

Б. І. Мокін<sup>1</sup>  
 О. Б. Мокін<sup>1</sup>  
 О. М. Кривоніс<sup>1</sup>

## СИСТЕМНИЙ ПІДХІД ДО АНАЛІЗУ ПРОЦЕСІВ ПЕРЕМІЩЕННЯ ВАНТАЖІВ ПІДЙОМНИМ КРАНОМ

<sup>1</sup>Вінницький національний технічний університет

Обґрунтовано необхідність системного підходу до аналізу процесів переміщення вантажів підйомним краном, який враховував би і зміну характеристик цього процесу у часі, зумовлену змінами приведенного моменту інерції системи електропривода та моменту навантаження під час переміщення вантажу, і вплив поздовжніх коливань, які виникають у тросі, на який підвішується вантаж. Показано, що ігнорування цих особливостей процесу переміщення вантажів підйомним краном може призвести до руйнування як вантажів так і майданчиків, на яких ці вантажі встановлюються, внаслідок виникнення їх ударних зіткнень, зумовлених виникненням поздовжніх коливань у тросі, до якого підвішено вантаж. З використанням структури звичайного диференціального рівняння зі змінними в часі параметрами, яке зв'язує приводний момент тягового електродвигуна з моментом навантаження та приведеним моментом інерції системи електропривода, та структури диференціального рівняння в частинних похідних, яким описується процес виникнення поздовжніх коливань в тросі, зумовлених впливом маси вантажу та маси відрізка троса між барабаном його намотування та точкою підвісу вантажу, здійснено синтез системної математичної моделі процесу переміщення вантажу підйомним краном, яка враховує і зміну параметрів математичної моделі цього процесу у часі, зумовлену змінами приведенного моменту інерції системи електропривода та моменту навантаження, і вплив поздовжніх коливань, які виникають у тросі, на який підвішується вантаж. Запропоновано алгоритм практичної реалізації синтезованої системної математичної моделі процесу переміщення вантажу підйомним краном, який дозволяє здійснити покроково оцінку цього процесу в темпі його перебігу.

**Ключові слова:** підйомний кран, переміщення вантажу, змінний момент інерції, трос, поздовжні коливання, системний підхід, синтез, математична модель, алгоритм реалізації.

### Постановка задачі та вихідні передумови

Підйомні крани в їх баштовому, портовому, мостовому, козловому та автомобільному варіантах є одними з найрозповсюдженіших машин, за допомогою яких людина підсилює свої фізичні можливості у справі вертикального та горизонтального переміщення вантажів.

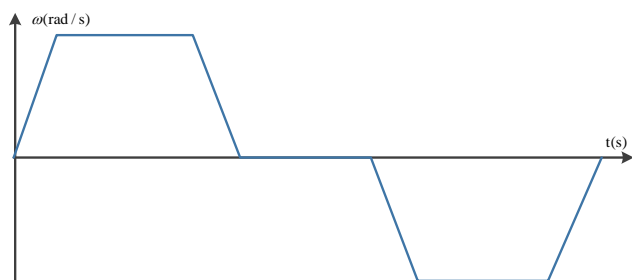


Рис. 1. Графік робочого циклу зміни швидкості обертання вала електродвигуна системи електропривода підйомного крана

У багатьох публікаціях, де досліджується функціонування підйомних кранів, наприклад [1]—[3], пропонується графіку зміни кутової швидкості обертання вала тягового електродвигуна  $\omega$  в часі  $t$  за повний робочий цикл піднімання і опускання вантажу задавати вигляд, показаний на рис. 1, оскільки лише у цьому випадку в тросі, на якому підвішено вантаж, не виникатимуть поздовжні коливання, завдяки яким при відриві вантажу від стартового майданчика чи в момент дотику вантажу до фінішного майданчика, вантаж і майданчик не зазнаватимуть ударного руйнування.

Але легко бачити, що такий графік зміни кутової швидкості обертання вала тягового електродвигуна може бути забезпеченим лише з використанням рівняння динаміки електропривода у вигляді

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_{ed} - M_w = \Delta M, \quad (1)$$

де  $M_{ed}$  — електромагнітний момент електродвигуна,  $M_w$  — момент навантаження, а  $J$  — приведений момент інерції махових мас системи електропривода, за умови, що

– на ділянках розгону і гальмування

$$\Delta M = \text{const}; \quad (2)$$

– на ділянці руху зі сталою кутовою швидкістю

$$\Delta M = 0, \quad (3)$$

– а також на усіх ділянках

$$J = \text{const}. \quad (4)$$

Оскільки, як показано в наших роботах [4], [5], при підніманні вантажу і намотуванні у зв'язку з цим троса на барабан та розмотуванні цього троса з барабана при опусканні вантажу момент інерції махових мас електропривода та момент навантаження стають функціями часу, то для оцінки процесів функціонування підйомного крану необхідно використовувати рівняння динаміки тягового електропривода не у вигляді (1), а у такому вигляді:

$$\frac{d(J\omega)}{dt} = J(t) \frac{d\omega}{dt} + \omega(t) \frac{dJ}{dt} = M_{ed} - M_w(t) = \Delta M(t). \quad (5)$$

І, як показано в роботі [4], за використання рівняння динаміки системи електроприводу у вигляді (5):

а) на ділянці розгону матимемо цю математичну модель у вигляді

$$\left( J_0 + c_1 t + \frac{c_2}{2} t^2 \right) \frac{d\omega}{dt} + (c_1 + c_2 t) \omega = M(t) - M_{g0} + \alpha_1 t + \frac{\alpha_2}{2} t^2 \quad (6)$$

при підйомі вантажу та у вигляді

$$\left( J_0 - c_1 t - \frac{c_2}{2} t^2 \right) \frac{d\omega}{dt} - (c_1 + c_2 t) \omega = M(t) - M_{g0} - \alpha_1 t - \frac{\alpha_2}{2} t^2 \quad (7)$$

при опусканні вантажу;

б) на ділянці руху зі сталою кутовою швидкістю цю математичну модель матимемо у вигляді

$$(c_1 + c_2(t - t_1)) \omega = M(t) - M_{g1} + \alpha_1(t - t_1) \quad (8)$$

при підйомі вантажу та у вигляді

$$-(c_1 + c_2(t - t_1)) \omega = M(t) - M_{g1} - \alpha_1(t - t_1) \quad (9)$$

при опусканні вантажу;

в) на ділянці гальмування цю математичну модель матимемо у вигляді

$$\left( J_0 + c_1(t - t_2) + \frac{c_2}{2}(t - t_2)^2 \right) \frac{d\omega}{dt} + (c_1 + c_2(t - t_2)) \omega = M(t) - M_{g2} + \alpha_1(t - t_2) + \frac{\alpha_2}{2}(t - t_2)^2 \quad (10)$$

при підйомі вантажу та у вигляді

$$\left( J_0 - c_1(t - t_2) - \frac{c_2}{2}(t - t_2)^2 \right) \frac{d\omega}{dt} - (c_1 + c_2(t - t_2)) \omega = M(t) - M_{g2} - \alpha_1(t - t_2) - \frac{\alpha_2}{2}(t - t_2)^2 \quad (11)$$

при опусканні вантажу.

З метою наочної демонстрації відмінності результатів використання моделей (1) та (5) на рис. 2 покажемо графік зміни кутової швидкості, отриманий за допомогою імітаційні моделі в ПП Simulink ППП Matlab з використанням асинхронного електродвигуна КМ АИР250М з паспортними характеристиками:  $P = 90$  кВт;  $U = 380$  В;  $I_N = 163,6$  А;  $M_N = 573$  Нм;  $J^* = 1,1$  кг·м<sup>2</sup>;

$n_c = 1500$  об/хв;  $\cos \varphi_H = 0,89$ ;  $\eta_H = 94$  %;  $s_H = 1,5$  %;  $s_K = 20$  %;  $\frac{M_{\max}}{M_N} = 2,5$ ;  $\frac{M_P}{M_N} = 1,25$ , який представлено у доповіді на Міжнародній науковій конференції, тези якої викладені у роботі [5].

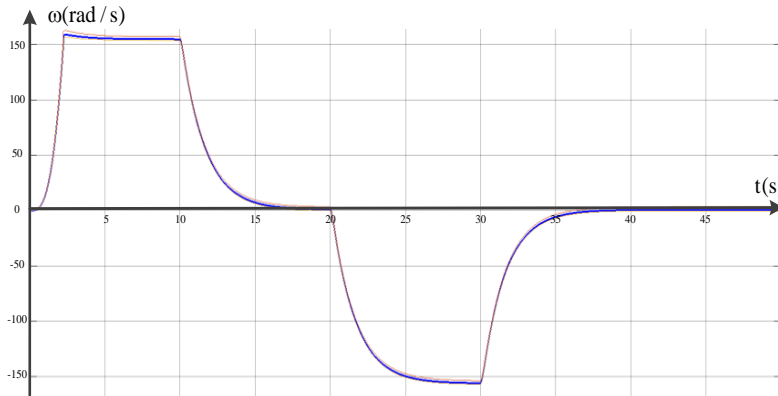


Рис. 2. Графік кутової швидкості обертання вала тягового асинхронного електродвигуна KM AIP250M системи електропривода підйомного крана, отриманий на основі імітації в ПП Simulink математичної моделі (5)

Але модель (5), яка синтезована на основі моделі (1) і є її розширенням, для якої в роботі [6] розроблено метод ідентифікації параметрів, теж не повно описує особливості функціонування такої складної динамічної системи, якою є підйомний кран, оскільки вона не враховує поздовжні коливання, що виникають в тросах, на яких підвішуються вантажі для їх переміщення вгору чи вниз. Тож для системного аналізу процесів функціонування підйомного крану при переміщенні вантажів і цю модель необхідно удосконалити шляхом такого її узагальнення, яке надавало б можливість оцінювати не лише залежність параметрів системи в часі, але створювало б можливість оцінювання і поздовжніх коливань, що виникають в тросах, для яких за відсутності зовнішньої сили справедливою є модель, наведена, наприклад, в роботі [7] і має вигляд

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} - nm \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (12)$$

або

$$\frac{\partial^2 F(x,t)}{\partial x^2} - nm \frac{\partial^2 F(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad (13)$$

де  $v(x,t)$ ,  $F(x,t)$  — відповідно, лінійна швидкість руху троса питомою масою  $m \left( \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right)$  і податливістю  $n \left( \frac{\text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{кг}} \right)$  та сила, яка має місце в його перерізі на відстані  $x$  від початку відліку просторової координати вздовж троса в момент часу  $t$ .

Створенню математичної моделі, яка увібрала б в себе властивості моделей (1), (5), (12), (13) і була спроможна реалізувати системний підхід до аналізу процесів переміщення вантажів підйомними кранами, і присвячена ця наша робота, викладення результатів, отриманих в якій, здійснено нижче.

### Розв'язання поставленої задачі

Коли вантаж опускається на майданчик його встановлення, то трос уже натягнутий і коливання у ньому уже затухли, тож найбільшу небезпеку для вантажів, що переміщуються вертикально, та майданчиків, на які ці вантажі встановлюються, створюють поздовжні коливання, що виникають в тросах, при підніманні вантажу і відриві його від майданчику встановлення. А тому в-подальшому розглядатимемо саме процес піднімання вантажу, граничні умови для якого, записані з використанням графіка, приведеного на рис. 1, очевидно матимуть вигляд

$$\begin{cases} \omega(0) = 0, \\ \omega(t_3) = 0 \end{cases} \quad (14)$$

або

$$\begin{cases} v(0) = 0, \\ v(t_3) = 0, \end{cases} \quad (15)$$

де 
$$v = \frac{R}{k_p} \omega; \quad (16)$$

$k_p$  — передатне число редуктора, через який вал тягового електродвигуна зв'язаний з валом барабана, на який намотується трос;  $R$  — радіус цього барабана.

Як показано у роботі [6], процес піднімання вантажу з нижньої точки до верхньої по висоті на відрізьку часу  $[0, t_1]$ , тобто, після пуску електропривода і аж до досягнення валом його електродвигуна усталеного значення  $\omega_y^*$  кутової швидкості, буде описуватись диференціальним рівнянням

$$\left( J_0 + c_1^* t + \frac{c_2^*}{2} t^2 \right) \frac{d\omega}{dt} = M_P (1 + k_1 \omega - k_2 \omega^2) - M_w(t_1) \quad (17)$$

з граничними умовами

$$\begin{cases} \omega(0) = 0, \\ \omega(t_1) = \omega_y^*, \end{cases} \quad (18)$$

на відрізьку часу  $[t_1, t_2]$  цей процес за умови забезпечення рівності

$$M_P (1 + k_1 \omega_y^* - k_2 (\omega_y^*)^2) - M_w(t_1) = 0 \quad (19)$$

буде описуватись рівнянням

$$(c_1 + c_2 (t - t_1)) \omega_y^* = \alpha_1 (t - t_1), \quad (20)$$

а на відрізьку часу  $[t_2, t_3]$  за умови протиключення електродвигуна процес піднімання вантажу описуватиметься диференціальним рівнянням

$$\left( J(t_2) + c_1^* (t - t_2) + \frac{c_2^*}{2} (t - t_2)^2 \right) \frac{d\omega}{dt} = -M_P (1 + k_1 \omega - k_2 \omega^2) - M_w(t_2) \quad (21)$$

з граничними умовами

$$\begin{cases} \omega(t_2) = \omega_y^*, \\ \omega(t_3) = 0. \end{cases} \quad (22)$$

У цьому випадку, як показано у тій же роботі [6], розв'язуючи диференціальне рівняння (17) з граничними умовами (18), отримаємо, що

$$\omega = \frac{(b_\omega^2 - \Delta_\omega) \left( e^{\sqrt{\frac{4\Delta_\omega}{\Delta_t}} \arctg \frac{2a_t \sqrt{\Delta_t} t}{\Delta_t + b_t^2 + 2a_t b_t} - 1} \right)}{2a_\omega \left( b_\omega \left( 1 - e^{\sqrt{\frac{4\Delta_\omega}{\Delta_t}} \arctg \frac{2a_t \sqrt{\Delta_t} t}{\Delta_t + b_t^2 + 2a_t b_t}} \right) + \sqrt{-\Delta_\omega} \left( 1 + e^{\sqrt{\frac{4\Delta_\omega}{\Delta_t}} \arctg \frac{2a_t \sqrt{\Delta_t} t}{\Delta_t + b_t^2 + 2a_t b_t}} \right) \right)}, \quad (23)$$

де 
$$\begin{cases} a_t = \frac{c_2^*}{2}, \\ b_t = -c_1^*, \\ c_t = J_0^*, \\ \Delta_t = 4a_t c_t - b_t^2 = 2c_2^* J_0^* - (c_1^*)^2; \end{cases} \quad (24)$$

$$\begin{cases} a_{\omega} = -M_P k_2, \\ b_{\omega} = M_P k_1, \\ c_{\omega} = M_P - M_w(t_1), \\ \Delta_{\omega} = 4a_{\omega}c_{\omega} - b_{\omega}^2 = -4M_P k_2 (M_P - M_w(t_1)) - (M_P k_1)^2; \end{cases} \quad (25)$$

$$\begin{cases} \Delta_t > 0, \\ \Delta_{\omega} < 0, \end{cases} \quad (26)$$

а розв'язуючи диференціальне рівняння (21) з граничними умовами (22), отримаємо, що

$$\omega = \omega_y^* - \frac{(b_{\omega}^2 - \Delta_{\omega}) \left( e^{\sqrt{\frac{4\Delta_{\omega}}{\Delta_t} \arctg \frac{2a_t \sqrt{\Delta_t} (t-t_2)}{\Delta_t + b_t^2 + 2a_t b_t (t-t_2)}} - 1} \right)}{2a_{\omega} \left( b_{\omega} \left( 1 - e^{\sqrt{\frac{4\Delta_{\omega}}{\Delta_t} \arctg \frac{2a_t \sqrt{\Delta_t} (t-t_2)}{\Delta_t + b_t^2 + 2a_t b_t (t-t_2)}}} \right) + \sqrt{-\Delta_{\omega}} \left( 1 + e^{\sqrt{\frac{4\Delta_{\omega}}{\Delta_t} \arctg \frac{2a_t \sqrt{\Delta_t} (t-t_2)}{\Delta_t + b_t^2 + 2a_t b_t (t-t_2)}}} \right) \right)}, \quad (27)$$

де

$$\begin{cases} a_t = \frac{c_2^*}{2}, \\ b_t = -c_1^*, \\ c_t = J(t_2), \\ \Delta_t = 4a_t c_t - b_t^2 = 2c_2^* J(t_2) - (c_1^*)^2; \end{cases} \quad (28)$$

$$\begin{cases} a_{\omega} = M(t_2)k_2, \\ b_{\omega} = -M(t_2)k_1, \\ c_{\omega} = -M(t_2) - M_w(t_2), \\ \Delta_{\omega} = 4a_{\omega}c_{\omega} - b_{\omega}^2 = -4M(t_2)k_2 (M(t_2) + M_w(t_2)) - (M(t_2)k_1)^2. \end{cases} \quad (29)$$

Аналізуючи рівняння (17) та (21), бачимо, що функціонально завести в них залежність процесу піднімання вантажу від поздовжніх коливань, що виникають у тросі, до якого підвішено вантаж, ми можемо лише через момент навантаження  $M_w$ , визначивши його не лише як функцію часу  $M_w(t)$ , але ще й як функцію поздовжньої просторової координати  $x$ , тобто, як функцію  $M_w(x, t)$ . Тож далі покажемо, як це можна зробити.

Оскільки для використання рівнянь (17), (21) в системному аналізі процесу піднімання вантажу (з майданчика його попереднього розміщення) підйомним краном нам необхідно завести в них момент навантаження у вигляді функції  $M_w(x, t)$ , а

$$M_w(x, t) = R \cdot F(x, t), \quad (30)$$

де  $R$  — радіус барабана, на який намотується трос в процесі піднімання вантажу, а  $F(x, t)$  — сила, що виникає в перерізі цього троса в момент часу  $t$  на відстані  $x$  від початку відліку цієї просторової координати вздовж троса, то для врахування поздовжніх коливань, що виникають в тросі, доповнимо рівняння (17), (21) рівнянням (13), в якому ця сила і фігурує, трансформувавши його до вигляду

$$\frac{1}{nm} \frac{\partial^2 F(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F(x, t)}{\partial t^2}, \quad (31)$$

а потім до вигляду

$$\frac{\partial^2 F(x, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{nm} \left( \frac{\partial^2 F(x, t)}{\partial x^2} + \frac{G_w + G_T(x, t)}{S} \right), \quad (32)$$

де  $G_w$  — сила ваги вантажу,  $G_T(x, t)$  — сила ваги відрізка троса між вантажем та барабаном намотування, а  $S$  — площа поперечного перерізу троса.

Зауважимо, що у рівнянні (32) членом  $\frac{G_w + G_T(x, t)}{S}$  згідно рекомендацій, викладених у фундаментальній роботі [8], враховується причина появи примусової складової поздовжніх коливань сили в тросі, зумовленої віднесеної до поперечного перерізу кожного волокна троса силою ваги вантажу та силою ваги відрізка троса між вантажем та барабаном намотування, яка в процесі намотування тросу змінюється, тобто є функцією просторової координати та часу.

Розв'язуючи рівняння (32) та підставляючи цей розв'язок у співвідношення (30), а після цього у свою чергу у рівняння (17), (21), розв'язуючи які за цих умов, ми отримаємо розв'язки цих рівнянь, що враховуватимуть і поздовжні коливання троса.

А почнемо розв'язування рівняння (32) з визначення початкових і граничних умов для нього. А вони вочевидь будуть такими:

– початкові умови

$$\begin{cases} F(x, t)|_{t=0} = f_1(x), \\ \frac{\partial F(x, t)}{\partial t}|_{t=0} = f_2(x); \end{cases} \quad (33)$$

– граничні умови

$$\begin{cases} F(x, t)|_{x=0} = G_w, \\ F(x, t)|_{x=l} = G_w + G_T, \end{cases} \quad (34)$$

де

$$G_T = mlSg; \quad (35)$$

$l$  — довжина відрізка троса між барабаном намотування та майданчиком встановлення вантажу;  $g$  — прискорення вільного падіння.

Оскільки граничні умови (34) не є однорідними, то для розв'язання рівняння (32) ми не можемо використати такий потужний метод розв'язання диференціальних рівнянь в частинних похідних, яким є метод Фур'є [8]. Але, як показано у тій же роботі [8], цей метод можна використати, якщо від рівняння (32) перейти до рівняння, яке ми подаємо, використовуючи позначення змінних і параметрів таке ж, як і у роботі [8],

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x, t), \quad (36)$$

в якому  $u(x, t)$  — зміщення перерізу троса з просторовою координатою  $x$  в момент часу  $t$  вздовж вертикальної осі цього троса;

$$a^2 = \frac{1}{nm} = \frac{E}{m}; \quad (37)$$

$E$  — модуль пружності матеріалу, з якого виготовлено трос (модуль Юнга), і який є величиною, оберненою до податливості  $n$ , а  $g(x, t)$  прискорення, яке пов'язане з силою ваги вантажу та силою ваги відрізка троса між барабаном намотування і вантажем співвідношенням

$$g(x, t) = \frac{G_w + G_T(x, t)}{mlS}, \quad (38)$$

яке з урахуванням того, що в кожному мить

$$\frac{x}{t} = a = \sqrt{\frac{E}{m}} \Rightarrow t = \frac{x\sqrt{m}}{\sqrt{E}} \quad (39)$$

легко зводиться до вигляду

$$g_1\left(x, \frac{x}{a}\right) = \frac{G_w + G_T^*\left(x, \frac{x}{a}\right)}{mlS} \quad (40)$$

або

$$g_1(at, t) = \frac{G_w + G_T^*(at, t)}{mlS}. \quad (41)$$

Оскільки один кінець троса є защемленим на барабані намотування, а другий, на якому підвішено вантаж, є вільним, то, як показано в роботі [8], граничні умови для рівняння (36) мають вигляд

$$\begin{cases} u(x, t)|_{x=0} = 0, \\ \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|_{x=l} = 0, \end{cases} \quad (42)$$

а початкові умови —

$$\begin{cases} u(x, t)|_{t=0} = 0, \\ \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (43)$$

В роботі [8] показано, що розв'язок рівняння (32) з граничними умовами (42) та початковими умовами (43) має вигляд

$$u(x, t) = \frac{g_{1l}x(2l-x)}{2a^2} - \frac{16g_{1l}l^2}{\pi^3 a^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3} \left[ \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l} \cos \frac{(2k+1)\pi at}{2l} \right], \quad (44)$$

де

$$g_{1l} = g_1(x)|_{x=l}. \quad (45)$$

Використовуючи співвідношення (39), вираз (44) можна записати і так

$$u(t) = \frac{g_{1l}at(2l-at)}{2a^2} - \frac{16g_{1l}l^2}{\pi^3 a^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3} \left[ \sin \frac{(2k+1)\pi at}{2l} \cos \frac{(2k+1)\pi at}{2l} \right]. \quad (46)$$

Оскільки, як відомо з теорії сигналів [9], 95 % енергії сигналу переносять постійна складова та 5 гармонік, то у виразі (44) у його практичному застосуванні варто верхню границю вважати рівною не  $\infty$ , а 5.

Двічі диференціюючи вираз (46) по часу з урахуванням приведеного вище зауваження та формули для синуса подвійного аргументу, отримаємо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -g_{1l} + \frac{2g_{1l}}{\pi} \sum_{k=0}^5 \frac{1}{2k+1} \left[ \sin \frac{(2k+1)\pi at}{l} \right]. \quad (47)$$

Цілком очевидно, що помноживши рівняння (47) на сумарну масу вантажу та відрізка троса між барабаном намотування та точкою підвісу вантажу, ми отримаємо силу, яка виникає в перерізі цього троса і викликає поздовжні коливання в ньому, у вигляді

$$F(x, t) = \left( \frac{G_w + G_T(x, t)}{g} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left( \frac{G_w + G_T(x, t)}{g} \right) g_{1l} \left( -1 + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^5 \frac{1}{2k+1} \left[ \sin \frac{(2k+1)\pi at}{l} \right] \right), \quad (48)$$

та яка в момент відриву вантажу від майданчика попереднього встановлення дорівнюватиме

$$F(l, 0) = - \left( \frac{G_w + G_T(l, 0)}{g} \right) g_{1l}. \quad (49)$$

Саме підстановкою цього значення сили, заданого виразом (49), у вираз (30) отримуємо значення моменту навантаження  $-M_{g_0}$  в рівнянні (6). Розв'язувати ж це рівняння (17) в загальному вигляді потрібно, підставляючи в нього замість  $-M_w(t_1)$  вираз

$$-M_w(t_1, t) = R \left( \frac{G_w + G_T(l, 0)}{g} \right) g_{1l} \left( -1 + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^5 \frac{1}{2k+1} \left[ \sin \frac{(2k+1)\pi a t}{l} \right] \right) + \alpha_1 t_1 + \frac{\alpha_2}{2} t_1^2. \quad (50)$$

Що ж до моменту навантаження  $M_w(t_2)$ , то замість нього в рівняння (21) з урахуванням виразів (48) та (30) потрібно підставляти вираз

$$-M_w(t_2, t) = R \left( \frac{G_w + G_T(at_2, t_2)}{g} \right) g_{1l} \left( -1 + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^5 \frac{1}{2k+1} \left[ \sin \frac{(2k+1)\pi a t}{l} \right] \right) + \alpha_1 (t_2 - t_1). \quad (51)$$

Цілком очевидно, що зміниться і рівняння (20), яке у зв'язку з виникненням поздовжніх коливань в тросі набуде вигляду

$$(c_1 + c_2(t - t_1)) \omega_y^* = \alpha_1 (t - t_1) + R \left( \frac{G_w + G_T(at_1, t_1)}{g} \right) g_{1l} \left( \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^5 \frac{1}{2k+1} \left[ \sin \frac{(2k+1)\pi a t}{l} \right] \right). \quad (52)$$

Далі покажемо, як зміняться розв'язки рівнянь (17) та (21) у зв'язку з тим, що в цих рівняннях вирази для моменту навантаження набудуть вигляду (50) та (51).

Легко бачити, що в разі конкретизації значення часу, тобто, задаючи  $t = t_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, q$  у виразі (50), ми за цим виразом будемо отримувати конкретні числа  $-M_w(t_1, t_i)$ , що дозволяє нам використовувати вираз (23) для отримання значення кутової швидкості у цей момент часу  $t = t_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, q$  у вигляді

$$\omega_i = \frac{\left( b_\omega^2 - \Delta_\omega^{(i)} \right) \left( e^{\sqrt{-\frac{4\Delta_\omega^{(i)}}{\Delta_t} \arctg \frac{2a_t \sqrt{\Delta_t} t_i}{\Delta_t + b_t^2 + 2a_t b_t t_i}} - 1} \right)}{2a_\omega \left( b_\omega \left( 1 - e^{\sqrt{-\frac{4\Delta_\omega^{(i)}}{\Delta_t} \arctg \frac{2a_t \sqrt{\Delta_t} t_i}{\Delta_t + b_t^2 + 2a_t b_t t_i}} \right) + \sqrt{-\Delta_\omega^{(i)}} \left( 1 + e^{\sqrt{-\frac{\Delta_\omega^{(i)}}{\Delta_t} \arctg \frac{2a_t \sqrt{\Delta_t} t_i}{\Delta_t + b_t^2 + 2a_t b_t t_i}} \right) \right)}, \quad i = 0, 1, \dots, q, \quad (53)$$

де

$$\begin{cases} a_t = \frac{c_2^*}{2}, \\ b_t = -c_1^*, \\ c_t = J_0^*, \\ \Delta_t = 4a_t c_t - b_t^2 = 2c_2^* J_0^* - (c_1^*)^2; \end{cases} \quad (54)$$

$$\begin{cases} a_\omega = -M_P k_2, \\ b_\omega = M_P k_1, \\ c_\omega^{(i)} = M_P - M_w(t_1, t_i), \\ \Delta_\omega^{(i)} = 4a_\omega c_\omega^{(i)} - b_\omega^2 = -4M_P k_2 (M_P - M_w(t_1, t_i)) - (M_P k_1)^2. \end{cases} \quad (55)$$

Звертаємо увагу на те, що у цьому випадку нижня нерівність у виразі (26) може набувати протилежного характеру, що приводить до появи комплексних чисел у виразі (53), перетворення яких у цьому виразі буде приводити до появи у ньому коливальних складових.

Аналогічно в разі конкретизації значення часу, тобто, задаючи  $t = t_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, q$  у виразі (51), ми за цим виразом будемо отримувати конкретні числа  $-M_w(t_2, t_i)$ , що дозволяє нам використовувати вираз (23) для отримання значення кутової швидкості у цей момент часу  $t = t_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, q$  у вигляді



$$\omega_i = \omega_y^* - \frac{(b_\omega^2 - \Delta_\omega^{(i)}) \left( e^{\sqrt{\frac{4\Delta_\omega^{(i)}}{\Delta_t}} \operatorname{arctg} \frac{2a_t \sqrt{\Delta_t} (t_i - t_2)}{\Delta_t + b_t^2 + 2a_t b_t (t_i - t_2)}} - 1 \right)}{2a_\omega \left( b_\omega \left( 1 - e^{\sqrt{\frac{4\Delta_\omega^{(i)}}{\Delta_t}} \operatorname{arctg} \frac{2a_t \sqrt{\Delta_t} (t_i - t_2)}{\Delta_t + b_t^2 + 2a_t b_t (t_i - t_2)}} \right) + \sqrt{-\Delta_\omega^{(i)}} \left( 1 + e^{\sqrt{\frac{4\Delta_\omega^{(i)}}{\Delta_t}} \operatorname{arctg} \frac{2a_t \sqrt{\Delta_t} (t_i - t_2)}{\Delta_t + b_t^2 + 2a_t b_t (t_i - t_2)}} \right) \right)}, \quad (56)$$

$$\text{де} \quad \begin{cases} a_t = \frac{c_2^*}{2}, \\ b_t = -c_1^*, \\ c_t = J(t_2), \\ \Delta_t = 4a_t c_t - b_t^2 = 2c_2^* J(t_2) - (c_1^*)^2; \end{cases} \quad (57)$$

$$\begin{cases} a_\omega = M(t_2)k_2, \\ b_\omega = -M(t_2)k_1, \\ c_\omega^{(i)} = -M(t_2) - M_w(t_2, t_i), \\ \Delta_\omega^{(i)} = 4a_\omega c_\omega^{(i)} - b_\omega^2 = -4M(t_2)k_2 (M(t_2) + M_w(t_2, t_i)) - (M(t_2)k_1)^2. \end{cases} \quad (58)$$

Поява коливальних складових у виразі (56) і у цьому випадку зумовлена тим, що нижня нерівність у виразі (26) може набувати протилежного характеру, що приводить до появи комплексних чисел у виразі (56), перетворення яких буде приводити до появи у ньому синусоїд.

Зрозуміло, що використання виразів (53) та (56) приводить до формування зубчастої обвідної на тренді кутової швидкості, зумовленої дискретними змінами не лише часу, але і параметрів  $\Delta_\omega^{(i)}$ , яка при зменшенні параметра дискретизації часу буде наближатись до гладкої кривої тренду.

Як використовувати отримані математичні моделі для системного аналізу процесів переміщення вантажів підйомним краном та синтезу таких законів регулювання кутової швидкості тягового електродвигуна електроприводу цього підйомного крану, щоб при відриві вантажу від майданчика попереднього встановлення між ними не виникали ударні зіткнення, зумовлені виникненням поздовжніх коливань в тросі, що можуть привести до взаємного руйнування як вантажу так і майданчика, ми покажемо у наступній статті, а викладення матеріалу у цій статті ми цією фразою і закінчимо.

### Висновки

1. Обґрунтовано необхідність системного підходу до аналізу процесів переміщення вантажів підйомним краном, який враховував би і зміну параметрів цього процесу у часі, зумовлену змінами приведенного моменту інерції системи електропривода та моменту навантаження, і вплив поздовжніх коливань, які виникають у тросі, на який підвішується вантаж.

2. З використанням структури звичайного диференціального рівняння зі змінними в часі параметрами та структури диференціального рівняння в частинних похідних здійснено синтез системної математичної моделі процесу переміщення вантажу підйомним краном, яка враховує і зміну параметрів математичної моделі цього процесу у часі, зумовлену змінами приведенного моменту інерції системи електропривода та моменту навантаження, і вплив поздовжніх коливань, які виникають у тросі, на який підвішується вантаж.

3. Запропоновано алгоритм практичної реалізації синтезованої системної математичної моделі процесу переміщення вантажу підйомним краном, який дозволяє здійснити покроково оцінку цього процесу в темпі його протікання.

### СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Ukrbukba.net: *Електродвигун крана* [Електронний ресурс]. Режим доступу: <http://ukrbukva.net/page,4,98958-Elektrodvigatel-krana.html>. Дата звернення: Жовт. 15, 2018.
- [2] *Будівельна техніка* (довідник): *Кранове електрообладнання та схеми управління кранами* [Електронний ресурс]. Режим доступу: <http://budtehnika.pp.ua/1639-kranove-elektroobladdnannya-ta-shemi-upravlnnya-kranami.html>. Дата звернення: Лист. 9, 2018.

- [3] М. Г. Чиликин, М. М. Соколов, В. М. Терехов, и А. В. Шинянский, *Основы автоматизированного электропривода*. Москва: Энергия, 1974, 568 с.
- [4] В. І. Мокін, О. В. Мокін, and О. М. Kryvonis, "Synthesis of mathematical models for one class of electromechanical systems with variable parameters," in *2017 IEEE First Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering (UKRCON). Conference Proceedings*, Kyiv, Ukraine, November. 2017. <https://doi.org/10.1109/UKRCON.2017.8100504>.
- [5] Б. І. Мокін, О. В. Мокін, та О. М. Кривоніс, «Моделювання режимів роботи системи керування електроприводом підйомного крану з врахуванням змін в часі моменту інерції махових мас.» на *XIV Міжнародній конференції «Контроль і управління в складних системах (КУСС-2018)». Тези доповідей*, Вінниця, 2018, с. 14.
- [6] Б. І. Мокін, О. В. Мокін, та О. М. Кривоніс, «Метод ідентифікації математичної моделі одного класу лінійних динамічних систем зі змінними параметрами.» *Вісник Вінницького політехнічного інституту*, № 6, с. 62-75. 2018.
- [7] Б. І. Мокін, В. Б. Мокін, та О. В. Мокін, *Математичні методи ідентифікації динамічних систем*. Вінниця, Україна: ВНТУ, 2010.
- [8] Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, та М. М. Смирнов, *Уравнения в частных производных математической физики*. Москва: Высшая кола, 1970.
- [9] В. П. Бабак, А. Я. Білецький, та А. М. Гуржій, *Сигнали і спектри*. Київ, Україна: НАУ, 2005.

Рекомендована кафедрою відновлювальної енергетики та транспортних електричних систем і комплексів ВНТУ

Стаття надійшла до редакції 21.05.2019

**Мокін Борис Іванович** — академік НАПН України, д-р техн. наук, професор, професор кафедри відновлювальної енергетики та транспортних електричних систем і комплексів, професор кафедри системного аналізу, комп'ютерного моніторингу та інженерної графіки, e-mail [borys.mokin@gmail.com](mailto:borys.mokin@gmail.com) ;

**Мокін Олександр Борисович** — д-р техн. наук, професор, професор кафедри системного аналізу, комп'ютерного моніторингу та інженерної графіки, email: [abmokin@gmail.com](mailto:abmokin@gmail.com) ;

**Кривоніс Олександр Михайлович** — аспірант кафедри відновлювальної енергетики та транспортних електричних систем і комплексів, e-mail: [kryvonis.ol@gmail.com](mailto:kryvonis.ol@gmail.com) .

Вінницький національний технічний університет, Вінниця

**B. I. Mokin<sup>1</sup>**  
**O. B. Mokin<sup>1</sup>**  
**O. M. Kryvonis<sup>1</sup>**

## System Approach to the Analysis of the Processes of Moving Cargoes with a Crane

<sup>1</sup>Vinnitsia National Technical University

*The necessity of a systematic approach to the analysis of processes of movement of cargoes with a crane, which also takes into account the change in the characteristics of this process in time due to changes in the moment of inertia of the electric drive system and the moment of loading during the movement of the load, and the effect of longitudinal oscillations that arise in the cable to which suspended cargo. It has been shown that ignoring these peculiarities of the process of moving cargoes with a crane can lead to the destruction of both cargoes and the areas on which these cargoes are installed due to the occurrence of their shock collateral caused by the occurrence of longitudinal oscillations in the cable to which the cargo is suspended. Using the structure of ordinary differential equations with variable time parameters, which connects the time drive traction motor with the load moment and the present moment of inertia of the electric system and the structure of the differential equation in partial derivatives, which describes the process of longitudinal oscillations in the rope caused by the influence of mass cargo weight and interval between cable drum winder and its point of suspension load, the synthesis system moves through mathematical models of cargo crane, which takes into account the change in the parameters of the mathematical model of the process over time due to changes in the reduced moment of inertia of the electric system and moment load and the effect of longitudinal vibrations arising in the rope, which hung load. The algorithm of practical realization of the synthesized system mathematical model of the process of cargo movement by a lifting crane is suggested, which allows to carry out step by step evaluation of this process in its rate of flow.*

**Keywords:** lifting crane, displacement of cargo, variable moment of inertia, rope, longitudinal oscillations, system approach, synthesis, mathematical model, algorithm of realization.

**Mokin Borys I.** — Academician of NAPS of Ukraine, Dr. Sc. (Eng.), Professor, Professor of the Department of Renewable Energy and Transport Electrical Systems and Complexes, Professor of the Department of System Analysis, Computer Monitoring and Engineering Graphics, e-mail: [borys.mokin@gmail.com](mailto:borys.mokin@gmail.com) ;

**Mokin Oleksandr B.** — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Professor of the Department of System Analysis, Computer Monitoring and Engineering Graphics, e-mail: abmokin@gmail.com ;

**Kryvonis Oleksandr M.** — Post-Graduate Student of the Chair of Renewable Energy and Transport Electrical Systems and Complexes, e-mail: kryvonis.ol@gmail.com

**Б. И. Мокин<sup>1</sup>**  
**А. Б. Мокин<sup>1</sup>**  
**А. М. Крывонис<sup>1</sup>**

## Системный подход к анализу процессов перемещения грузов подъемным краном

<sup>1</sup>Винницкий национальный технический университет

*Обоснована необходимость системного подхода к анализу процессов перемещения грузов подъемным краном, который учитывал бы и изменение характеристик этого процесса во времени, обусловленную изменениями приведенного момента инерции системы электропривода и момента нагрузки при перемещении груза, и влияние продольных колебаний, которые возникают в тросе, на который подвешивается груз. Показано, что игнорирование этих особенностей процесса перемещения грузов подъемным краном может привести к разрушению как грузов так и площадок, на которых эти грузы устанавливаются, вследствие возникновения их ударных соприкосновений обусловленных возникновением продольных колебаний в тросе, к которому подвешен груз. С использованием структуры обычного дифференциального уравнения с переменными во времени параметрами, которое связывает приводной момент тягового электродвигателя с моментом нагрузки и приведенным моментом инерции системы электропривода, и структуры дифференциального уравнения в частных производных, которым описывается процесс возникновения продольных колебаний в тросе, обусловленных влиянием массы груза и массы отрезке троса между барабаном его намотки и точкой подвеса груза, осуществлен синтез системной математической модели процесса перемещения груза подъемным краном, которая учитывает и изменение параметров математической модели этого процесса во времени, обусловленную изменениями приведенного момента инерции системы электропривода и момента нагрузки, и влияние продольных колебаний, которые возникают в тросе, на который подвешивается груз. Предложен алгоритм практической реализации синтезированной системной математической модели процесса перемещения груза подъемным краном, который позволяет осуществить пошагово оценку этого процесса в темпе его протекания.*

**Ключевые слова:** подъемный кран, перемещение груза, переменный момент инерции, трос, продольные колебания, системный подход, синтез, математическая модель, алгоритм реализации.

**Мокин Борис Иванович** — академик НАПН Украины, д-р техн. наук, профессор, профессор кафедры возобновляемой энергетики и транспортных электрических систем и комплексов, профессор кафедры системного анализа, компьютерного мониторинга и инженерной графики, e-mail: borys.mokin@gmail.com ;

**Мокин Александр Борисович** — д-р техн. наук, профессор, профессор кафедры системного анализа, компьютерного мониторинга и инженерной графики, email: abmokin@gmail.com ;

**Крывонис Александр Михайлович** — аспирант кафедры возобновляемой энергетики и транспортных электрических систем и комплексов, e-mail: kryvonis.ol@gmail.com