos \theta - 1) + 1 \right)^{16} \cos \theta \cdot \sin \theta \cdot d\theta = 2\pi \cdot coef(n) \cdot Int(n). \end{aligned}$$

Рівнянням для визначення нормуючого коефіцієнта є рівняння (2). За методикою, розглянутою раніше, знаходимо $coef(n) = (1.063n + 1)/(2\pi)$, $n = 16..1024$. Похибка

$$res(n) = |2\pi \cdot coef(n) \cdot Int(n) - 1|, \quad \max_{n=16..1024} res(n) = 1.3 \cdot 10^{-3}.$$

Енергетична коректність для модель Блінна-Фонга [6] вимагає виконання умови [6]:

$$coef(n) \cdot \int_{\Omega} (N \cdot H)^n \cdot d\omega = 1.$$

Замінимо $(N \cdot H)^n = \cos^n(\theta/2)$ модельною ДФВЗ (1): $\left(\frac{n}{16} (\cos(\theta/2) - 1) + 1 \right)^{16}$ і перейдемо до сферичних координат

$$coef(n) \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} cs_{16}(\theta/2, n) \cdot \sin \theta \cdot d\theta d\varphi = 1.$$

Враховавши, що функція (1) відмінна від нуля лише при $\theta \in [0; \theta_{cr}(n)] \subset [0; \pi/2]$, $\theta_{cr}(n) = 6/\sqrt{n}$, отримаємо:

$$\begin{aligned} &coef(n) \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_{cr}(n)} \left(\frac{n}{16} (\cos \theta/2 - 1) + 1 \right)^{16} \sin \theta \cdot d\theta d\varphi = \\ &= coef(n) \cdot 2\pi \int_0^{\theta_{cr}(n)} \left(\frac{n}{16} (\cos \theta/2 - 1) + 1 \right)^{16} \sin \theta \cdot d\theta = 2\pi \cdot coef(n) \cdot Int(n). \end{aligned}$$

Рівнянням для визначення нормуючого коефіцієнта є рівняння (2). За методикою, розглянутою раніше, знаходимо $coef(n) = (1.068n + 0.96)/(8\pi)$, $n = 16..1024$. Похибка

$$res(n) = |2\pi \cdot coef(n) \cdot Int(n) - 1|, \quad \max_{n=16..1024} res(n) = 1.5 \cdot 10^{-3}.$$

Модель Блінна-Фонга модифікована. Енергетична коректність ДФВЗ вимагає виконання умови [9]:

$$coef(n) \cdot \int_{\Omega} (N \cdot H)^n (N \cdot L) \cdot d\omega = 1.$$

Замінимо у останньому інтегралі $(N \cdot H)^n = \cos^n(\theta/2)$ модельною ДФВЗ (1): $\left(\frac{n}{16} (\cos(\theta/2) - 1) + 1 \right)^{16}$, $(N \cdot L) = \cos \theta$ і перейдемо до сферичних координат. Тоді

$$coef(n) \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} cs_{16}(\theta/2, n) \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta \cdot d\theta d\varphi = 1.$$

Враховавши, що функція (1) відмінна від нуля лише при $\theta \in [0; \theta_{cr}(n)] \subset [0; \pi/2]$, $\theta_{cr}(n) = 6/\sqrt{n}$, отримаємо:

$$\begin{aligned} &coef(n) \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta - cr(n)} \left(\frac{n}{16} (\cos \theta / 2 - 1) + 1 \right)^{16} \cos \theta \cdot \sin \theta \cdot d\theta d\varphi = \\ &= coef(n) \cdot 2\pi \int_0^{\theta - cr(n)} \left(\frac{n}{16} (\cos \theta / 2 - 1) + 1 \right)^{16} \cos \theta \cdot \sin \theta \cdot d\theta = 2\pi \cdot coef(n) \cdot Int(n). \end{aligned}$$

За методикою, розглянутою раніше, знаходимо $coef(n) = (1.027n + 4.8)/(8\pi)$, $n = 16..1024$.

$$\text{Похибка } res(n) = |2\pi \cdot coef(n) \cdot Int(n) - 1|, \quad \max_{n=16..1024} res(n) = 9.5 \cdot 10^{-3}.$$

Енергетична коректність модель Блінна-Фонга (NDF), вимагає виконання умови [4,5]:

$$coef(n) \cdot \int_{\Omega} (N \cdot H)^n \cdot d\omega = 1$$

Замінімо $(N \cdot H)^n = \cos^n \alpha$ ДФВЗ $\left(\frac{n}{16} (\cos \alpha - 1) + 1 \right)^{16}$ і перейдемо до сферичних координат: $d\omega = \sin \alpha \cdot d\varphi \cdot d\alpha$.

$$coef(n) \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta - cr(n)} \left(\frac{n}{16} (\cos \alpha - 1) + 1 \right)^{16} \cdot \sin \alpha \cdot d\alpha d\varphi = 1.$$

Ця задача цілком аналогічна задачі визначення нормуючого множника у моделі Фонга, тому $coef_1(n) = 1.063n/(2\pi)$, $n = 16..1024$.

Для моделі Блінна-Фонга (heightfield) енергетична коректність ДФВЗ вимагає виконання умови [11]:

$$coef(n) \cdot \int_{\Omega} \cos^n \alpha \cdot \cos \alpha \cdot d\omega = 1.$$

Ця умова нормалізації повторює модифіковану нормалізацію Фонга (RDF), а отже нормалізуючі множники ті ж самі $coef(n) = (1.063n + 1)/(2\pi)$, $n = 16..1024$.

Зведемо отримані нормуючі коефіцієнти у таблицю 1.

Таблиця 1

Вирази для нормалізуючих коефіцієнтів

Модель /підінтегральний вираз	Нормалізуючий коефіцієнт $coef(n)$	
	на основі ДФВЗ Фонга $\cos^n \theta$	на основі ДФВЗ (1)
Phong (RDF) $\cos^n \theta \cdot \sin \theta$	$\frac{n+1}{2\pi}$	$\frac{1.063n}{2\pi}$
Phong (modified) (RDF) $\cos^n \theta \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta$	$\frac{n+2}{2\pi}$	$\frac{1.063n+1}{2\pi}$
Blinn-Phong (RDF) $\cos^n \theta / 2 \cdot \sin \theta$	$\frac{n+2}{8\pi} < \frac{n+2}{4\pi(2-2^{-n/2})} < \frac{n+4}{8\pi}$	$\frac{1.068n+0.96}{8\pi}$
Blinn-Phong (modified) (RDF) $\cos^n \theta / 2 \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta$	$\frac{n+6}{8\pi} < \frac{(n+2)(n+4)}{4\pi(2^{-n/2}+n)} < \frac{n+8}{8\pi}$	$\frac{1.027n+4.8}{8\pi}$
Blinn-Phong (NDF) $\cos^n \alpha \cdot \sin \alpha$	$\frac{n+1}{2\pi}$	$\frac{1.063n}{2\pi}$
Blinn-Phong (heightfield) $\cos^n \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha$	$\frac{n+2}{2\pi}$	$\frac{1.063n+1}{2\pi}$

Висновки

Розроблено фізично-коректні дистрибутивні функції відбивної здатності поверхні, особливості яких

полягає у дотриманні закону збереження енергії при формуванні зображень. Запропоновані функції відрізняються від базових введенням нормуючого множника. Використання запропонованих моделей забезпечить підвищення реалістичності та усунення артефактів при формуванні спекулярної складової кольору, що надзвичайно важливо в медичній практиці, де необхідно дотриматися фізичної сутності процесів, що відбуваються в реальному житті.

Література

1. Романюк О. Н. Класифікація дистрибутивних функцій відбивної здатності поверхні / О. Н. Романюк // Наукові праці Донецького національного технічного університету. — Серія «Інформатика, кібернетика і обчислювальна техніка». — 2008. — Випуск 9 (132). — С. 145—151.
2. Романюк О. Н. Високопродуктивні методи та засоби зафарбовування тривимірних графічних об'єктів. Монографія. / О. Н. Романюк, А. В. Чорний. - Вінниця : УНІВЕСУМ-Вінниця, 2006. — 190 с
3. Херн Д., Бейкер М. Компьютерная графика и стандарт OpenGL / Д. Херн, М. Бейкер. — М. : Издательский дом "Вильямс", 2005. — 1168 с.
4. Romanyuk A.N. Effective Models for the Specular Color Constituent / A. N Romanyuk, Y. L. Lyashenko, A.V Melnik, A. P. Goncharuk // Computing Journal of Computer Science and Engineering. -2010. Vol. 2 Issue 2, - P. 25-29
5. Dimitar Lazarov, "Physically-based lighting in Call of Duty: Black Ops" SIGGRAPH 2011 <http://advances.realtimerendering.com/s2011/index.html>
6. The Blinn-Phong Normalization Zoo. <http://www.thetenthplanet.de/archives/255>
7. Christian Schüler, "An Efficient and Physically Plausible Real-Time Shading Model." ShaderX 7, Chapter 2.5, pp. 175—187.
8. Fabian Giesen, "Phong Normalization Factor derivation" <http://www.farbrausch.de/~fg/stuff/phong.pdf>
9. Yoshiharu Gotanda, "Practical Implementation of Physically-Based Shading Models at tri-Ace", SIGGRAPH 2010
10. Akiene-Möller, Haines and Hoffmann, "Real-Time Rendering" book <http://www.realtimerendering.com/>
11. Pharr, Humphreys, "Physically-Based Rendering" book. <http://www.pbrt.org/>

References

1. Romanyuk O. N. Klasifikatsiya distributivnih funktsiy vldivnoyi zdatnosti poverhni / O. N. Romanyuk // Naukovi pratsi Donetskogo natsionalnogo tehniчного univrsitetu. — Seriya «Informatika, kibernetika i obchislyvalna tehnika». — 2008. — Vipusk 9 (132). — S. 145—151.
2. Romanyuk O. N. Visokoproduktivni metodi ta zasobi zafarbovuvannya trivimirnih grafichnih ob'ektiv. Monografiya. / O. N. Romanyuk, A. V. Chorniy. - Vinnitsya : UNIVESUM-Vinnitsya, 2006. — 190 s
3. Hern D., Beyker M. Kompyuternaya grafika i standart OpenGL / D. Hern, M. Beyker. — M. : Izdatelskiy dom "Vilyams", 2005. — 1168 s.
4. Romanyuk A.N. Effective Models for the Specular Color Constituent / A. N Romanyuk, Y. L. Lyashenko, A.V Melnik, A. P. Goncharuk // Computing Journal of Computer Science and Engineering. -2010. Vol. 2 Issue 2, - P. 25-29
5. Dimitar Lazarov, "Physically-based lighting in Call of Duty: Black Ops" SIGGRAPH 2011 <http://advances.realtimerendering.com/s2011/index.html>
6. The Blinn-Phong Normalization Zoo <http://www.thetenthplanet.de/archives/255>
7. Christian Schüler, "An Efficient and Physically Plausible Real-Time Shading Model." ShaderX 7, Chapter 2.5, pp. 175-187.
8. Fabian Giesen, "Phong Normalization Factor derivation" <http://www.farbrausch.de/~fg/stuff/phong.pdf>
9. Yoshiharu Gotanda, "Practical Implementation of Physically-Based Shading Models at tri-Ace", SIGGRAPH 2010
10. Akiene-Möller, Haines and Hoffmann, "Real-Time Rendering" book. <http://www.realtimerendering.com/>
11. Pharr, Humphreys, "Physically-Based Rendering" book. <http://www.pbrt.org/>

Рецензія/Peer review : 18.9.2016 р.

Надрукована/Printed : 11.11.2016 р.

Стаття рецензована редакційною колегією