

Назаренко І. І.

Свідерський А. Т.

Ручинський М. М.

Дєдов О. П.

Київський  
національний  
університет  
будівництва і  
архітектури

УДК 69.00.25

## ОЦІНКА ВКЛАДУ ВИЩИХ ГАРМОНІК В РОБОЧИЙ ПРОЦЕС МАШИН РІЗНОГО ТЕХНОЛОГІЧНОГО ПРИЗНАЧЕННЯ

*В статтє исследуются колебания виброударных систем с учетом вклада высших гармоник, определены зоны устойчивости и характеристики при представлении масс в системе дискретно-континуальными параметрами.*

*The article investigates the fluctuations of vibro-impact systems, taking into account the contribution of higher harmonics, are defined by a zone of stability and performance, when the masses are represented in a discrete-continuous parameters.*

### 1. Постановка проблеми.

Машини вібраційної дії широко використовуються для подрібнення, сортування, перемішування і інших технологічних процесах. Поряд із реалізацією звичайних гармонійних режимів руху вібраційних машин застосовуються машини на основі поєднання вібрації і удару. Такий режим, що прийнято називати віброударним, має широкий амплітудно-частотний спектр, цілеспрямоване використання якого представляється перспективним.

### 2. Аналіз досліджень.

Дослідженню віброударних процесів в машинах різного технологічного призначення присвячені роботи [1–5], де розглянуті питання руху, стійкості, визначення параметрів і т.п.

### 3. Формування мети статті.

Дослідження вкладу вищих гармонік в процес віброударних систем на основі врахування вищих гармонік та впливу маси, представлені дискретно-континуальною системою

### 4. Виклад основного матеріалу.

Одним з можливих шляхів підвищення технологічного процесу є створення вібромашини, в конструкції якої передбачено параметр, що змінюється в часі, наприклад, використання додаткового пружного елемента [5]. Ця система наділена чудовою характеристикою, що в ній можливі й інші області стійкості, вивчення яких представляє практичний інтерес. Розглянемо приведену гібридну динамічну систему (рис.1), в якій

коливання зв'язані з періодичною залежністю від часу параметра жорсткості (рис.1, б).

Математичне визначення цього класу коливань зазвичай дається для систем, рівняння руху яких зводиться до звичайних рівнянь в часі (параметричні коливання).

В прийнятій розрахунковій схемі (рис.1, а) під  $m$  розуміється приведена маса вібросистеми, що включає в себе коливальні маси машини і реактивний опір середовища [5].

Часові відрізки (рис.1, б)  $\tau_1$  і  $\tau_2$  представляють відповідно час руху маси без контакту з пружними обмежниками коливань, жорсткістю  $C$  і в контакті з цими елементами. Очевидно, що  $T = \tau_1 + \tau_2$ .

Розглянемо підхід, суть якого полягає в оцінці середньої за період  $T$  жорсткості  $c$ .

$$C = \int_0^T C(T) dt = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^{\tau_1} (C_1 + C_2) dt + \int_{\tau_1}^{\tau_1 + \tau_2} C_1 dt \right\} = C_1 + C_2 \frac{\tau_2}{T}. \quad (1)$$

Тут відрахунок часу приймається з моменту контакту двох взаємодіючих мас. Підхід, що виражається у вигляді (1), дозволяє апроксимувати даний закон  $C(t)$  функцією

$$C(T) \approx C_1 + C_x \cos\left(\frac{\pi}{2\tau_2} t\right). \quad (2)$$

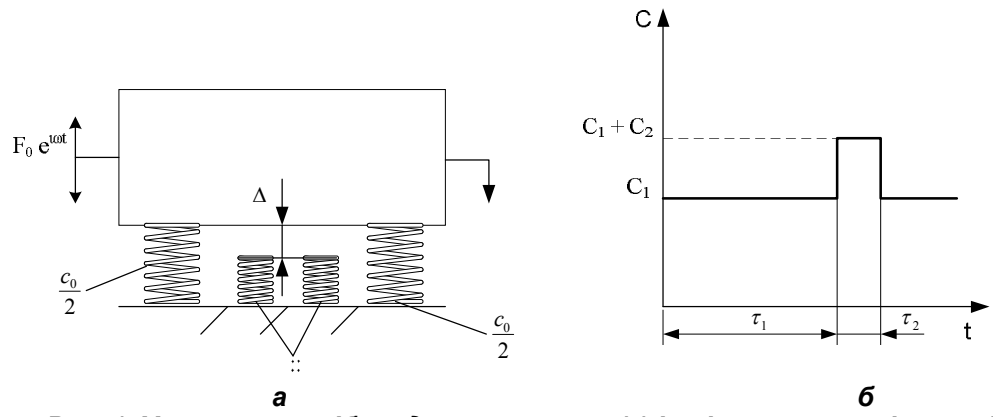


Рис. 1. Узагальнена віброударна система (а) і зміна пружності за період (б)

Прийнятий запис обґрунтовується тим, що «прямокутний сплеск»  $c(t)$  (рис.1,а) на ділянці  $0 < t < \tau_2$  можна описати косинусоїдальною функцією, і так як  $\cos \omega t \rightarrow 0$  при  $t = \frac{1}{4}T$ , то вибираючи  $\tau_2 = \frac{1}{4}T$ , будемо мати, що  $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4\tau_2} = \frac{\pi}{2\tau_2}$ . Для знаходження залежності для  $c_x$  будемо виходити з тотожності (2) і (3), маючи на увазі зміну  $c(t)$  як середню за період  $T$ :

$$\frac{1}{T} \int_0^T \left[ c_1 + c_x \cos\left(\frac{\pi}{2\tau_2} t\right) \right] dt = c_1 + c_2 \frac{\tau_2}{T}. \quad (3)$$

Розв'язавши (3), отримаємо:

$$c_x = - \frac{\pi \cdot c_2}{2 \sin\left(\frac{\pi}{2\tau_2} T\right)}. \quad (4)$$

Знак « - » вказує, що значення синуса, що розглядаються, лежать в 3-й і 4-й чвертях  $\left(\frac{\pi}{2} \frac{T}{\tau_2}\right) > \pi$ , відповідно, завжди  $c_x > 0$ . Дійсно, використовуючи дослідні дані [5], будемо мати  $\frac{\tau_2}{T} = \frac{\tau_k}{T} = \frac{1}{3}$ . Тоді при  $\frac{\tau_2}{T} = \frac{1}{3}; c_x = \frac{\pi}{2} c_2$ . Тоді є можливість записати рівняння коливань системи (рис. 1,а) в трохи іншому вигляді:

$$m\ddot{x} + \left[ c_1 + c_x \left( \frac{\pi}{2\tau_2} t \right) \right] x + v\dot{x} = F_0 \sin(\omega t + \varphi), \quad (5)$$

де

$$m = m_c + m_c \left( a_1 + a_1^* \frac{\tau_2}{T} \right); \quad (6)$$

$$v = v_0 + m_c \left( \omega d_1 + \frac{\omega^*}{2} d_1^* \frac{\tau_2}{T} \right); \quad (7)$$

На відміну від прийнятих раніше позначень, тут  $a_1^*$  і  $d_1^*$  - коефіцієнти впливу реактивних і активних сил опору на частоті  $\frac{\omega^*}{2}$ , а  $a_1$  і  $d_1$  [5] – коефіцієнти впливу реактивних і активних сил опору на основній частоті  $\omega$ ;  $\tau_2$  - час контакту з  $c_2$ ;  $T$  – період зміни пружності;  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ;  $\omega^* \neq \omega$ .

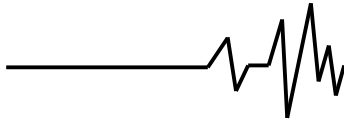
Розглянемо вільні коливання без врахування розсіювання енергії з наступним аналізом повного рівняння (5).

$$\text{Ввівши безрозмірний час } \theta = \frac{\pi}{2\tau_2} t \cdot \frac{1}{2},$$

перетворимо рівняння (8)

$$\frac{d^2 x}{d\theta^2} + (\xi + 2q \cos 2\theta)x = 0, \quad (8)$$

$$\text{де } \xi = \frac{4c_1}{m\left(\frac{\pi}{2\tau_2}\right)^2}; q = \frac{2c_x}{m\left(\frac{\pi}{2\tau_2}\right)^2}. \quad (9)$$



Розглянемо коливання з врахуванням вищих гармонік:  $\frac{\pi}{2\tau_2} = \omega = 2n\omega$ , де  $n$  – число, близьке до 2. Час контакту при цьому  $\tau_2 = \frac{\pi}{2 \cdot 2n\omega} = \frac{\pi}{4n} \cdot \frac{T}{2\pi} = \frac{T}{8n}$ . при цьому слід відмітити, що точно  $n \neq 2$ , так як інакше  $c_x \rightarrow \infty$  згідно його виразу (5). Тому будемо брати числові значення  $n = 1,9; 1,95; 1,975; 1,99$ .

Таким чином, формули для визначення  $\xi, q, c_x$  будуть мати вигляд

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{c_1}{mn^2\omega^2}; \\ q &= \frac{c_x}{2mn^2\omega^2}; \\ c_x &= -\frac{\pi \cdot c_2}{2\sin 4n\pi}, \end{aligned} \quad (10)$$

чи після підстановки  $c_x$  і  $q$  отримаємо

$$\xi = \frac{c_1}{mn^2\omega^2}; q = -\frac{\pi \cdot c^2}{4mn^2\omega^2 \sin(4\pi \cdot n)}. \quad (11)$$

Необхідно встановити генерацію супергармонік з частотою  $\alpha\omega$  за рахунок параметричної зміни пружності в системі.

Коефіцієнт  $\xi$  (характеризує відношення власної частоти системи при середньому значенні параметра  $c_1$  до частоти зміни параметра пружності) і коефіцієнт  $q$  (характеризує ступінь зміни параметра пружності) повністю визначають стійкість руху. Площина зміни параметрів  $\xi$  і  $q$  може бути розділена на області, що відповідають стійким і нестійким. Якщо параметри  $\xi$  і  $q$  попадають в зону стійкості, тоді можливі періодичні рішення (10). При цьому період руху повинен вдвічі перевищувати період зміни параметра. Якщо ж зміна жорсткості пропорційно  $4\omega$  системи, тоді рух пропорційно подвоєної частоти системи  $2\omega$  і отримаємо супергармонійну складову в зоні стійкості.

Визначимо раціональну область стійкості і час контакту для наступних вихідних даних:  $m = 10^4 \text{ кг}; \omega = 157 \text{ 1/с}; c_1 = 7 \cdot 10^7 \text{ Н/м}$ .

Із (13) знайдемо, що коефіцієнт  $\xi = 7 \cdot 10^7 / 10^4 \cdot 157^2 = 0,071$ ; час контакту  $\tau_2 = \tau = 1 / 25 \cdot 16 = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ с}$ . Щоб попасти в

першу зону стійкості руху, потрібно взяти  $q < 1$ , тобто при даних значеннях параметрів  $m, \omega, c_1$  будемо мати

$$-\frac{\pi \cdot c_2}{4 \cdot 10^4 n^2 \cdot 157^2 \sin(4n\pi)} < 1,$$

Звідки отримуємо, що  $c_2 < 1,56 \cdot 10^8 \text{ Н/м}$ .

якщо ж  $c > 1,56 \cdot 10^8 \text{ Н/м}$ , то попадаємо в зону нестійкості, де і спостерігається параметричний резонанс на бажаній частоті коливань. Відмітимо, що наступна (друга) зона стійкості появляється при значенні  $c_2 \approx 7,5 \cdot 1,56 \cdot 10^8 \text{ Н/м} = 1,17 \cdot 10^9 \text{ Н/м}$ . Таким чином, якщо числові значення пружності знаходяться в межах  $1,56 \cdot 10^8 < c_2 < 1,17 \cdot 10^9 \text{ (Н/м)}$ , то при прийнятих допущеннях, що виражаються рівняннями (5), буде спостерігатись супергармонійний резонанс, реалізація якого значно підвищує ефективність робочого процесу вібраційної машини.

Врахування часу контакту чи часу повного удару дозволяє визначити фактичний коефіцієнт відновлення швидкості при співударі мас, що коливаються, більш точно оцінити енергетичні співвідношення в системі, виявити вплив часу удару на пружні характеристики системи. Розглянемо цю задачу відносно до двомасної системи.

На ділянці руху мас  $m_1$  і  $m_2$  поза їх контактом розглядається система, що описується рівнянням

$$m_{np} \ddot{x}^{(-)} + b_1 \dot{x}^{(-)} + c_1 x^{(-)} = \alpha F_0 \left\{ \frac{\sin}{\cos} \right\}(\omega t), \quad (12)$$

Де  $m_{np}$  - приведена маса системи,

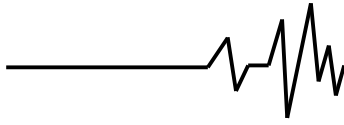
$$m_{np} = m_1 m_2 / (m_1 + m_2); \quad b_1 - \text{узагальнений}$$

еквівалентний коефіцієнт опору;  $c_1$  - коефіцієнт пружності віброізолюючих опор;  $x^{(-)}$  - приведені переміщення мас при відсутності контакту;  $\alpha$  - коефіцієнт, що враховує місце прикладення вимушуючої сили  $F_0$ , а

$$\alpha = m_{np} / m_2, \quad \alpha = -m_{np} / m_2.$$

Початкові умови по прискоренню

$$\dot{x}^{(-)}|_{t=0} = G_c; \quad \dot{x}^{(-)}|_{t=t} = G_k \quad (13)$$



Згідно з цією умовою, накладається обмеження на значення прискорення. Підрахунок часу ведеться з моменту, коли прискорення досягає максимального значення. При вибраних початкових умовах (13) рішення рівняння відносно переміщення запишемо у вигляді

$$\dot{x}^{(-)} = e^{\delta_1 t} [A_1 \cos(\tilde{p}_1 t) + A_2 \sin p_1 t] + \frac{\alpha F_0 \left\{ \frac{\sin}{\cos} \right\} (\omega t - \varphi)}{\sqrt{(p_1^2 - \omega^2)^2 + 4\tilde{\delta}_1^2 \omega^2}} \quad (14)$$

де  $\tilde{\delta}_1 = \frac{\delta_1}{2m_{np}}$ ;  $\tilde{p}_1 = \sqrt{p_1^2 + \tilde{\delta}_1^2}$ ;  $p_1^2 = \frac{c_1}{m_{np}}$ ;

$$\varphi = \arctg \left\{ \frac{2\tilde{\delta}_1 \omega}{p_1^2 - \omega^2} \right\}.$$

Швидкість коливань для тих же умов

$$\dot{x}^{(-)} \Big|_{t=t_1} = -b_1 e^{-b_1 t_1} [A_1 \cos(\tilde{p}_1 t_1) + A_2 \sin p_1 t_1] + e^{-\tilde{\delta}_1 t_1} [-\tilde{p}_1 A_1 \sin(\tilde{p}_1 t_1) + \tilde{p}_1 A_1 \cos(\tilde{p}_1 t_1)] + \frac{\alpha F_0 \left\{ \frac{\cos}{-\sin} \right\} (\omega t - \varphi_1)}{\sqrt{(p_1^2 - \omega^2)^2 + 4\tilde{\delta}_1^2 \omega^2}} \quad (15)$$

Коефіцієнти

$$A_1 = \frac{\Delta A_1}{\Delta}; \quad A_2 = \frac{\Delta A_2}{\Delta};$$

$$\Delta = (\tilde{\delta}_1^2 + \tilde{p}_1^2) \sin(\tilde{p}_1 t_1);$$

$$\Delta A_1 = G_c \left\{ (\tilde{\delta}_1^2 - \tilde{p}_1^2) \sin(\tilde{p}_1 t_1) - 2\tilde{\delta}_1 \tilde{p}_1 \cos(\tilde{p}_1 t_1) \right\} + G_k \cdot 2\tilde{\delta}_1 \tilde{p}_1 e^{\tilde{\delta}_1 t_1};$$

$$\Delta A_2 = G_k e^{\tilde{\delta}_1 t_1} (\tilde{\delta}_1^2 - \tilde{p}_1^2) - G_c \left\{ (\tilde{\delta}_1^2 - \tilde{p}_1^2) \cos(\tilde{p}_1 t_1) + 2\tilde{\delta}_1 \tilde{p}_1 \sin(\tilde{p}_1 t_1) \right\}.$$

Позначимо  $\dot{x}^{(-)} \Big|_{t=t_1} = V$ .

При русі мас в контакті вихідне рівняння (12) буде видозмінене з врахуванням додаткових параметрів:

$$m_{np} \dot{x}^{(+)} + (b_1 + b_2) \dot{x}^{(+)} + (c_1 + c_1) x^{(+)} = \alpha F_0 \cos[\omega(t - t_0)] \quad (16)$$

Де  $x^{(+)}$  відповідає переміщенню приведеної системи під дією сил, що входять у рівняння (16).

Припустимо

$$\dot{x}^{(+)} \Big|_{t=t_1} = V; \quad t' = t - t_1; \quad \dot{x}^{(+)} \Big|_{t'=0} = 0$$

Швидкість коливань по аналогії з (15)

$$V = -b_1 e^{-b_1 t_1} [A_1 \cos(\tilde{p}_1 t_1) + A_2 \sin p_1 t_1] + e^{-\tilde{\delta}_1 t_1} [-\tilde{p}_1 A_1 \sin(\tilde{p}_1 t_1) + \tilde{p}_1 A_1 \cos(\tilde{p}_1 t_1)] + \frac{\alpha F_0 [-\sin(\omega t_1 - \omega)]}{\sqrt{(p_1^2 - \omega^2)^2 + 4\tilde{\delta}_1^2 \omega^2}}.$$

Введемо позначення, що дозволяють перейти до рівнянь в безрозмірному вигляді:

$$m = m_{np}; \quad b = b_1 + b_2; \quad c = c_1 + c_2;$$

$$F(t') = \alpha F_0 (\omega t'); \quad \Omega = \frac{\alpha F_0}{mV}; \quad \tau = \Omega(t - t_1);$$

$$\varepsilon = \frac{mV^2}{\alpha F_0}; \quad z = \frac{x^{(+)}}{\varepsilon}; \quad k = \frac{1}{\Omega} \sqrt{\frac{c_1 + c_0}{m}}; \quad (17)$$

$$b = \frac{\delta}{2\sqrt{(c_1 + c) \cdot t}}; \quad f(t) = \frac{\alpha F_0 \cos\left(\frac{\omega}{\Omega} \tau\right)}{m\varepsilon\Omega^2};$$

$$f(0) = \frac{\alpha F_0}{m\varepsilon\Omega^2}.$$

Таким чином, рівняння (12) матиме вигляд

$$z'' + 2bkz' + k^2 z = f. \quad (18)$$

Початкові умови:

$$\tau = 0; \quad z = 0; \quad z' = V = \frac{V}{\varepsilon\Omega} > 0. \quad (19)$$

В результаті отримаємо систему параметрів, що характеризують процес взаємодії двох мас, який ми розглядаємо.

1. Час процесів, після закінчення якого досягається максимальна деформація обмежника

$$\tau^* = \frac{\arccos \delta}{k\sqrt{1-b^2}} + \frac{f(0)}{k^2 v} + \frac{1}{k^2 v} \left[ \frac{b}{v} f^2(0) \right] \quad (20)$$

Можна відмітити, що дійсний час  $\tau^*$ , через який виникне максимальна деформація обмежника коливань, зв'язаний з  $\tau^*$  залежністю

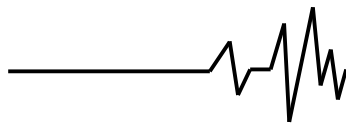
$$\tau^* = \left( \frac{\tau}{\Omega} + t_1 \right).$$

2. Величина максимальної деформації обмежника

$$a = \exp(-\delta k \tau^*) [C_1 \cos(k_1 \tau^*) + C_2 \sin(k_1 \tau^*)] + \frac{f(\tau^*)}{k^2}. \quad (21)$$

Тут  $k_1 = k\sqrt{1-b^2}$ ;  $C_1 = -\frac{f(0)}{k^2}$ ;

$$C_2 = \frac{v}{k\sqrt{1-b^2}} + \frac{bf(0)}{k^2\sqrt{1-\delta^2}}; \quad C_2 \gg C_1.$$



Дійсна деформація  $x_{\max} = \varepsilon a$ .

### 3. Час удару

$$\tau_{y\partial} = \frac{\pi}{k\sqrt{1-b^2}} + \frac{1 + \exp\left(\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-b^2}}\right)}{k^2 v} \times$$
$$\times f(0) + \frac{1}{k^2} \left\{ \frac{f^2(0)}{v^2} \delta \left[ 1 + \exp\left(\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}\right) \right] \right\};$$
$$t_{y\partial} = \frac{\tau_{y\partial}}{\Omega}. \quad (22)$$

### 4. Коефіцієнт відновлення

$$R = \exp\left(-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}\right) + \frac{1}{k} \frac{2f(0)\ln R_0}{v\sqrt{\pi^2 + \ln^2 R_0}} +$$
$$+ \frac{1}{k^2} \frac{f^2(0)}{2v^2} \left( \frac{1}{R_0} - R_0 \right).$$

Тут  $R_0 = \exp\left(-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}\right)$  (24)

### 5. Швидкість по закінченні ударної взаємодії

$$v_i = -R_0 v + \frac{2\delta}{k^2} (1 + R_0) f(0) +$$
$$+ \frac{1}{k^2} \frac{f^2(0)}{v} \frac{(1 - R_0)}{R_0}. \quad (25)$$

Істинна швидкість

$$V_+ = \varepsilon \Omega v_+.$$

6. Енергія, що поглинається обмежниками під час удару

$$\mathcal{E}_n = (1 - R^2) \frac{mv^2}{2} \quad (26)$$

### Висновки

1. Визначені зони стійкості з урахуванням вкладу вищих гармонік.
2. Запропоновано алгоритм розрахунку основних характеристик віброударного процесу, які забезпечують необхідний за технологією режим руху.

### Література

1. Бабицкий В.И., Крупенин В.М. Колебания в сильно нелинейных системах. – М.: Наука, 1985 – 320с.
2. Виба Я.А. Оптимизация и синтез виброударных машин. – Рига: Зинатне, 1988 – 340с.
3. Іскович-Лотоцький Р.Д. Основи розрахунку та розробки процесів і обладнання для віброударного пресування. Монографія – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2006. – 338с.
4. Кобринский А.Е., Кобринский А.А. Виброударные системы (Динамика и устойчивость). – М.: Наука – 592с.
5. Назаренко І.І. Прикладні задачі теорії вібраційних систем (2-е видання). К.: Видавничий Дім "Слово". 2010. – 440с.