

УДК 631.356.43

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ РУХУ БУЛЬБИ КАРТОПЛІ ПО ПОВЕРХНІ СПІРАЛЬНОГО СЕПАРАТОРА

Булгаков В.М

Національний університет біоресурсів і природокористування України

Борис М.М

Подільський державний аграрно-технічний університет

Франчак Ян

Коренко Марош

Словацький аграрний університет, м. Нітра

Приведены новые теоретические исследования процесса сепарации картофельного вороха. Аналитически рассмотрено движение одиночного клубня по спиральной поверхности сепаратора. Построена математическая модель процесса сепарации и определён основной фактор, влияющий на движение клубней без проскальзывания.

We present new theoretical studies of the separation process the potato pile. The motion is analytically a single tuber along the spiral surface of the separator. A mathematical model of the separation process and the main factor influencing the movement of tubers without slipping.

Постановка проблеми

При збиранні вороху бульбоплодів картоплі важливе місце посідає операція сепарування. Вказана операція напряму впливає на кінцеву якість зібраної картоплі. Найменших пошкоджень бульби картоплі зазнають при русі по робочих поверхнях сепараторів без проковзування. Оскільки, в подальшому, картоплю необхідно зберегти з мінімальними втратами, то такий показник якості, як пошкодження бульб є вкрай важливим. [2, 3, 4]

Таким, чином обґрунтування конструктивно-технологічних параметрів картопляного сепаратора, при яких забезпечується рух бульб без проковзування є актуальним науковим завданням.

Аналіз останніх досліджень та публікацій

Загальні питання руху частинки по поверхні спірального сепаратора досить детально розглянуті в працях відомого вченого в галузі землеробської механіки академіка П. М. Василенка [1], методичне використання яких з уточненням для певних умов дозволить отримати математичну модель руху тіла (бульби картоплі) по гвинтовій поверхні розробленої нами конструкції спірального сепаратора [2].

Постановка завдання

Основними завданнями даного дослідження є побудова математичної моделі взаємодії одиничної бульби з спіральною поверхнею сепаратора.

Виклад основного матеріалу дослідження

При попередніх розрахунках руху тіла по поверхні спірального сепаратора, які дозволяють описати взаємодію тіла з робочою поверхнею, розглянемо відносний рух одиничного тіла. Для цього складемо, по-перше, еквівалентну схему (рис. 1), у вигляді спіралі, що обертається навколо нерухомої осі, при цьому на поверхні спіральної навивки радіусом R і кутом підйому гвинтової лінії γ знаходиться тіло (бульба) C радіусом r_0 . Припустимо, що початкова швидкість цього тіла, тобто швидкість при попаданні на поверхню спірального сепаратора, буде дорівнювати нулю. При цьому на тіло C будуть діяти такі сили:

\bar{G} - сила тяжіння тіла, яке в рухомій системі координат рухається із кутовою швидкістю ω :

$$G = mg,$$

де: m – маса тіла,

$g = 9,81 \text{ м/с}^2$ - прискорення вільного падіння;

\bar{N} - сила нормальної реакції поверхні спіральної навивки, яка направлена по нормалі до траєкторії відносного руху тіла по спіралі;

\bar{F} - сила тертя ковзання тіла по поверхні спіральної навивки і направлена проти напрямку відносного руху тіла. Визначається за формулою

$$F = fN$$

де f – коефіцієнт тертя ковзання тіла по матеріалу спіральної навивки.

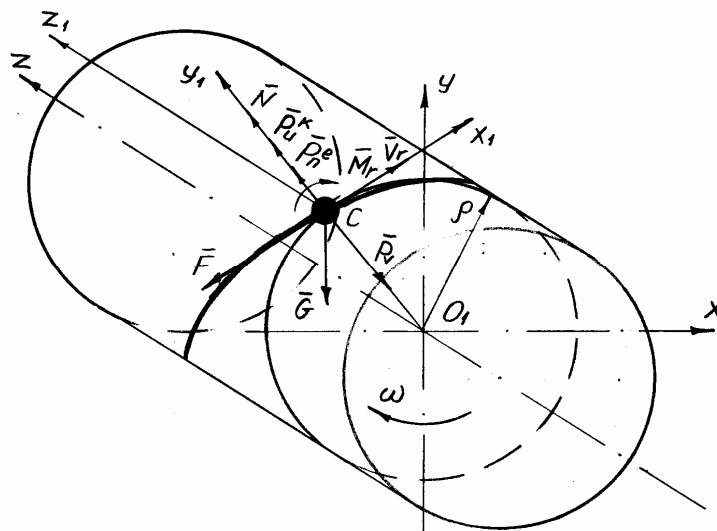


Рис. 1. Еквівалентна схема взаємодії одиничної бульби з спіральною поверхнею циліндричного сепаратора

Для бульб картоплі можна прийняти (за умови металевої спіральної поверхні $f = 0,2 \text{ К } 0,3$) [3];

\bar{P}_n^e - відцентрова сила інерції, яка напрямлена по нормалі до траєкторії руху:

$$P_n^e = m\omega^2 \rho$$

де ρ - радіальний параметр положення центру ваги тіла відносно вісі спіралі;

\bar{P}_u^k - коріолісова сила інерції, яка напрямлена по нормалі до траєкторії відносного руху, протилежно напрямку коріолісового прискорення:

$$P_u^k = 2m\omega V \sin(\omega, V);$$

де \bar{P}_V - сила активної дії вороху на спіральний сепаратор, що призводить до згину спіралі (згинальна сила);

\bar{M}_r - момент сили тертя кочення, який визначається так:

$$M_r = \delta N$$

де $\delta = r_0 \tan \mu$ - коефіцієнт тертя кочення, μ - кут тертя кочення.

Загальний вигляд векторного рівняння руху бульби картоплі по поверхні спіралі матиме такий вигляд [6]

$$m\bar{W} = \bar{G} + \bar{N} + \bar{F} + \bar{P}_n^e + \bar{P}_u^k + \bar{P}_V, \quad (1)$$

де \bar{W} - прискорення руху по поверхні спірального вальця.

У нерухомій системі координат O_1xyz вісь O_1z співпадає із віссю спіралі, а вісь O_1x направлена в сторону руху до сусідньої спіралі. Рухому систему координат $Cx_1y_1z_1$ пов'яжемо з центром ваги бульби C_1 .

Рух центра бульби опишеться наступними рівняннями, виходячи із загального векторного рівняння:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= -(P_n^e + N + P_u^k - P_V) \cos(x, n) - F \cos(x, V), \\ m\ddot{y} &= (P_n^e + N + P_u^k - P_V) \cos(y, n) - F \cos(y, V) - G. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Крім того, запишемо рівняння моментів обертання бульби навколо власної вісі. Воно буде мати такий вигляд

$$I\ddot{\theta} = M_r - Fr_0, \quad (3)$$

де I - момент інерції тіла відносно центру його ваги. Для сферичного тіла момент інерції буде дорівнювати [4]

$$I = \frac{2}{5} mr_0^2$$

$\ddot{\theta}$ - кутове прискорення руху тіла;

Направляючі косинуси $\cos(x, n)$, $\cos(y, n)$, які входять до системи рівнянь (2) визначаються такими залежностями [1]

$$\cos(x, n) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\Delta f}, \quad \cos(y, n) = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\Delta f},$$

де $\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}$ - модуль градієнта; $f = f(x, y, z)$ - рівняння в'язі, яке

відповідає рівнянню поверхні спіральної навивки. Для циліндричної спіралі із зовнішнім

діаметром $2R$, виготовленої із прутка круглого перерізу, радіуса r з кроком навивки S , рівняння функції одиничного градієнту (відповідно рівняння в'язі) має наступний вигляд [5]

$$f = \frac{S^2}{4\pi^2} \left[\frac{x \sin \frac{2\pi z}{S} - y \cos \frac{2\pi z}{S}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right] \cos \left(\frac{S}{2\pi\sqrt{x^2 + y^2}} \right) + \left(\sqrt{x^2 + y^2} - R \right)^2 - r^2 = 0. \quad (4)$$

Якщо продиференціювати рівняння в'язі і підставити в нього відповідні формули з кінематичного аналізу отримаємо такі значення похідних

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{4} \cdot \frac{S^2}{\pi^2} \cdot \frac{\sin(\psi)}{R+e} \cdot \cos \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{S}{\pi \cdot (R+e)} \right] + 2e \cdot \cos(\psi), \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -\frac{1}{4} \cdot \frac{S^2}{\pi^2} \cdot \frac{\cos(\psi)}{R+e} \cdot \cos \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{S}{\pi \cdot (R+e)} \right] + 2e \cdot \sin(\psi), \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{S}{\pi} \cdot \cos \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{S}{\pi \cdot (R+e)} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\text{Звідки } \Delta f = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{S^2}{\pi^2} \cos^2 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{S}{\pi(R+e)} \right) \cdot \left[\frac{S^2}{4\pi^2(R+e)^2} + 1 \right] + 4e^2}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \cos(x, n) &= \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{S^2}{\pi^2} \cdot \frac{\sin(\psi)}{R+e} \cdot \cos \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{S}{\pi \cdot (R+e)} \right] + 2e \cdot \cos(\psi)}{\sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{S^2}{\pi^2} \cos^2 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{S}{\pi(R+e)} \right) \cdot \left[\frac{S^2}{4\pi^2(R+e)^2} + 1 \right] + 4e^2}}, \\ \cos(y, n) &= -\frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{S^2}{\pi^2} \cdot \frac{\cos(\psi)}{R+e} \cdot \cos \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{S}{\pi \cdot (R+e)} \right] + 2e \cdot \sin(\psi)}{\sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{S^2}{\pi^2} \cos^2 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{S}{\pi(R+e)} \right) \cdot \left[\frac{S^2}{4\pi^2(R+e)^2} + 1 \right] + 4e^2}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Направляючі косинуси $\cos(\mathcal{X}/V)$, $\cos(\mathcal{Y}/V)$ шукають згідно таких виразів

$$\begin{aligned} \cos(\mathcal{X}/V) &= \frac{\mathcal{X}}{V} = \frac{\mathcal{X}}{\sqrt{\mathcal{X}^2 + \mathcal{Y}^2 + \mathcal{Z}^2}}, \\ \cos(\mathcal{Y}/V) &= \frac{\mathcal{Y}}{V} = \frac{\mathcal{Y}}{\sqrt{\mathcal{X}^2 + \mathcal{Y}^2 + \mathcal{Z}^2}}. \end{aligned}$$

Після підстановки знайдених складових в систему диференціальних рівнянь (2) отримаємо

$$\left. \begin{aligned}
 m\ddot{x} &= -(m\omega^2\rho + N + 2m\omega V \sin(\omega, V) - P_v) \times \\
 &\times \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{S^2}{\pi^2} \cdot \frac{\sin(\psi)}{R+e} \cdot \cos\left[\frac{1}{2} \cdot \frac{S}{\pi \cdot (R+e)}\right] + 2e \cdot \cos(\psi)}{\sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{S^2}{\pi^2} \cos^2\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{S}{\pi(R+e)}\right) \cdot \left[\frac{S^2}{4\pi^2(R+e)^2} + 1\right] + 4e^2}} - N \frac{\ddot{x}}{\sqrt{\ddot{x} + \ddot{x} + \ddot{x}}}, \\
 m\ddot{y} &= -(m\omega^2\rho + N + 2m\omega V \sin(\omega, V) - P_v) \times \\
 &\times \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{S^2}{\pi^2} \cdot \frac{s \cos(\psi)}{R+e} \cdot \cos\left[\frac{1}{2} \cdot \frac{S}{\pi \cdot (R+e)}\right] + 2e \cdot \sin(\psi)}{\sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{S^2}{\pi^2} \cos^2\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{S}{\pi(R+e)}\right) \cdot \left[\frac{S^2}{4\pi^2(R+e)^2} + 1\right] + 4e^2}} - \\
 &- fN \frac{\ddot{x}}{\sqrt{\ddot{x} + \ddot{x} + \ddot{x}}} - G, \\
 I\ddot{\theta} &= Nr_0 \operatorname{tg} \mu - fNr_0.
 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

При цьому можна вважати, що $\sin(\omega, V) = \sin(90^\circ - \gamma) = \cos \gamma$.

При встановленому русі всі точки тіла (і особливо точки дотику тіла з поверхнею спірального сепаратора) зберігають постійне значення швидкості. Тому у рівняння системи (7) можемо підставити $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 0$.

Тоді система рівнянь (7) набуде такого вигляду

$$\left. \begin{aligned}
 &-(m\omega^2\rho + N + 2m\omega V \sin(\omega, V) - P_v) \times \\
 &\times \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{S^2}{\pi^2} \cdot \frac{\sin(\psi)}{R+e} \cdot \cos\left[\frac{1}{2} \cdot \frac{S}{\pi \cdot (R+e)}\right] + 2e \cdot \cos(\psi)}{\sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{S^2}{\pi^2} \cos^2\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{S}{\pi(R+e)}\right) \cdot \left[\frac{S^2}{4\pi^2(R+e)^2} + 1\right] + 4e^2}} - \\
 &- fN \frac{\ddot{x}}{\sqrt{\ddot{x} + \ddot{x} + \ddot{x}}} = 0, \\
 &(m\omega^2\rho + N + 2m\omega V \sin(\omega, V) - P_v) \times \\
 &\times \frac{-\frac{1}{4} \cdot \frac{S^2}{\pi^2} \cdot \frac{s \cos(\psi)}{R+e} \cdot \cos\left[\frac{1}{2} \cdot \frac{S}{\pi \cdot (R+e)}\right] + 2e \cdot \sin(\psi)}{\sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{S^2}{\pi^2} \cos^2\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{S}{\pi(R+e)}\right) \cdot \left[\frac{S^2}{4\pi^2(R+e)^2} + 1\right] + 4e^2}} - \\
 &- fN \frac{\ddot{x}}{\sqrt{\ddot{x} + \ddot{x} + \ddot{x}}} - G = 0, \\
 I\ddot{\theta} &= Nr_0 \operatorname{tg} \mu - fNr_0.
 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

З перших двох рівнянь цієї системи визначимо нормальну реакцію поверхні

$$N = \frac{m \left[g + (\ddot{x}\rho + 2\omega V \cos \gamma) \cos \psi \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + 4\pi^2(R+e)^2}} \right]}{\cos \psi \left(\frac{f(R+e)}{\sqrt{(R+e)^2 + \frac{S^2}{4\pi^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1 + 4\pi^2(R+e)^2}} \right)}. \quad (9)$$

Отримане значення нормальної реакції поверхні підставимо в третє рівняння системи. Після цього проведемо деякі математичні перетворення, в результаті чого отримаємо вираз кутового прискорення бульби навколо власної вісі

$$\ddot{\varphi} = \frac{2,5(r_0 \operatorname{tg}(\mu) - f\rho)g\sqrt{(R+e)^2 + \frac{S^2}{4\pi^2}}}{r_0^2(R+e) \cdot f \cdot \left[\frac{-\frac{1}{4} \cdot \frac{S^2}{\pi^2} \cdot \frac{\cos(\psi)}{R+e} \cdot \cos\left[\frac{1}{2} \cdot \frac{S}{\pi \cdot (R+e)}\right] + 2e \cdot \sin(\psi)}{\frac{1}{4} \cdot \frac{S^2}{\pi^2} \cdot \frac{\sin(\psi)}{R+e} \cdot \cos\left[\frac{1}{2} \cdot \frac{S}{\pi \cdot (R+e)}\right] + 2e \cdot \cos(\psi)} - \cos(\psi) \right]}, \quad (10)$$

при $\psi = \omega \cdot t$.

Проінтегруємо отриманий вираз по часу, при цьому отримуємо вираз кутової швидкості тіла навколо власної вісі при його русі по поверхні спірального сепаратора

$$\dot{\varphi} = \int \frac{2,5(r_0 \operatorname{tg}(\mu) - f\rho)g\sqrt{(R+e)^2 + \frac{S^2}{4\pi^2}}}{r_0^2(R+e) \cdot f \cdot \left[\frac{-\frac{1}{4} \cdot \frac{S^2}{\pi^2} \cdot \frac{\cos(\psi)}{R+e} \cdot \cos\left[\frac{1}{2} \cdot \frac{S}{\pi \cdot (R+e)}\right] + 2e \cdot \sin(\psi)}{\frac{1}{4} \cdot \frac{S^2}{\pi^2} \cdot \frac{\sin(\psi)}{R+e} \cdot \cos\left[\frac{1}{2} \cdot \frac{S}{\pi \cdot (R+e)}\right] + 2e \cdot \cos(\psi)} - \cos(\psi) \right]} dt. \quad (11)$$

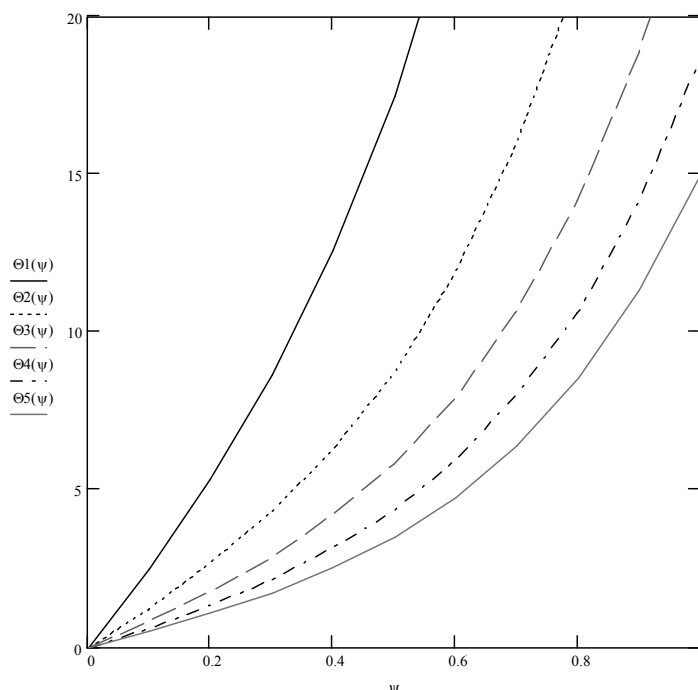


Рис. 2. Зміна кутової швидкості обертання бульби при зміні кутової координати від 0 до 1 рад для кутових швидкостей спіралей ω : 10. 20. 30. 40. 50 рад/с

- 1) $R=75$ мм, $e=10$ мм, $S=35$ мм; 2) $R=100$ мм, $e=10$ мм, $S=35$ мм; 3) $R=75$ мм, $e=15$ мм, $S=35$ мм; 4) $R=75$ мм, $e=10$ мм, $S=45$ мм.

Внаслідок складності інтегрування даного виразу проведемо його графічне інтегрування [4]. При цьому прийемо радіус бульби $r_0=25$ мм, радіус спіралі $R=75$ мм,

крок навивки спіралі $S=30$ мм, ексцентриситет закріплення спіралей $e=10$ мм, радіальний параметр розміщення бульби відносно власної вісі обертання $\rho=20$ мм, коефіцієнт тертя ковзання $f=0,55$, кут тертя кочення $\mu=17$ градус (або $0,297$ рад). По отриманих даних побудуємо графіки зміни кутової швидкості руху бульби при зміні кутової координати від 0 до 1 рад для кутових швидкостей спіралей $\omega: 10, 20, 30, 40, 50$ рад/с.

Як показують отримані графіки (рис.2) із зростанням кутової швидкості спіралі кутова швидкість обертання бульби навколо власної вісі зменшується наближаючись до нуля, тобто до умови руху тіла без перекочування.

Вплив деяких конструктивних параметрів спірального сепаратора проведемо проаналізувавши графіки залежностей кутової швидкості руху бульби при зміні кутової координати від 0 до 1 рад для кутової швидкості спіралей 40 рад/с при змінних параметрах: (інші параметри залишалися сталими і мали значення як і в попередньому випадку):

Отримані графіки (рис. 3) свідчать про вплив на кутову швидкість обертання тіла відносно власної вісі радіуса спіралі (крива 2), ексцентриситету закріплення спіралей (крива 3) та кроку навивки (крива 4). При збільшенні перерахованих вище параметрів, кутова швидкість обертання тіла зменшується. Найбільший вплив на кутову швидкість тіла має зміна кроку навивки, а найменший – ексцентриситет. А, отже, з вище викладеного слід зауважити, що для досягнення мінімальної кутової швидкості обертання бульби слід збільшувати ці параметри.

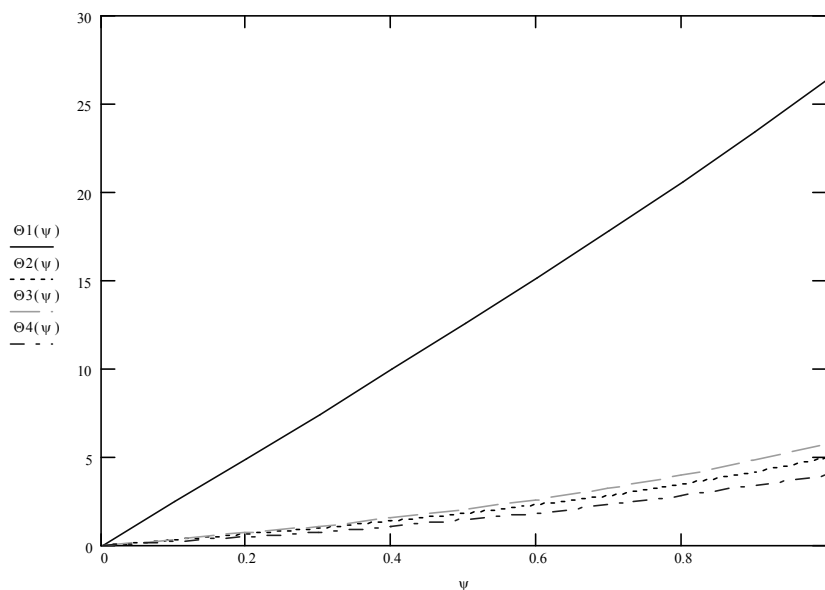


Рис. 3. Залежності кутової швидкості руху бульби при зміні кутової координати при кутовій швидкості спіралей 40 рад/с із врахуванням таких змінних параметрів:

- 1) $R=75$ мм, $e=10$ мм, $S=35$ мм; 2) $R=100$ мм, $e=10$ мм, $S=35$ мм; 3) $R=75$ мм, $e=15$ мм, $S=35$ мм; 4) $R=75$ мм, $e=10$ мм, $S=45$ мм.

Висновки

5. Отримана математична модель процесу сепарації, яка дозволяє встановити залежність пошкоджень бульб картоплі від конструктивно-технологічних параметрів спірального сепаратора.

6. Встановлено, що на пошкодження бульб коренеплодів найбільший вплив має зміна кроку навивки спіралі сепаратора.

Література

1. Василенко П.М. Введение в земледельческую механику.– Киев: Сільгоспосвіта, 1996.– 234 с.
2. Bulgakov V., Voytyuk D., Smolinskiy S., Frančák J., Jech J. Optimalizovanie konštrukcie rozdrúžovača zemiakov.– GRONECH NITRA 2001. Pol'nohospodárska technika na začiatku 21 storočia: Zborník z medzinárodnej vedeckej konferencie. / Slovenská pol'nohospodárska univerzita v Nitre. – Nitra, Slovenská republika, 2001.– p. 73-79.
3. Полегаев. В. И. Уборка и хранение картофеля // Картофель и овощи. –1984. – №8. – 13-14 с.
4. Гусев С.А., Капустин М.Н. Сохранить продукцию // Картофель и овощи. –1984. – №8. – 5 с.
5. Фильчаков П. Ф. Справочник по высшей математике / П. Ф. Фильчаков – К.: Наукова думка, 1974 – 743 с.
6. Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики: учебн. для высш. технич. заведений / С. М. Тарг – М.: Высш. шк., 1986. – 416 с.