

УДК 621.833.007

М. В. Маргуліс, О. Г. Приймаков, Ю. О. Градиський, О. Г. Янчик

## МЕТОДИКА ВИЗНАЧЕННЯ ЧАСТОТ ВЛАСНИХ КРУТИЛЬНИХ І ПОПЕРЕЧНИХ КОЛИВАНЬ ГЕНЕРАТОРА ХВИЛЬ СИЛОВОЇ ХВИЛЬНОЇ ЗУБЧАСТОЇ ПЕРЕДАЧІ

У статті наведена інженерна методика визначення частот крутильних (тангенційних) і поперечних власних коливань генераторів хвиль примусової та напівпримусової дії силових хвильових зубчастих передач. Достовірність методики доведена експериментально.

*К л ю ч о в і с л о в а:* силова хвильова зубчаста передача, генератор хвиль, власні крутильні і поперечні коливання.

**Постановка проблеми.** Силові хвильові зубчасті передачі (СХЗП) широко використовуються в сучасних технічних системах вітчизняного машинобудування та за кордоном. Проте складна динаміка хвильового зубчастого зачеплення, підсилена зовнішнім навантаженням, обмежує надійність СХЗП. Крім того, можливий збіг частот власних (крутильних та поперечних) і зовнішніх коливань всієї приводної технічної системи, що може призвести до резонансу. Ось чому слід контролювати рівень власних крутильних та поперечних коливань генераторів хвиль примусової дії (кулачкові генератори) та напівпримусової дії (дискові генератори) на стадії проектування та в процесі експлуатації.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Із аналізу літературних джерел [1–9] можна зрозуміти, що створити інженерну методику визначення частот власних крутильних та поперечних коливань генераторів хвиль СХЗП вдалося лише авторам даної статті.

**Метою статті** є розроблення інженерної методики визначення частот власних крутильних та поперечних коливань генераторів хвиль СХЗП для попередження явища резонансу.

**Виклад основного матеріалу.** Генератор хвиль (ГХ) хвильової зубчастої передачі (ХЗП) є багатомасовою динамічною системою (рис. 1), що включає ексцентриковий вал (ЕВ) 1, середній 3 і крайні 2 диски, які конструктивно виконані як дві половини одного диска. Це дозволяє збільшити площу і зменшує питомий тиск на контактуючих поверхнях дисків і гнучкого зубчастого колеса (ГЗК), по якому вони котяться, створюючи хвилю деформації зубвінця ГЗК і переміщення його відносно зубів жорсткого колеса. ЕВ і диски встановлені на підшипниках кочення, причому шийки крайніх і середнього дисків ексцентрично зміщені в протилежних напрямках. ГХ одержує обертання від сполучної ланки, що зв'язує його з електродвигуном, а диски обертаються відносно власних осей і в переносному русі разом з ЕВ відносно ГЗК.

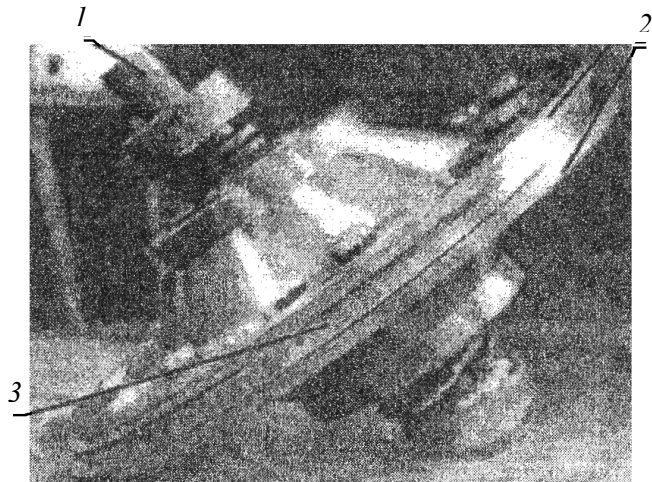


Рис. 1. Тридисковий генератор хвиль силової хвильової зубчастої передачі:  
1 – ексцентриковий вал; 2 – крайні диски; 3 – середній диск

На рис. 2, а представлена розрахункова динамічна схема ГХ для аналізу частоти власних крутильних коливань, де позначено:  $\varphi_{EB}$  і  $\varphi_{\partial 0}$  – кути повороту ексцентрикового вала і диска відносно власних осей;  $x_{\partial}$  – радіальне переміщення дисків;  $m_{EB}$  і  $m_{CP(KP)}$  – маси ЕВ середнього і крайнього дисків;  $I_{EB}$  – момент інерції ЕВ відносно власної осі;  $I_{\partial 0}$  і  $I_{\partial \Pi}$  – моменти інерції диска відносно власної осі й осі ЕВ (відповідно);  $j_{KP}^{GX}$  – крутильна жорсткість генератора хвиль;  $e$  – ексцентриситет установки дисків відносно осі ЕВ.

Параметри  $\varphi_{\partial 0}$  і  $x_{\partial}$  (див. рис. 2) можна визначити як:

© М. В. Маргуліс, О. Г. Приймаков, Ю. О. Градиський, О. Г. Янчик

$$\varphi_{\partial 0} = \varphi_{EB} \left( 1 + \frac{2e}{d_{\partial}} \right), \quad (1)$$

$$x_{\partial} = 2\omega_0 \sin^2 \varphi_{EB}, \quad (2)$$

де  $\omega_0$  – максимальна амплітуда переміщень точок поверхні ГЗК при деформуванні його ГХ овалоподібної форми [3–5].

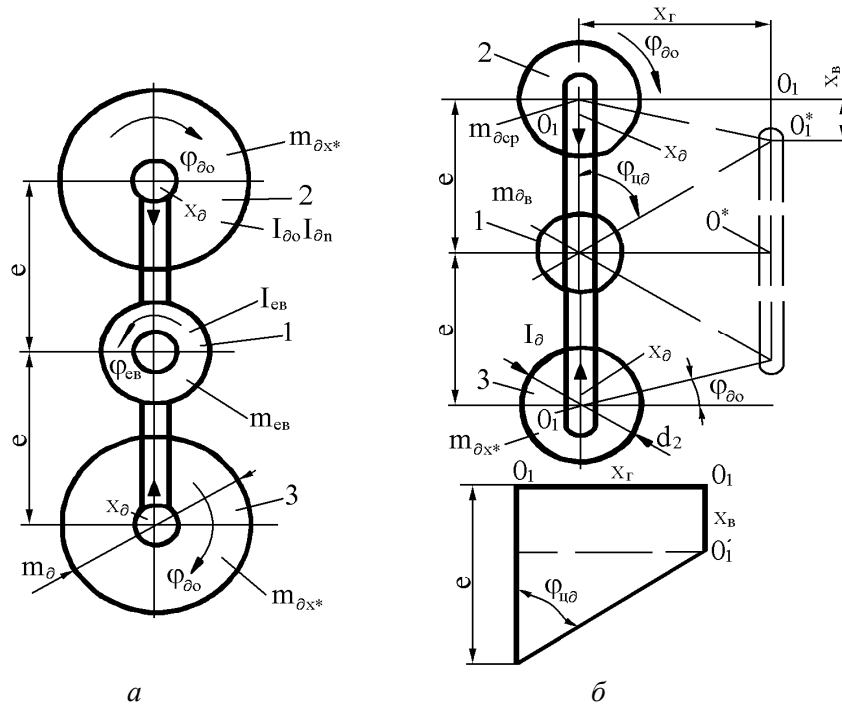


Рис. 2. Розрахункові динамічні схеми для аналізування власних крутильних (а) і поперечних (б) коливань дискового генератора хвиль хвильової зубчастої передачі

Для малих значень кута  $\varphi_{EB}$  величину  $\sin^2 \varphi_{EB}$  можна замінити величиною  $\varphi_{EB}$  і формулу (2) представити так:

$$x_{\partial} = A \varphi_{EB}, \quad (3)$$

де  $A = 2\omega_0$ .

Розглянемо кінетичну  $T_{KP}^{GX}$  і потенційну  $\Pi_{KP}^{GX}$  енергії ланок ГХ. Кінетичну енергію можна представити формулою

$$T_{KP}^{GX} = \frac{I_{EB} \dot{\varphi}_{EB}^2}{2} + 2I_{\partial 0} \dot{\varphi}_{EB}^2 + \frac{2I_{\partial 0} \varphi_{\partial 0}^2}{2} + \frac{2m_{\partial}(CP, KP) x_{\partial}^2}{2}. \quad (4)$$

Після підставлення значень  $\varphi_{\partial 0}$  (1) і  $x_{\partial}$  (2) та перетворень формулу (4) можна записати так:

$$T_{KP}^{GX} = 0,5 I_{EB} \dot{\varphi}_{EB}^2 + 0,5 I_{\partial 0} \dot{\varphi}_{EB}^2 + 0,5 I_{\partial \Pi} \left( 1 + \frac{2e}{d_{\partial}} \right)^2 \dot{\varphi}_{EB}^2 + 0,5 m_{\partial} A^2 \dot{\varphi}_{EB}^2. \quad (5)$$

Потенційну енергію деформації ланок генератора запишемо у вигляді

$$\Pi_{KP}^{GX} = 0,5 C_{\varphi}^{GX} \varphi_{EB}^2 = j_{KP}^{GX} \varphi_{EB}^2, \quad (6)$$

де  $C_{\varphi}^{GX}$  – пружні сили деформації ланок ГХ.

Для динамічного аналізу використаємо рівняння Лагранжа другого роду в часткових похідних:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}. \quad (7)$$

Після визначення часткових похідних, диференціювання складників рівняння (7) та підставлення їх значень, одержимо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{KP}^{GX}}{\partial \dot{\varphi}} &= \left[ I_{EB} + I_{\partial 0} + I_{\partial \Pi} \left( 1 + \frac{2e}{d_{\partial}} \right)^2 + m_{\partial} A^2 \right] \dot{\varphi}_{EB}; \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_{KP}^{GX}}{\partial \dot{\varphi}} \right) &= \left[ I_{EB} + I_{\partial 0} + I_{\partial \Pi} \left( 1 + \frac{2e}{d_{\partial}} \right)^2 + m_{\partial} A^2 \right] \ddot{\varphi}_{EB}; \\ \frac{\partial T_{KP}^{GX}}{\partial \varphi} &= 0; \quad \frac{\partial \Pi_{KP}^{GX}}{\partial \varphi} = C_{\varphi} \varphi_{EB} = j_{KP}^{GX} \varphi_{EB}. \end{aligned}$$

Після відповідних підстановок і перетворень складників рівняння (7) матиме такий вигляд:

$$\left[ I_{EB} + I_{\partial 0} + I_{\partial \Pi} \left( 1 + \frac{2e}{d_{\partial}} \right)^2 + m_{\partial} A^2 \right] \ddot{\varphi}_{EB} + j_{KP}^{GX} \varphi_{EB} = 0.$$

Закон зміни кута  $\varphi_{EB}$  для овалоподібної форми генератора хвиль, відповідно до результатів експериментальних досліджень [1, 2], приймаємо у вигляді:

$$\varphi_{EB} = \varphi_0 \sin \omega_{KP} t, \quad (8)$$

де  $\varphi_0$  і  $\omega_{KP}$  – амплітуда і кругова частота коливань кута  $\varphi_{EB}$ ;  $t$  – поточний час.

Першу і другу похідну від кута  $\varphi_{EB}$  запишемо так:

$$\dot{\varphi}_{EB} = \omega_{KP} \varphi_0 \cos \omega_{KP} t; \quad \ddot{\varphi}_{EB} = -\omega_{KP}^2 \varphi_0 \sin \omega_{KP} t.$$

Після підставлення значень параметрів  $\varphi_{EB}$ ,  $\dot{\varphi}_{EB}$ ,  $\ddot{\varphi}_{EB}$  у рівняння (7) і деяких перетворень маємо:

$$\omega_{KP}^2 = \left[ I_{EB} + I_{\partial 0} + I_{\partial \Pi} \left( 1 + \frac{2e}{d_{\partial}} \right)^2 + m_{\partial} A^2 \right] = j_{KP}^{GX}. \quad (9)$$

Тоді кругова частота може бути визначена як

$$\omega_{KP} = \pm \sqrt{\frac{j_{KP}^{GX}}{I_{EB} + I_{\partial 0} + I_{\partial \Pi} \left( 1 + \frac{2e}{d_{\partial}} \right)^2 + m_{\partial} A^2}}. \quad (10)$$

Частоту власних крутильних коливань ГХ з урахуванням формули (10) можна визначити за формулою

$$f_{KP} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{j_{KP}^{GX}}{I_{EB} + I_{\partial 0} + I_{\partial \Pi} \left( 1 + \frac{2e}{d_{\partial}} \right)^2 + m_{\partial} A^2}}. \quad (11)$$

Розглянемо методику визначення власних поперечних коливань ГХ. На рис. 2, б представлена розрахункова схема для аналізування цих коливань ГХ, де  $x_B$ ,  $x_G$ ,  $\varphi_{\zeta\delta}$  – відповідно вертикальне, горизонтальне і кутове переміщення центрів дисків.

Еквівалентний кут повороту диска відносно власної осі  $\varphi_{\delta 0}$  можна виразити (див. рис. 2) формулою

$$\varphi_{\delta 0} = \varphi_{\zeta\delta} \left( 1 + \frac{2e}{d_\delta} \right). \quad (12)$$

При цьому, враховуючи, що: 1)  $\operatorname{tg} \varphi_{\zeta\delta} = \frac{x_G}{e - x_B}$ ; 2) для малих значень  $\varphi_{\zeta\delta}$  можна вважати  $\operatorname{tg} \varphi_{\zeta\delta} \approx \varphi_{\zeta\delta}$ ; 3) величина  $x_B$  мала (в межах зазору в підшипниках диска), можна прийняти з малою погрішністю  $\varphi_{\zeta\delta} \approx \frac{x_G}{e}$  [6, 7].

Підставивши це значення  $\varphi_{\zeta\delta}$  у формулу (12), одержимо:

$$\varphi_{\delta 0} = x_G \left( \frac{1}{e} + \frac{2}{d_\delta} \right). \quad (13)$$

З урахуванням отриманих виразів запишемо формули кінетичної і потенційної енергій для поперечних коливань ГХ у вигляді:

$$\left. \begin{aligned} T_{\text{ПОП}}^{\text{ГХ}} &= \left( \frac{m_{\delta\text{СР}} + 2m_{\delta\text{КР}}}{2} \right) \dot{x}_G^2 + \frac{m_{\text{ЕВ}} \dot{x}_G^2}{2} + \frac{(2I_{\delta\text{КР}} + I_{\delta\text{СР}})}{2} = \\ &= \dot{x}_G^2 (m_{\delta\text{СР}} + 2m_{\delta\text{КР}} + 2m_{\text{ЕВ}}) + \frac{(2I_{\delta\text{КР}} + I_{\delta\text{СР}})}{2} \left( \frac{1}{e} + \frac{2}{d_\delta} \right)^2; \\ \Pi_{\text{ПОП}}^{\text{ГХ}} &= 2 \left( \frac{j_{\text{ПОП}}^{\text{ГХ}} x^2}{2} \right) = j_{\text{ПОП}}^{\text{ГХ}} x_\delta = j_{\text{ПОП}}^{\text{ГХ}} \left( \frac{A}{e} \right)^2 x_G^2. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

де  $x_\delta = A \varphi_{\text{ЕВ}} = \frac{A}{e} x_G$ ;  $A = 2\omega_0$ ;  $j_{\text{ПОП}}^{\text{ГХ}}$  – згинна жорсткість ГХ.

Для динамічного аналізу використаємо рівняння Лагранжа другого роду:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_G} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_G} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_G}. \quad (15)$$

Потім виражаємо члени рівняння (15) у такому вигляді [8, 9]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{\text{ПОП}}^{\text{ГХ}}}{\partial x_G} &= \dot{x}_G \left[ m_{\delta\text{СР}} + 2m_{\delta\text{КР}} + m_{\text{ЕВ}} + (2I_{\delta\text{КР}} + I_{\delta\text{СР}}) \left( \frac{1}{e} + \frac{2}{d_e} \right) \right]; \\ \frac{\partial T_{\text{ПОП}}^{\text{ГХ}}}{\partial x_G} &= \varphi_{\zeta\delta}; \quad \frac{\partial \Pi_{\text{ПОП}}^{\text{ГХ}}}{\partial x_G} = 2 j_{\text{ПОП}}^{\text{ГХ}} \left( \frac{A}{e} \right)^2 x_G. \end{aligned}$$

Закон руху ГХ запишемо, як і при аналізі крутильних коливань, у вигляді

$$x_G = \omega_0 \sin \omega_{\text{ПОП}} t. \quad (16)$$

Після обчислення першої і другої похідних від  $x_G$  за формулою (16), одержимо:

$$\dot{x}_G = \omega_{\text{ПОП}} \omega_0 \cos \omega_{\text{ПОП}} t; \quad \ddot{x}_G = -\omega_{\text{ПОП}}^2 \omega_0 \sin \omega_{\text{ПОП}} t.$$

Підставивши отримані вирази в рівняння (14), одержимо:

$$\left[ m_{\partial CP} + 2m_{\partial KP} + m_{EB} + (2I_{\partial KP} + I_{\partial CP}) \left( \frac{1}{e} + \frac{2}{d_{\partial}} \right) \right] = \omega_{\text{ПОП}}^2 \omega_0 \sin \omega_{\text{ПОП}} t + 2j_{\text{ПОП}}^{GX} \left( \frac{A}{e} \right)^2 \omega_0 \sin \omega_{\text{ПОП}} t = 0. \quad (17)$$

З формули (17) одержимо вираз для визначення кругової частоти поперечних коливань ГХ у вигляді

$$\omega_{\text{ПОП}} = \sqrt{\frac{2j_{\text{ПОП}}^{GX} \left( \frac{A}{e} \right)^2}{m_{\partial CP} + 2m_{\partial KP} + m_{EB} + (2I_{\partial KP} + I_{\partial CP}) \left( \frac{1}{e} + \frac{2}{d_{\partial}} \right)^2}}. \quad (18)$$

Частота власних поперечних коливань ГХ може бути визначена з урахуванням виразу (18) за формулою

$$f_{\text{ПОП}}^{GX} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2j_{\text{ПОП}}^{GX} \left( \frac{A}{e} \right)^2}{m_{\partial CP} + 2m_{\partial KP} + m_{EB} + (2I_{\partial KP} + I_{\partial CP}) \left( \frac{1}{e} + \frac{2}{d_{\partial}} \right)^2}}. \quad (19)$$

Допустимість використання формул (11) і (19) для визначення параметрів  $f_{KP}^{GX}$  і  $f_{\text{ПОП}}^{GX}$  на прикладі ГХ ХЗП привода конвертора була підтверджена експериментально за методикою [1]. Розрахункові значення склали  $f_{KP}^{GX} = 0,92$  Гц і  $f_{\text{ПОП}}^{GX} = 0,226$  Гц, а експериментальні:  $f_{KP}^{GX} = 1,07$  Гц і  $f_{\text{ПОП}}^{GX} = 0,258$  Гц, тобто збіжність їх задовільна.

### Висновок

Отримані залежності для визначення частот власних крутильних і поперечних коливань можуть бути використані на стадії проектування СХЗП з метою прогнозування резонансу частот власних коливань збурюючих сил і його виключення.

### Список використаних джерел

1. Маргулис, М. В. Методика определения низших частот собственных колебаний гибких звеньев высокомоментных волновых зубчатых передач [Текст] / М. В. Маргулис // Вестник машиностроения. – 1986. – № 11. – С. 11–14.
2. Маргулис, М. В. Создание, исследование и внедрение унифицированных приводов с волновыми зубчатыми передачами для тяжёлых машин [Текст] / М. В. Маргулис // Вклад науки в повышение надёжности и долговечности машин и сооружений. – К. : Наукова думка, 1990. – С. 78–79.
3. Приймаков, А. Г. Теория и конструирование силовых волновых зубчатых передач [Текст] : монография / А. Г. Приймаков, Ю. С. Воробьев, Г. А. Приймаков. – Х. : Оберіг, 2010. – 382 с.
4. Приймаков, А. Г. Расчет и проектирование герметичных силовых волновых зубчатых передач [Текст] : монография / А. Г. Приймаков, Г. А. Приймаков, Н. П. Швырёв. – Х. : Оберіг, 2010. – 112 с.
5. Приймаков, О. Г. Розрахунок та проектування силових хвильових зубчастих передач [Текст] / О. Г. Приймаков. – Х. : ХУПС ім. І. Кожедуба, 2004. – 216 с.
6. Полетучий, А. И. Теория и конструирование высокоэффективных волновых зубчатых механизмов [Текст] / А. И. Полетучий. – Х. : НАКУ ХАИ им. Н. Жуковского, 2005. – 675 с.
7. Маргулис, М. В. Расчет крутильной жесткости силовой волновой передачи с дисковым генератором волн [Текст] / М. В. Маргулис, Д. П. Волков // Вестник машиностроения. – 1987. – № 6. – С. 17–20.
8. Янабэ, С. Жёсткость волновых редукторов при кручении [Текст] / С. Янабэ, Т. Ямагути // Нихон кикай таккай ромбунсю. Токио. Япония. – 2003. – Т. 5 – № 509. – С. 216–221.
9. Harmonic drive / USM Corp. – Machine design, 2000. – Boston: USM Corp., 3.a. – P. 64–70.

Стаття надійшла до редакції 05.09.2013 р.