

УДК 621.873.01

Ю. В. Човнюк*, М. Г. Діктерук**, К. І. Почка**

*Національний університет біоресурсів і природокористування України,

**Київський національний університет будівництва і архітектури

ХВИЛЬОВІ ЕФЕКТИ В УТОЧНЕНИХ РОЗРАХУНКАХ ДИНАМІЧНИХ НАВАНТАЖЕНЬ КРАНОВИХ МЕТАЛОКОНСТРУКЦІЙ ПРИ ПУСКУ/ГАЛЬМУВАННІ МОСТОВИХ КРАНІВ

© Човнюк Ю. В., Діктерук М. Г., Почка К. І., 2014

Наведені уточнені розрахунки динамічних навантажень кранових металоконструкцій мостових кранів у процесах їх пуску/гальмування. При цьому враховані можливі хвилеутворення у балці мостового крана при русі по ній вантажного візка, які призводять до появи (хвильових) сил опору.

Ключові слова: динамічні навантаження, мостовий кран, пуск, гальмування, вантажний візок.

The specified calculations for dynamic crane steel structures loadings of bridge cranes in processes of their start-up/braking are presented. Possible wave formations in a bridge crane beam when cargo truck driving on it are taken into consideration; they result into the emergence of (wave) resistance power.

Key words: dynamic loadings, bridge crane, start-up, braking, cargo truck.

Постановка проблеми. Під час роботи механізму пересування крана, який переміщується вздовж рейкового шляху, його елементи сприймають навантаження, обумовлені взаємодією механізму, приводу, металоконструкції, підкранового рейкового шляху та вантажу, що переміщується. Вони залежать як від конструктивних параметрів самого крана та підкранового шляху і їх відхилень від проектних значень, так і від деяких експлуатаційних показників (режиму керування краном під час пуску і гальмування, маси вантажу, який підіймається, положення вантажного візка у прольоті у разі пересування крана тощо). Під час складання схеми крана для визначення динамічних навантажень необхідно враховувати ті параметри крана та фізичні фактори, які найістотніше впливають на рівень його навантаження у конкретному розрахунковому випадку.

Всі зовнішні сили, крім постійних складових сил опору пересуванню крану, заздалегідь невідомі і повинні бути визначені з розв'язання рівнянь руху крана.

Для спрощення розрахункової схеми слід розглянути співвідношення між власними частотами коливань крана.

Теоретично динамічна система крана являє собою систему з нескінченним числом власних частот коливань. Визначення цих частот дає можливість досліднику зробити такі висновки:

1) найнижча власна частота системи майже не відрізняється від частоти маятникових коливань вантажу, наведеної у [1], яка обчислена у припущенні абсолютної жорсткості мосту і трансмісії;

2) друга власна частота системи дуже мало відрізняється від найнижчої власної частоти мосту;

3) третя власна частота системи практично збігається із власною частотою коливань абсолютно жорсткого мосту крана без вантажу відносно частин приводу, що обертається, та масою m_{np} , тобто з найнижчою власною частотою приводу механізму пересування.

Враховуючи першу особливість співвідношення між власними частотами кранової системи і у відповідності до висновків [1], під час розрахунків динамічних навантажень мосту і трансмісії крана, дію на міст підвішеного на канатах вантажу зазвичай оцінюють за допомогою горизонтальної складової натягу канатів, котра є відомою функцією часу.

Параметричний аналіз мостових кранів стандартних прольотів вантажопідіймальністю від 5 до 10 т показує, що найнижча частота власних коливань мосту в багато разів менша від частоти власних коливань приводу відносно мосту. Внаслідок цього пружні коливання механізму пересування незначно впливають на динамічні навантаження, що діють на металоконструкцію, і під час їх розрахунку можна не враховувати, на думку автора [1], податливість трансмісії механізму пересування. З цього висновку автора [1] не випливає, що під час розрахунку динамічних навантажень у трансмісії механізму пересування можна не враховувати пружні коливання металоконструкції.

Слід також зазначити таке. Під час розгляду та аналізу динаміки механізму пересування (вантажного візка) вздовж рейкового шляху мостового крана неминуче виникають хвильові процеси у балках мосту, які за зазначеного вище підходу ніяк не враховуються. Своєю чергою, такі хвильові процеси у балках за певних значень швидкості руху вздовж них вантажного візка викликають резонансні згинні коливання опори, що підвищує ризики перевантажень і передчасного руйнування та зношування цих балок. Тому ця проблема є актуальною у задачах розрахунку динамічних навантажень кранових металоконструкцій (зокрема під час врахування ефектів хвилеутворень) особливо при пуску/гальмуванні мостових кранів і вимагає подальшого всебічного обґрунтованого дослідження.

Аналіз публікацій по темі дослідження. Відомо [1], що механізми пересування мостових кранів загального призначення, зазвичай, мають привод від асинхронного двигуна з фазним ротором та системою ручного чи напівавтоматичного керування у період пуску. За нормального ступінчастого розгону приводний двигун розвиває деякий середньопусковий момент, величина якого становить 1,5–1,6 від номінального [2], причому він змінюється від деякого максимального до мінімального значення, що визначається типом двигуна та кулачкового чи магнітного контролера. Отже, під час розрахунків динамічних навантажень, взагалі кажучи, необхідно брати до уваги залежності рушійного моменту від кутової швидкості ротора двигуна та опорів роторних резисторів. На думку автора [1], одночасно у розрахунковій схемі необхідно детальніше враховувати дисипативні сили як механізму пересування, так і кранової металоконструкції. У зв'язку з відсутністю достовірної інформації про експериментальні значення коефіцієнтів демпфування, а для кранової системи ці коефіцієнти теоретично визначити неможливо у зв'язку з численними конструктивними елементами, у яких виникають втрати енергії пружних коливань, враховувати дисипативні сили під час розрахунку максимальних динамічних навантажень немає ніякого сенсу [1]. Однак, враховуючи розбіжність значень параметрів двигунів та пускових резисторів, приймають, що $P_1 > P_2$, $P_{1,2} = const$ ($P_{1,2}$ – рушійне чи гальмівне зусилля відповідної сторони крана, котре для приводних двигунів у період пуску приймається постійним і таким, що дорівнює середнім пусковим зусиллям [1]).

Оскільки рух вантажного візка вздовж балки мостового крана є явним, він супроводжується нестационарними динамічними ефектами або самозбуджуваними коливаннями, для теоретичного опису яких повинні бути використані нетрадиційні підходи [3].

Питання про дію рухомого навантаження на пружну просторово розподілену конструкцію (континуальна модель) балки до нинішнього часу становить значний інтерес у дослідників, незважаючи на його давність. Диференціальне рівняння руху вантажу вздовж невагомої балки вперше отримав Дж. Стокс у 1849 р. У 1905 р. О.М. Крилов отримав розв'язок задачі для випадку, коли при визначенні динамічних прогинів балки враховуються і сили інерції, що діють на її елементи. Докладніший розв'язок цієї задачі отримав С.П. Тимошенко. Найбільш загальний випадок, коли під час аналізу системи не хнуть силами інерції, що діють як на вантаж, так і на балку, досліджений багатьма авторами. Історична довідка, яка відображає еволюцію теоретичного розуміння цієї проблеми, наведена у роботі [4]. У ній описані чотири варіанти постановки цієї задачі. У першому варіанті всі інерційні ефекти вважаються надзвичайно малими (тобто ними можна знехтувати) і тиск вантажу на балку приймають таким, що дорівнює силі ваги вантажу. Оскільки у цьому випадку “динамічність” процесу по суті не враховується, задача зводиться до

побудови так званих ліній впливу. У другому варіанті припускають, що маса пружної конструкції мала (і нею можна знехтувати), але сила тиску вантажу на конструкцію відрізняється від статичної [1]. Постановка задачі третього варіанта протилежна до попередньої: приймають, що динамічний ефект обумовлений силами інерції самої балки, а тиск вантажу на балку вважають, що дорівнює його силі ваги. Четвертий варіант є найбільш узагальненим. У ньому враховуються інерційні властивості як балки, так і вантажу. Отримані для цього випадку розв'язки будуються у вигляді рядів [4].

Автори [3] запропонували інший погляд на цю проблему, який відрізняється тим, що пропонується враховувати розривність розв'язку у місці контакту рухомого вантажу з пружною конструкцією і будувати його у формі ударної хвилі. Значення розривів на фронті цієї хвилі визначають сили взаємодії між вантажем та балкою. Оскільки швидкість руху вантажу (вантажного візка мостового крана в усталеному режимі функціонування) задана, то залучаючи додатково рівняння зміни кількості руху при переході через точку розриву та умови сумісності Адамара, можна отримати повну інформацію про динамічний процес. У цьому випадку розв'язок задачі шукають у класі кусково-гладких функцій із залученням для опису структури розриву вказаних додаткових інтегральних законів.

Під час конструювання підйомально-транспортних машин, на думку авторів цієї роботи, основним засобом прогнозування їх динамічної поведінки є чисельне моделювання на ПЕОМ, на шляху якого є значні труднощі: 1) постановка граничних задач, які коректно враховують сили взаємодії у рухомих зчленуваннях елементів машин; 2) розроблення методів їх розв'язання, які охоплюють вплив саме тих хвильових ефектів, котрі визначають динамічну поведінку машини.

Подолати труднощі постановок граничних задач дає змогу розвинутий у роботах [5–7] варіаційний підхід. У них, враховуючи варіаційний принцип Гамільтона-Остроградського, були знайдені коректні граничні умови у рухливому контакті і вперше отримане рівняння, що описує перетворення енергії вібрацій у енергію поступального руху. Посередником такого перетворення виступає сила тиску пружних хвиль.

Розробка адекватних методів розв'язання таких граничних задач вимагає виявлення і вивчення достатньо повного набору хвильових ефектів у пружних елементах кранових систем. Багато з хвильових ефектів: Доплера, Вавілова-Черенкова, гальмівне й перехідне випромінювання, хвилі Маха, хвильовий тиск тощо, добре вивчені у електродинаміці, оптиці, гідродинаміці та акустиці стосовно найпростіших систем, які описуються хвильовими рівняннями. У пружних системах, які описуються рівняннями у частинних похідних четвертого (згинні коливання стрижнів, пластин), шостого (коливання кілець, оболонок) порядків і вище, вони мають специфічні особливості прояву й вимагають подальшого вивчення з метою правильного їх врахування. Результати наведених вище робіт будуть використані у цьому дослідженні.

Мета роботи полягає у встановленні основних закономірностей динаміки системи “вантажний візок – канат – вантаж” мостових кранів у режимах їх пуску/гальмування, які дозволяють проводити уточнені розрахунки динамічних навантажень на кранові металоконструкції із врахуванням виникаючих хвилеутворень у пружних елементах.

Виклад основного матеріалу дослідження.

1. Розрахунок динамічних навантажень кранових металоконструкцій при пуску та гальмуванні мостових кранів, який враховує (рівномірний) рух вантажного візка вздовж балки.

Розглянемо пуск крана за розміщення вантажного візка у лівому крайньому положенні [1]. Для визначення переміщень будь-якої точки балки введемо дві системи координат: нерухому $x'Oy'$, у якій розглядається рух абсолютно жорсткого мосту (переносний рух), і рухому xOz , у якій розглядаються пружні коливання еквівалентної балки, котра замінює міст (відносний рух).

а) Рівняння переносного руху крана без врахування згинних коливань балки.

Припустимо, що при пуску крана у початковий момент вантаж нерухомий, тоді для постійних зусиль P_1 та P_2 (рушійні/гальмівні зусилля приводу відповідної сторони крана) натяг канатів, які

діють на міст у горизонтальній площині, буде змінюватись за законом [1] (збережені позначення зазначеної роботи):

$$T = T_a \cdot (1 - \cos \omega \cdot t), \quad T_a = \frac{(P_1 + P_2 - W_1 - W_2) \cdot m_{zp}}{m_{кр} + m_{zp}}, \quad \omega = \sqrt{\frac{(\tilde{m}_1 + \tilde{m}_2) \cdot g}{\tilde{m}_1 \cdot H}}, \quad m_{np} = m_1 + m_2 + \mu \cdot l, \quad (1)$$

де $W_{1,2}$ – сили опору пересуванню відповідної сторони крана, включаючи сили тертя з рейками реборд тих коліс, реборди котрих контактують з рейками; \tilde{m}_1 – маса вантажного візка; $\tilde{m}_2 \equiv m_{zp}$ – маса вантажу; m_{np} – маса частин механізму пересування однієї сторони крана, що обертаються; $m_1 = m_{к1} + m_{np}$, $m_{к1} = m_{к}$ – приведена маса кінцевих частин мосту і маса механізму пересування однієї сторони крана; H – довжина каната; l – довжина прольоту; μ – маса одиниці довжини еквівалентної балки; $g = 9,81 \frac{M}{c^2}$ – прискорення вільного падіння; $m_2 = m_{к2} + m_{np}$; $m_{к2}$ – приведена маса кінцевих частин мосту і маса механізму пересування другої сторони крана, $m_{к2} = m_{к} + \tilde{m}_1$; ($W_1 \neq W_2$; $P_1 \neq P_2$); t – час.

Рівняння переносного руху крана має вигляд [1]:

$$m_{кр} \cdot \ddot{x} = P_1 + P_2 - W_1 - W_2 - T_a \cdot (1 - \cos \omega \cdot t). \quad (2)$$

Звідси маємо прискорення за переносного руху:

$$\ddot{x} = j + j_a \cdot \cos \omega \cdot t, \quad (3)$$

де $j = \frac{P_1 + P_2 - W_1 - W_2 - T_a}{m_{кр}}$; $j_a = \frac{T_a}{m_{кр}}$.

b) Рівняння переносного руху крана із врахуванням згинних коливань балки методом розвинення у [3].

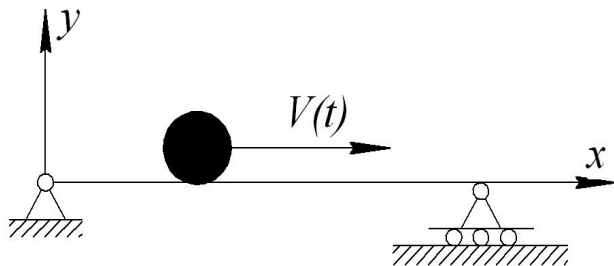


Рис. 1. Розрахункова схема під час руху візка по балці

Використовуючи підхід [3], розглянемо рух візка крана вздовж балки (еквівалентної). Будемо вважати, що вантажний візок масою $m_T \equiv \tilde{m}_1$ переміщується по горизонтальній балці із заданою швидкістю $V(t)$ (рис. 1). Його рух у вертикальному напрямку описується рівнянням:

$$\tilde{m}_1 \cdot \ddot{y} + \tilde{m}_1 \cdot g - P^* = 0, \quad (4)$$

де y – переміщення візка у відповідному напрямку; P^* – сила, з якою балка діє на візок. (Збережені позначення роботи [3]).

У рівнянні (4) необхідно перейти від функції $y(t)$, яка визначає координату y вантажного візка, до функції прогину балки $z(x, t)$. Для цього врахуємо, що вантажний візок у кожний момент часу займає нове положення на балці, тому його вертикальна швидкість:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} = \ddot{y} + z' \cdot V \quad (5)$$

складається з двох компонентів, які характеризують швидкість \dot{y} точки балки, у котрій перебуває вантажний візок, і швидкість z' зміни координати z балки, що обумовлена переміщенням візка у сусідню точку балки з іншим прогином. Зазначимо, що аналогічний спосіб обчислення повної похідної застосовується і в теорії поля, де оператор $\frac{d}{dt}$ має назву субстанціональної похідної за часом, $\frac{\partial}{\partial t}$ – оператор локальної похідної, а складова $z' \cdot V$ зв'язана з конвективною зміною польової величини.

Таким самим способом можна обчислити вертикальну складову повного прискорення вантажного візка:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \ddot{y} + 2 \cdot \dot{y} \cdot V + z' \cdot \dot{V} + z'' \cdot V^2. \quad (6)$$

Друга складова у правій частині цієї рівності (6) являє собою прискорення Кориоліса, оскільки z' – кут повороту, $\dot{\varphi}$ – кутова швидкість повороту елемента балки, V – відносна швидкість. Зрозумілим є й механічний зміст останньої складової (6), яка є прискоренням, спрямованим до осі балки.

Звідси отримаємо прискорення при переносному русі:

$$\ddot{y} = j + j_a \cdot \cos \omega \cdot t + \ddot{y} + 2 \cdot \dot{y} \cdot V + z' \cdot \dot{V} + z'' \cdot V^2, \quad (7)$$

або

$$\ddot{y} = j + j_a \cdot \cos \omega \cdot t + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial t \cdot \partial x} \cdot V + \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dV}{dt} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot V^2. \quad (8)$$

Відомо, що рівняння вільних коливань при згині балки постійного перерізу без урахування дисипативних сил має вигляд [2]:

$$E \cdot J \cdot \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + \mu \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0, \quad (9)$$

де z – пружне переміщення точок балки відносно осі, яку має балка до початку пуску крана; $E \cdot J$ – її згинна жорсткість.

Щоб скласти рівняння вимушених коливань розглядуваної балки при згині, слід у праву частину рівняння (9) записати всі зовнішні сили, що діють на балку згідно з розрахунковою схемою, до числа яких належать й сили інерції переносного руху:

$$E \cdot J \cdot \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + \mu \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -\mu \cdot \ddot{y} + (P_1 - W_1 - T_a + T_a \cdot \cos \omega \cdot t - m_1 \cdot \ddot{y}) \cdot \delta_1(x) + (P_2 - W_2 - m_2 \cdot \ddot{y}) \cdot \delta_1(x-l), \quad (10)$$

де $\delta_1(x)$ та $\delta_1(x-l)$ – імпульсні функції першого порядку, які мають розмірність m^{-1} (функція $\delta_1(x)$ в усіх точках, крім $x=0$, дорівнює нулю, при $x=0$ $\delta_1(x)=1$. Функція $\delta_1(x-l)$ в усіх точках, крім $x=l$, дорівнює нулю, при $x=l$ $\delta_1(x-l)=1$ [1]).

У подальшому розглядатимемо пуск кранової системи при $t > t_{\text{поз}}$ – термін часу, за який вантажний візок набирає значення усталеної швидкості руху вздовж рейкового шляху (тобто $V = \text{const}$). Тоді вираз (8) спрощується:

$$\ddot{y} = j + j_a \cdot \cos \omega \cdot t + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial t \cdot \partial x} \cdot V + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot V^2. \quad (11)$$

Використовуючи вираз (11), перепишемо рівняння (10) у вигляді:

$$E \cdot J \cdot \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + 2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial t \cdot \partial x} \cdot V + \mu \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot V^2 + \\ + m_1 \cdot \delta_1(x) \cdot \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial t \cdot \partial x} \cdot V + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot V^2 \right) + m_2 \cdot \delta_1(x-l) \cdot \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial t \cdot \partial x} \cdot V + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot V^2 \right) = \quad (12) \\ = -\mu \cdot (j + j_a \cdot \cos \omega \cdot t) + (N_1 + N_3 \cdot \cos \omega \cdot t) \cdot \delta_1(x) + (N_2 - N_4 \cdot \cos \omega \cdot t) \cdot \delta_1(x-l),$$

де $N_1 = P_1 - W_1 - m_1 \cdot j$; $N_2 = P_2 - W_2 - m_2 \cdot j$; $N_3 = T_a - m_1 \cdot j_a$; $N_4 = m_2 \cdot j_a$.

Рівняння (12) можна подати у такій формі після нескладних перетворень:

$$E \cdot J \cdot \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + (2 \cdot \mu + m_1 \cdot \delta_1(x) + m_2 \cdot \delta_1(x-l)) \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \\ + (2 \cdot \mu \cdot V + m_1 \cdot \delta_1(x) \cdot 2 \cdot V + m_2 \cdot \delta_1(x-l) \cdot 2 \cdot V) \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial t \cdot \partial x} + \\ + (\mu \cdot V^2 + m_1 \cdot \delta_1(x) \cdot V^2 + m_2 \cdot \delta_1(x-l) \cdot V^2) \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \\ = -\mu \cdot (j + j_a \cdot \cos \omega \cdot t) + (N_1 + N_3 \cdot \cos \omega \cdot t) \cdot \delta_1(x) + (N_2 - N_4 \cdot \cos \omega \cdot t) \cdot \delta_1(x-l). \quad (13)$$

Застосовуючи метод головних координат, тобто метод розкладу розв'язку за власними формами коливань, будемо шукати загальний розв'язок рівняння (13) у вигляді [1, 2]:

$$z(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(x) \cdot q_k(t), \quad (14)$$

де $U_k(x)$ – прогин балки при k -му коливанні; $q_k(t)$ – узагальнена координата; $k = 1, 2, 3, \dots$

Функцію $U_k(x)$, яка визначає форми згинних коливань прольотних балок мостового крана, як у [1], одержимо з розв'язання рівняння:

$$\frac{d^4 U_k(x)}{dx^4} - \alpha^4 \cdot U_k(x) = 0, \quad (15)$$

де $\alpha^4 = \frac{p^2 \cdot \mu}{E \cdot J}$; p – частота власних коливань розглядуваної динамічної системи.

Загальний розв'язок рівняння (15) можна подати у вигляді:

$$U_k(x) = C_{1k} \cdot K_1(\alpha \cdot x) + C_{2k} \cdot K_2(\alpha \cdot x) + C_{3k} \cdot K_3(\alpha \cdot x) + C_{4k} \cdot K_4(\alpha \cdot x), \quad (16)$$

де $C_{1k}, C_{2k}, C_{3k}, C_{4k}$ – постійні інтегрування, які визначаються з умов закріплення балки на її кінцях; $K_1(\alpha \cdot x), K_2(\alpha \cdot x), K_3(\alpha \cdot x), K_4(\alpha \cdot x)$ – функції О.М. Крилова [8].

Оскільки на кінцях балки мостового крана перерізувальні сили дорівнюють силам інерції мас m_1 та m_2 у їх відносному русі, а згинальні моменти дорівнюють добутку кутів пружного повороту розглядуваних перерізів на кутову жорсткість кінцевої балки, рівняння (15) будемо розв'язувати за таких граничних умов:

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{d^3 U_k}{dx^3} \right)_{x=0} &= \frac{m_2 \cdot p^2 \cdot U_k(0)}{E \cdot J}; & E \cdot J \cdot \left(\frac{d^2 U_k}{dx^2} \right)_{x=0} &= c \cdot \left(\frac{dU_k}{dx} \right)_{x=0}; \\ \left(\frac{d^3 U_k}{dx^3} \right)_{x=l} &= -\frac{m_1 \cdot p^2 \cdot U_k(l)}{E \cdot J}; & E \cdot J \cdot \left(\frac{d^2 U_k}{dx^2} \right)_{x=l} &= -c \cdot \left(\frac{dU_k}{dx} \right)_{x=l}, \end{aligned} \right. \quad (17)$$

де c – кутова жорсткість кінцевої балки у точках приєднання до неї головних балок, $[c] = \frac{H \cdot m}{\text{рад}}$.

З граничних умов на лівому кінці балки маємо:

$$C_{2k} = \gamma \cdot \lambda \cdot C_{3k}; \quad C_{4k} = \beta_2 \cdot \lambda \cdot C_{1k}, \quad (18)$$

де $\gamma = \frac{E \cdot J}{c \cdot l}$; $\lambda = \alpha \cdot l$; $\beta_2 = \frac{m_2}{\mu \cdot l}$.

Використовуючи граничні умови на правому кінці балки, прийдемо до системи однорідних рівнянь відносно C_{1k} та C_{3k} [1]:

$$\begin{cases} C_{1k} \cdot [\lambda \cdot (\beta_1 + \beta_2) \cdot K_1(\lambda) + K_2(\lambda) + \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \lambda^2 \cdot K_4(\lambda)] + \\ + C_{3k} \cdot [\beta_1 \cdot \lambda^2 \cdot \gamma \cdot K_2(\lambda) + \lambda \cdot (\beta_1 + \gamma) \cdot K_3(\lambda) + K_4(\lambda)] = 0; \\ C_{1k} \cdot [\beta_1 \cdot \gamma \cdot \lambda^2 \cdot K_2(\lambda) + \lambda \cdot (\gamma + \beta_2) \cdot K_3(\lambda) + K_4(\lambda)] + \\ + C_{3k} \cdot [2 \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot K_1(\lambda) + K_2(\lambda) + \gamma^2 \cdot \lambda^2 \cdot \gamma \cdot K_4(\lambda)] = 0, \end{cases} \quad (19)$$

де $\beta_1 = \frac{m_1}{\mu \cdot l}$.

Прирівнюючи до нуля визначник системи (19), перейдемо до частотного рівняння:

$$a_1 \cdot \lambda^2 \cdot K_2(\lambda) \cdot K_4(\lambda) + a_2 \cdot \lambda^3 \cdot K_1(\lambda) + (a_3 \cdot \lambda^4 - 1) \cdot K_2^2(\lambda) + a_4 \cdot \lambda^2 \cdot K_1(\lambda) \cdot K_2(\lambda) + a_5 \cdot \lambda^2 \cdot K_1^2(\lambda) + \\ + (1 - a_3 \cdot \lambda^4) \cdot K_2^2(\lambda) - a_6 \cdot \lambda^2 \cdot K_2^2(\lambda) - a_4 \cdot \lambda^2 \cdot K_3(\lambda) \cdot K_4(\lambda) - a_2 \cdot \lambda^2 \cdot K_2(\lambda) \cdot K_3(\lambda) = 0, \quad (20)$$

де $a_1 = \gamma^2 + \beta_1 \cdot \beta_2 - (\beta_1 + \beta_2) \cdot \gamma$; $a_2 = (\beta_1 + \beta_2) \cdot \gamma^2 + 2 \cdot \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \gamma$; $a_3 = \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \gamma^2$; $a_4 = 2 \cdot \gamma + \beta_1 + \beta_2$; $a_5 = 2 \cdot \gamma \cdot (\beta_1 + \beta_2)$; $a_6 = (\gamma + \beta_1) \cdot (\gamma + \beta_2)$.

Зазвичай податливість кінцевих балок мосту порівняно мала й мало впливає на частоту і форму згинних коливань головних балок, тому $\gamma \rightarrow 0$, і можна отримати спрощене частотне рівняння:

$$K_4^2(\lambda) - K_2^2(\lambda) + \lambda \cdot (\beta_1 + \beta_2) \cdot [K_3(\lambda) \cdot K_4(\lambda) - K_1(\lambda) \cdot K_2(\lambda)] + \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \lambda^2 \cdot [K_3^2(\lambda) - K_2(\lambda) \cdot K_3(\lambda)] = 0. \quad (21)$$

Розв'язуючи рівняння (21), або ж точніше (20), на ПЕОМ за допомогою стандартної програми МATHCAD, знаходимо кілька найменших його коренів λ_k , після чого визначаємо $\alpha_k = \lambda_k \cdot l$ і частоти власних коливань k :

$$p_k = \alpha_k^2 \cdot \sqrt{\frac{E \cdot J}{\mu}}. \quad (22)$$

З першого рівняння (19) системи встановлюємо, що:

$$C_{3k} = -a_k \cdot C_{1k}, \quad (23)$$

де $a_k = \frac{K_3(\lambda_k) + (\beta_1 + \beta_2) \cdot \lambda_k \cdot K_1(\lambda_k) + \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \lambda_k^2 \cdot K_4(\lambda_k)}{(\beta_1 + \gamma) \cdot K_3(\lambda_k) + K_4(\lambda_k) + \beta_1 \cdot \gamma \cdot \lambda_k^2 \cdot K_2(\lambda_k)}$.

Підставляючи значення C_{2k} , C_{3k} та C_{4k} у рівності (16) і приймаючи $C_{1k} = 1$, матимемо:

$$U_k(x) = K_1(\alpha_k \cdot x) - \gamma \cdot \lambda_k \cdot a_k \cdot K_2(\alpha_k \cdot x) - a_k \cdot K_3(\alpha_k \cdot x) + \beta_2 \cdot \lambda_k \cdot K_4(\alpha_k \cdot x). \quad (24)$$

Чисельні розрахунки на ПЕОМ проведені для згинних коливань балки крана М15Т, який має такі параметри: $m_1 = 4120 \text{ кг}$; $m_2 = 9720 \text{ кг}$; $\mu = 957 \frac{\text{кг}}{\text{м}}$; $l = 28 \text{ м}$; $E = 1,96 \cdot 10^8 \text{ кПа}$; $J = 35 \cdot 10^4 \text{ см}^4 = 35 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4$; $\gamma = 0,0122$; $\beta_1 = 0,157$; $\beta_2 = 0,363$. Визначені перші три частоти згинних коливань балки. Вони наведені у табл. 1.

На рис. 2 за рівнянням (24) побудовані перші три форми згинних коливань балки зазначеного вище крана.

Таблиця 1

Власні частоти згинних коливань балки крана М15Т

№ п/п (k)	1	2	3
$p_k, \text{ рад/с}$	6,80	32,40	79,50
$f_k = \frac{p_k}{2\pi}, \text{ Гц}$	1,08	5,16	12,65

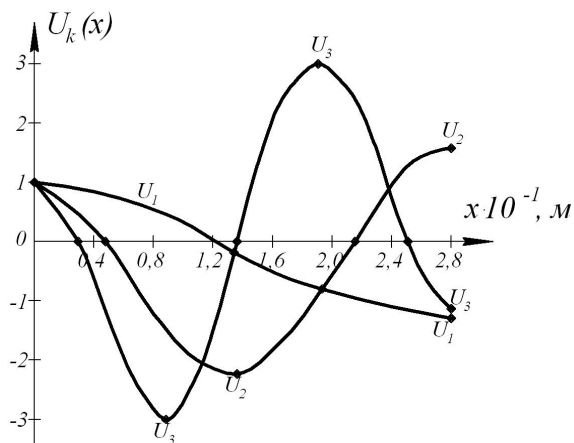


Рис. 2. Форми згинних коливань головних балок мосту крана М15Т

З рис. 2 видно, що максимальні/мінімальні значення $U_k(x)$ істотно відрізняються не тільки у граничних точках (кінцевих точках) балки $x=0, l$, але й у проміжних, коли $0 < x < l$. Максимальні/мінімальні значення $U_k(x)$, $U_k(0)$ та $U_k(l)$ для $k=1,2,3$ наведені у табл. 2. Вони відрізняються і за величиною, і за знаком.

Таблиця 2

Максимальні та мінімальні значення $U_k(x)$, $U_k(0)$ і $U_k(l)$ для різних форм згинних коливань головних балок мосту крана М15Т

k	$\max U_k$	$\min U_k$	$U_k(0)$	$U_k(l)$
1	1,0	-1,2	1,0	-1,2
2	1,5	-2,2	1,0	1,5
3	3,1	-3,1	1,0	-0,9

Головну координату $q_k(t)$ визначаємо з рівняння:

$$\begin{aligned}
 & E \cdot J \cdot \int_0^l U_k^{(IV)}(x) \cdot U_k(x) dx \cdot q_k + 2 \cdot m \cdot \int_0^l U_k^2(x) dx \cdot \ddot{q}_k + 2 \cdot m \cdot V \cdot \int_0^l U_k'(x) \cdot U_k(x) dx \cdot \dot{q}_k + \\
 & + m \cdot V^2 \cdot \int_0^l U_k''(x) \cdot U_k(x) dx \cdot q_k + m_1 \cdot [U_k^2(0) \cdot \ddot{q}_k + 2 \cdot V \cdot U_k'(0) \cdot U_k(0) \cdot \dot{q}_k + V^2 \cdot U_k''(0) \cdot U_k(0) \cdot q_k] + \\
 & + m_2 \cdot [U_k^2(l) \cdot \ddot{q}_k + 2 \cdot V \cdot U_k'(l) \cdot U_k(l) \cdot \dot{q}_k + V^2 \cdot U_k''(l) \cdot U_k(l) \cdot q_k] = \\
 & = -m \cdot (j + j_a \cdot \cos w \cdot t) \cdot \int_0^l U_k(x) dx + (N_1 + N_3 \cdot \cos w \cdot t) \cdot U_k(0) + (N_2 - N_4 \cdot \cos w \cdot t) \cdot U_k(l),
 \end{aligned}
 \tag{25}$$

де $U_k'(x) = \frac{dU_k(x)}{dx}$, $U_k''(x) = \frac{d^2U_k(x)}{dx^2}$, $U_k^{(IV)}(x) = \frac{d^4U_k(x)}{dx^4}$, $\dot{q}_k = \frac{dq_k(t)}{dt}$, $\ddot{q}_k = \frac{d^2q_k(t)}{dt^2}$.

Після нескладних перетворень рівняння (25) набуває такого вигляду:

$$m_k \ddot{q}_k + b_k \dot{q}_k + \Omega_k^2 \cdot q_k = \frac{Q_k(t)}{m_k^*}, \quad (26)$$

де m_k^* – узагальнена маса, b_k – узагальнений коефіцієнт в'язкого тертя (дисипації), Ω_k – частота коливань із врахуванням рухливого навантаження, що діє на балку мостового крана, $Q_k(t)$ – узагальнена сила. m_k^* , b_k , Ω_k та $Q_k(t)$ знаходимо із таких співвідношень:

$$m_k^* = 2 \cdot \mu \cdot \int_0^l U_k^2(x) dx + m_1 \cdot U_k^2(0) + m_2 \cdot U_k^2(l), \quad (27)$$

$$b_k = \frac{1}{m_k^*} \cdot \left[2 \cdot \mu \cdot V \cdot \int_0^l U_k'(x) \cdot U_k(x) dx + 2 \cdot m_1 \cdot V \cdot U_k'(0) \cdot U_k(0) + 2 \cdot m_2 \cdot V \cdot U_k'(l) \cdot U_k(l) \right], \quad (28)$$

$$\Omega_k^2 = \frac{1}{m_k^*} \cdot \left[E \cdot J \cdot \int_0^l U_k^{(IV)}(x) \cdot U_k(x) dx + \mu \cdot V^2 \cdot \int_0^l U_k''(x) \cdot U_k(x) dx + \right. \\ \left. + m_1 \cdot V^2 \cdot U_k''(0) \cdot U_k(0) + m_2 \cdot V^2 \cdot U_k''(l) \cdot U_k(l) \right], \quad (29)$$

$$Q_k(t) = -\mu \cdot (j + j_a \cdot \cos \omega \cdot t) \cdot \int_0^l U_k(x) dx + (N_1 + N_3 \cdot \cos \omega \cdot t) \cdot U_k(0) + (N_2 - N_4 \cdot \cos \omega \cdot t) \cdot U_k(l). \quad (30)$$

При $V = 0$ вирази для Ω_k збігаються з наведеними у [1], тобто $\Omega_k = p_k$. Проте, на відміну від виразу для узагальненої маси m_k^* в [1], у формулі (27) навіть при $V = 0$ залишається перший член вдвічі більший за той, що наведений у [1].

Слід також зазначити, що: 1) $b_k \rightarrow 0$ при $V \rightarrow 0$; 2) за нової m_k^* (27) власні частоти коливань балки (згинні коливання) у $\sqrt{2}$ разів менші за ті, що наведені у [1] для такого ж типу мостових кранів, якщо останні два члени у (27) набагато менші за перший; 3) наявність рухомого навантаження на балку мостового крана збільшує його жорсткість (зростає чисельник формули для Ω_k) і одночасно з цим зростають інерційні ефекти від розподіленої маси балки (зростає знаменник формули для Ω_k).

Введемо позначення:

$$\begin{cases} 2 \cdot n_k = b_k; & Q_k(t) = Q_{k0} + \tilde{f}_k \cdot \cos \omega \cdot t; \\ Q_{k0} = -\mu \cdot j \cdot \int_0^l U_k(x) dx + N_1 \cdot U_k(0) + N_2 \cdot U_k(l); \\ \tilde{f}_k = -\mu \cdot j_a \cdot \int_0^l U_k(x) dx + N_3 \cdot U_k(0) - N_4 \cdot U_k(l), \end{cases} \quad (31)$$

тоді рівняння (26) можна подати у вигляді:

$$m_k \ddot{q}_k + 2 \cdot n_k \cdot \dot{q}_k + \Omega_k^2 \cdot q_k = \frac{Q_{k0} + \tilde{f}_k \cdot \cos \omega \cdot t}{m_k^*}. \quad (32)$$

Оскільки перед пуском крана швидкість пружної деформації мосту дорівнює нулю, а перед його гальмуванням вона незначна, то у разі розв'язування рівняння (32) обидві початкові умови слід прийняти нульовими ($q_k(0) = \dot{q}_k(0) = 0$). Тоді розв'язок (32) має вигляд [9]:

$$q_k(t) = \frac{Q_{k0}}{m_k^* \cdot \Omega_k^2} + \frac{\tilde{f}_k \cdot \cos(\omega \cdot t + \delta_k)}{m_k^* \cdot \sqrt{(\Omega_k^2 - \omega^2)^2 + 4 \cdot n_k^2 \cdot \omega^2}}, \quad \delta_k = \arctg \left\{ \frac{2 \cdot n_k \cdot \omega}{\omega^2 - \Omega_k^2} \right\}. \quad (33)$$

Розглянемо вираз (33) при наближенні частоти ω до Ω_k . За заданої амплітуди сили \tilde{f}_k амплітуда коливання $q_k(t)$ максимальна при частоті:

$$\omega = \sqrt{\Omega_k^2 - 2 \cdot n_k^2}, \quad (34)$$

і становить:

$$q_{k \max}^{(\text{колив})} = \frac{\tilde{f}_k}{m_k^* \cdot 2 \cdot n_k \cdot \sqrt{\Omega_k^2 - 2 \cdot n_k^2}} = \frac{\tilde{f}_k}{2 \cdot m_k^* \cdot n_k \cdot \omega}. \quad (35)$$

А) При $n_k \ll \Omega_k$ це значення відрізняється від Ω_k лише на величину другого порядку малості.

Розглянемо область поблизу резонансу ($\omega = \Omega_k$) методом, розвинутим у [9]. Прийmemo $\omega = \Omega_k + \varepsilon_k$, де ε_k – мала величина; будемо також вважати, що $n_k \ll \Omega_k$. Тоді у (33) можна наближено замінити:

$$\omega^2 - \Omega_k^2 = (\omega + \Omega_k) \cdot (\omega - \Omega_k) \approx 2 \cdot \Omega_k \cdot \varepsilon_k; \quad 2 \cdot n_k \cdot \omega \approx 2 \cdot n_k \cdot \Omega_k, \quad (36)$$

тоді:

$$q_{k \max}^{(\text{колив})} = \frac{\tilde{f}_k}{m_k^* \cdot \sqrt{(\Omega_k^2 - \omega^2)^2 + 4 \cdot n_k^2 \cdot \omega^2}} \Big|_{\omega = \Omega_k + \varepsilon_k} \approx \frac{\tilde{f}_k}{2 \cdot m_k^* \cdot \Omega_k \cdot \sqrt{\varepsilon_k^2 - n_k^2}}; \quad \text{tg} \delta_k = \frac{n_k}{\varepsilon_k}. \quad (37)$$

Зазначимо характерну особливість ходу зміни різниці фаз δ_k між коливаннями та вимушеною силою при зміні частоти останньої. Ця різниця завжди від'ємна, тобто коливання “запізнюються” відносно зовнішньої сили. Подалік від резонансу, зі сторони $\Omega_k > \omega$, $\delta_k \rightarrow 0$, а зі сторони $\omega > \Omega_k$ – до значення $\delta_k = (-\pi)$. Зміна δ_k від нуля до $(-\pi)$ відбувається у вузькій (шириною $\sim n_k$) області частот, близьких до Ω_k ; через значення $(-\pi/2)$ різниця фаз δ_k проходить при $\omega = \Omega_k$. Зазначимо у зв'язку з цим, що за відсутності “тертя” ($n_k \equiv 0$) зміна фази вимушеного коливання на величину π відбувається стрибком при $\omega = \Omega_k$ [9]; врахування сил “тертя” ($n_k \neq 0$) “розмазує” цей стрибок.

При усталеному русі крана, коли система здійснює вимушені коливання (33), її енергія залишається незмінною. У той же час вказана система неперервно поглинає (від джерела зовнішньої сили) енергію, котра дисипується завдяки наявності “тертя”. Позначимо $I(\omega)$ кількість енергії, яку поглинає система у середньому в одиницю часу, як функцію частоти зовнішньої сили ω . Згідно з [9] маємо:

$$I(\omega) = 2 \cdot \bar{F}, \quad (38)$$

де \bar{F} – середнє (за періодом коливання) значення дисипативної функції. Для одновимірного руху дисипативна функція зводиться до $\bar{F} = n_k \cdot m_k^* \cdot \dot{q}_k^2$. Підставляючи у \bar{F} похідну по часу t від виразу (33), матимемо:

$$\bar{F} = n_k \cdot m_k^* \cdot \left(\frac{\tilde{f}_k}{m_k^* \cdot \sqrt{(\Omega_k^2 - \omega^2)^2 + 4 \cdot n_k^2 \cdot \omega^2}} \right)^2 \cdot \omega^2 \cdot \sin^2(\omega \cdot t + \delta_k). \quad (39)$$

Середнє за часом значення квадрата синуса дорівнює $\frac{1}{2}$, тому:

$$I(\omega) = n_k \cdot m_k^* \cdot \left(\frac{\tilde{f}_k}{m_k^* \cdot \sqrt{(\Omega_k^2 - \omega^2)^2 + 4 \cdot n_k^2 \cdot \omega^2}} \right)^2 \cdot \omega^2. \quad (40)$$

Поблизу резонансу ($\omega = \Omega_k$), підставляючи амплітуду коливання з (37), матимемо:

$$I(\varepsilon_k) = \frac{\tilde{f}_k^2 \cdot n_k}{4 \cdot m_k^* \cdot (\varepsilon_k^2 + n_k^2)}. \quad (41)$$

Такий вид залежності поглинання від частоти зазвичай називають дисперсійним [9]. Напівшириною резонансної кривої (рис. 3) називають значення $|\varepsilon_k|$, за якого величина $I(\varepsilon_k)$ зменшується вдвічі порівняно з її максимальним значенням при $\varepsilon_k = 0$. З формули (41) видно, що у цьому випадку ця ширина збігається з показником загасання n_k . Висота максимуму:

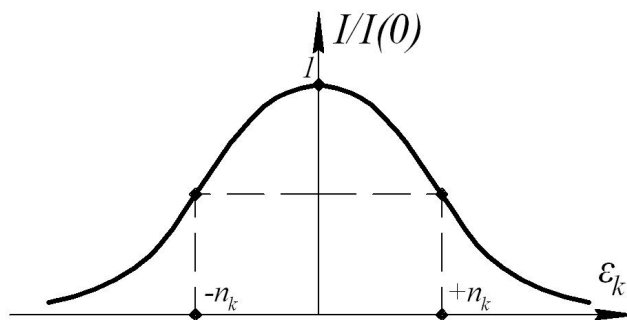


Рис. 3. Залежність $I(\omega)$

$$I(0) = \frac{\tilde{f}_k^2}{4 \cdot m_k^* \cdot n_k}, \quad (42)$$

яка обернено пропорційна n_k . Отже, у разі зменшення показника загасання резонансна крива стає вузкою та вищою, тобто її максимум стає гострішим. Площа ж під резонансною кривою залишається при цьому незмінною.

Остання ж подається інтегралом:

$$\int_0^{\infty} I(\omega) d\omega = \int_{-\Omega_k}^{\infty} I(\varepsilon_k) d\varepsilon_k. \quad (43)$$

Оскільки $I(\varepsilon_k)$ швидко спадає при зростанні $|\varepsilon_k|$, тому область великих значень $|\varepsilon_k|$ все одно неістотна, і тому можна під час інтегрування записувати $I(\varepsilon_k)$ у вигляді (41), а нижню границю інтеграла замінити на $(-\infty)$. Тоді:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} I(\varepsilon_k) d\varepsilon_k = \frac{\tilde{f}_k^2 \cdot n_k}{4 \cdot m_k^*} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varepsilon_k}{\varepsilon_k^2 + n_k^2} = \frac{\pi \cdot \tilde{f}_k^2}{4 \cdot m_k^*}. \quad (44)$$

Б) При $n_k > \frac{\Omega_k}{\sqrt{2}}$ процес коливний змінюється на аперіодичний, і за умови резонансу ($\omega = \Omega_k$) замість (33) маємо:

$$q_k(t) = \frac{Q_{k0}}{m_k^* \cdot \Omega_k^2} + \frac{\tilde{f}_k \cdot \exp\left(-\sqrt{2 \cdot n_k^2 - \Omega_k^2} \cdot t\right) \cdot \cos(\delta_k)}{2 \cdot m_k^* \cdot n_k \cdot \Omega_k}, \quad \delta_k \rightarrow \pi/2. \quad (45)$$

В. При $n_k = \Omega_k / \sqrt{2}$ за умови резонансу ($\omega = \Omega_k$) замість (33) маємо:

$$q_k(t) = \text{const} = \frac{Q_{k0}}{m_k^* \cdot \Omega_k^2} + \frac{\tilde{f}_k \cdot \cos(\delta_k)}{2 \cdot m_k^* \cdot n_k \cdot \Omega_k}, \quad \delta_k \rightarrow \pi/2. \quad (46)$$

Оскільки $\cos(\delta_k)|_{\delta_k=\pi/2} = 0$, тоді для $n_k \geq \Omega_k / \sqrt{2}$ (у межах даної моделі) маємо:

$$q_k(t) = \frac{Q_{k0}}{m_k^* \cdot \Omega_k^2}. \quad (47)$$

Слід зазначити, що враховуючи інші процеси дисипації, які відбуваються у крановій системі, $\delta_k \neq \pi/2$, тому $\cos(\delta_k) \neq 0$ і формули (45) та (46) залишаються у силі.

Під час розрахунку динамічних навантажень у разі гальмування двигуном, який працює у режимі противмикання, на одній якійсь механічній характеристиці, слід [1] приймати $P_1 = -1,17 \cdot P_T$, $P_2 = -0,83 \cdot P_T$, де P_T – гальмівне зусилля двигуна при ковзанні ротора, яке дорівнює одиниці. Враховуючи розкид роторних опорів двигунів двох сторін крана, для розрахунку максимальних навантажень під час пуску двигуна зусилля слід приймати постійним і таким, що дорівнює $P_1 = 0,83 \cdot P_0$, $P_2 = 1,17 \cdot P_0$, де P_0 – середнє рушійне зусилля, яке визначається за даними каталогу для двигуна та контролера [1].

Використовуючи рівняння згину балки, знаходимо згинальні моменти у довільному її перерізі:

$$M(x, t) = E \cdot J \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \sum_{k=1}^{\infty} M_k(x) \cdot q_k(t), \quad (48)$$

де $M_k(x)$ – амплітудна функція згинального моменту;

$$M_k(x) = E \cdot J \cdot \alpha_k^2 \cdot [K_3(\alpha_k \cdot x) - \gamma \cdot \lambda_k \cdot a_k \cdot K_4(\alpha_k \cdot x) - a_k \cdot K_1(\alpha_k \cdot x) + \beta_2 \cdot \lambda_k \cdot K_2(\alpha_k \cdot x)]. \quad (49)$$

Поперечні сили, що діють на ходові колеса з боку кінцевих балок, відповідно дорівнюють [1]:

$$F_2 = \frac{M(0, t)}{B}; \quad F_1 = \frac{M(l, t)}{B}, \quad (50)$$

де B – база мостового крана.

Ці сили врівноважуються поперечними реакціями рейкового шляху.

Числовий розрахунок на ПЕОМ за виразом (48) згинальних моментів головних балок мостових кранів стандартних параметрів порівняно з результатами експериментів [1] дозволяє зробити такі висновки:

1) максимальний момент виникає на лівому кінці балки, тобто у місці розташування вантажного візка, як у період пуску, так і у період гальмування крана;

2) збіг доволі добрий з результатами експерименту [1] дає врахування навіть тільки першого члену ряду (48);

3) оскільки $p_1 > \omega$, а $\text{sign}(Q_{k0}) \neq \text{sign}(\tilde{f}_k)$, максимум згинального моменту виникає у момент часу t_0 , коли $\cos(p_1 \cdot t_0) = \cos(\omega \cdot t_0) = -1$, тобто у момент максимального відхилення канатів від вертикалі;

4) у зв'язку з тим, що пуск крана чи його гальмування відбувається при різній довжині виска канатів, то сформульована у пункті 3 умова виникнення максимуму буде мати місце, коли:

$$p_1 = (2 \cdot j + 1) \cdot \omega, \quad j = 1, 2, 3, \dots, \quad (51)$$

або

$$\alpha_1^2 \cdot \sqrt{\frac{E \cdot J}{\mu}} = (2 \cdot j + 1) \cdot \sqrt{\frac{(\tilde{m}_1 + \tilde{m}_2) \cdot g}{\tilde{m}_1 \cdot H}}. \quad (52)$$

Враховуючи ту обставину, що $\alpha_1^4 = p_1^2 \cdot \frac{\mu}{(E \cdot J)}$, з (52) можна отримати (51) (умову резонансу, за якої виникає максимальний згинальний момент у балці).

Оскільки $\alpha_1 = \frac{\lambda_1}{l}$, тоді з (52) маємо:

$$\frac{\lambda_1^2}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot J}{\mu}} = (2 \cdot j + 1) \cdot \sqrt{\frac{(\tilde{m}_1 + \tilde{m}_2) \cdot g}{\tilde{m}_1 \cdot H}}. \quad (53)$$

Вираз (53) дозволяє знайти значення довжини канату H_j , за якої виникають максимальні згинальні моменти у балці мостового крана:

$$H_j = \frac{(2 \cdot j + 1)^2 \cdot (\tilde{m}_1 + \tilde{m}_2) \cdot g \cdot l^4 \cdot \mu}{\tilde{m}_1 \cdot \lambda_1^4 \cdot E \cdot J} = \frac{(2 \cdot j + 1)^2 \cdot \left(1 + \frac{\tilde{m}_2}{\tilde{m}_1}\right) \cdot g}{p_1^2}. \quad (54)$$

Чисельні розрахунки H_j для крана М15Т проведені за таких значень параметрів:

$$p_1 = 6,8 \text{ рад/с}; \quad \frac{\tilde{m}_2}{\tilde{m}_1} = 2; \quad g = 9,81 \text{ м/с}^2; \quad l = 28 \text{ м}; \quad \mu = 957 \text{ кг/м}; \quad E = 1,96 \cdot 10^{11} \text{ Па};$$

$$J = 35 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2; \quad \lambda_1 = \left[\frac{p_1^2 \cdot l^4 \cdot \mu}{E \cdot J} \right]^{1/4} \approx 2,51.$$

У табл. 3 наведено значення H_j для крана М15Т. Зрозуміло, що з практичних міркувань “резонанси” згинального моменту балок крана можуть мати місце для $j = \overline{(1, 4)}$.

Таблиця 3

Значення H_j для крана М15Т

j	1	2	3	4	5	10
$H_j, \text{ м}$	5,73	15,90	31,16	51,52	76,96	280,48

Із врахуванням наведених вище висновків, максимальний згинальний момент у довільному перерізі розрахункової балки дорівнюватиме:

$$M(x, t_0) = \frac{2 \cdot Q_{10} \cdot M_1(x)}{m_1^* \cdot p_1^2}, \quad (55)$$

де $M_1(x)$ – амплітудна функція низькочастотної складової (при $k = 1$) згинального моменту;

$$M_1(x) = E \cdot J \cdot \alpha_1^2 \cdot [K_3(\alpha_1 \cdot x) - \gamma \cdot \lambda_1 \cdot a_1 \cdot K_4(\alpha_1 \cdot x) - a_1 \cdot K_1(\alpha_1 \cdot x) + \beta_2 \cdot \lambda_1 \cdot K_2(\alpha_1 \cdot x)]. \quad (56)$$

Вираз для $M_1(x)$ (56) збігається з наведеним у [1].

Максимальний згинальний момент (на лівому кінці балки):

$$M_{\max} = -\frac{2 \cdot Q_{10} \cdot a_1 \cdot E \cdot J \cdot \alpha_1^2}{m_1^* \cdot p_1^2}. \quad (57)$$

Аналогічно можна розрахувати динамічні навантаження металоконструкції крана під час пуску/гальмування. Коли вантажний візок з вантажем знаходиться у середині прольоту, рівняння

вимушених коливань балки для цього випадку матиме вигляд (12) та (13), де $N_1 = -m_1 \cdot j$; $N_2 = -0,5 \cdot T_a - m_2 \cdot j$; $N_3 = m_1 \cdot j + 0,5 \cdot T_a$; $N_4 = -m_2 \cdot j_a$.

Оскільки умова закріплення балки на правому кінці відрізняється від умови закріплення при місцезнаходженні вантажного візка у середині прольоту, бо кут повороту середнього перерізу балки дорівнює нулю, то для розглядуваного випадку вирази для амплітудної функції згинального моменту й частотне рівняння (вантажний візок знаходиться на правому кінці балки) будуть мати дещо інший вигляд. (У цій роботі вони не наведені у зв'язку з громіздкістю).

Поперечні сили, що діють на всі ходові колеса з боку кінцевих балок, у цьому випадку однакові й дорівнюють

$$F = \frac{M(0, t)}{B}. \quad (58)$$

Приклади розрахунку на ПЕОМ згинального моменту за формулою (55) дали можливість зробити висновки, наведені нижче, котрі знаходяться у повній відповідності до відомих попередніх методик розрахунку динамічних навантажень [1].

2. Ефект випромінювання пружних хвиль вантажним візком крана при його рівномірному русі вздовж рейкового шляху.

а) Ефект Доплера.

Дослідження авторів [5–7] виявили, що рух об'єктів вздовж напрямних, взагалі кажучи, супроводжує хвилеутворення. Посередником перетворення енергії поступального руху об'єкта в енергію випромінювання є сила тиску пружних хвиль, котра, як з'ясувалось, здебільшого чинить істотний вплив на результуючу силу опору рухові. Причому цей вплив може бути як додатним, так і від'ємним.

Частоти коливань пружної системи, які зумовлені гармонічним джерелом, що рівномірно рухається $x = V \cdot t$, зміщені по відношенню до частоти джерела Ω (Ω може й дорівнювати нулю). Зміщення частоти знаходиться з кінематичного інваріанта:

$$\tilde{\omega} - V \cdot k = \Omega, \quad (59)$$

який виражає рівність фаз збуджуваних хвиль фазі джерела й дисперсійного рівняння:

$$f(\tilde{\omega}, k) = 0, \quad (60)$$

яке зв'яже частоти $\tilde{\omega}$ та хвильові числа k можливих у системі хвиль.

У необмежених системах з усіх розв'язків (59) та (60) реалізуються лише ті, котрі задовольняють вимогу обмеженості зміщень на нескінченності ($x \rightarrow \pm\infty$):

$$\text{Im } k > 0 \text{ при } x < V \cdot t, \quad \text{Im } k < 0 \text{ при } x > V \cdot t \quad (61)$$

та умовам випромінювання Л.І. Мандельштама [10]:

$$\frac{d\tilde{\omega}}{dk} < V, \quad x < V \cdot t; \quad \frac{d\tilde{\omega}}{dk} > V, \quad x > V \cdot t. \quad (62)$$

У випадку моделі балки мостового крана Бернуллі-Ейлера дисперсійне рівняння (60) записується у вигляді:

$$\tilde{\omega}^2 - \tilde{\alpha} \cdot k^4 = 0, \quad (63)$$

де $\tilde{\alpha} = \sqrt{(E \cdot J) / (\rho \cdot F)}$; F – площа поперечного перерізу балки; ρ – питома щільність речовини (матеріалу балки). Розв'язуючи (63) разом з (59), знаходимо такі розв'язки задачі кінематики хвиль, що задовольняють умови (61) та (62).

При докритичних швидкостях руху вантажного візка, коли $|V| < V_{кр} = 2 \cdot \sqrt{\tilde{\alpha} \cdot \Omega}$, рухоме джерело (візок) частоти Ω випромінює одну гармонічну хвилю попереду себе (у +x напрямку) з:

$$\tilde{\omega} = \frac{\left(V + \sqrt{V_{кр}^2 + V^2} \right)^2}{4 \cdot \tilde{\alpha}}, \quad k = \frac{V + \sqrt{V_{кр}^2 + V^2}}{2 \cdot \tilde{\alpha}} \quad (64)$$

та одну гармонічну хвилю позаду ($y - x$ напрямку) з

$$\tilde{\omega} = \frac{\left(V - \sqrt{V_{кр}^2 + V^2}\right)^2}{4 \cdot \tilde{\alpha}}, \quad k = \frac{V - \sqrt{V_{кр}^2 + V^2}}{2 \cdot \tilde{\alpha}}. \quad (65)$$

Крім того, зліва й справа від рухомого візка/джерела виникають просторово неоднорідні хвилі: у області $x > V \cdot t$ з:

$$\tilde{\omega} = -\frac{\left(V + i \cdot \sqrt{V_{кр}^2 - V^2}\right)^2}{4 \cdot \tilde{\alpha}}, \quad k = -\frac{V + i \cdot \sqrt{V_{кр}^2 - V^2}}{2 \cdot \tilde{\alpha}}, \quad i^2 = -1, \quad (66)$$

а у області $x < V \cdot t$ з:

$$\tilde{\omega} = -\frac{\left(-V + i \cdot \sqrt{V_{кр}^2 - V^2}\right)^2}{4 \cdot \tilde{\alpha}}, \quad k = \frac{-V + i \cdot \sqrt{V_{кр}^2 - V^2}}{2 \cdot \tilde{\alpha}}. \quad (67)$$

Обвідні цих хвиль експоненціально спадають при віддаленні від рухомого візка/джерела.

При за критичних швидкостях руху візка, коли $V > V_{кр}$, з кожного боку від джерела збуджуються по дві хвилі. Замість супроводжуючих джерело неоднорідних хвиль виникають однорідні хвилі, котрі відводять від нього енергію з:

$$\tilde{\omega} = -\frac{\left(V + \sqrt{V^2 - V_{кр}^2}\right)^2}{4 \cdot \tilde{\alpha}}, \quad k = -\frac{V + \sqrt{V^2 - V_{кр}^2}}{2 \cdot \tilde{\alpha}} \quad (68)$$

у області $x > V \cdot t$ та:

$$\tilde{\omega} = -\frac{\left(-V + \sqrt{V^2 - V_{кр}^2}\right)^2}{4 \cdot \tilde{\alpha}}, \quad k = \frac{-V + \sqrt{V^2 - V_{кр}^2}}{2 \cdot \tilde{\alpha}} \quad (69)$$

у області $x < V \cdot t$.

Рухоме джерело постійної частоти (вантажний візок), як видно з наведених вище співвідношень, збуджує у напрямній (рейковий шлях/балка) коливання одночасно на кількох частотах, котрі можуть як завгодно сильно відрізнитися. Звідси ясно, чому широко застосований метод розрахунку динаміки систем з рухливими навантаженнями, заснований на поданні розв'язку у вигляді ряду за власними формами коливань, що відповідає однорідній задачі [11, 12], має, взагалі кажучи, погану збіжність. Адже структура шуканого розв'язку не адекватна реальному процесу.

б) *Випромінювання хвиль рухомим джерелом (вантажним візком мостового крана нульової частоти.*

Ефект випромінювання пружних хвиль рівномірно рухомим джерелом (вантажним візком) нульової частоти характерний також для систем з конвекцією (трубопроводів, передач з гнучким зв'язком, стрічкових конвеєрів тощо), та для дорожніх конструкцій, вздовж яких пересуваються рухомі навантаження.

Розглянемо рівномірний рух вантажного візка мостового крана вздовж рейкового шляху (пружної напрямної балки) у припущеннях, що відповідають такій граничній задачі:

$$\begin{cases} J \cdot E \cdot u_{xxxx} + \rho \cdot F \cdot u_{tt} + h_0 \cdot u = 0, & u_{xxx} = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}, & u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ u(V \cdot t + 0, t) = u(V \cdot t - 0, t) = u_0(t), & u_x(V \cdot t + 0, t) = u_x(V \cdot t - 0, t) = w_0(t), \\ \tilde{m}_1 \cdot \ddot{u}_0 + \bar{k} \cdot u_0 = -J \cdot E \cdot [u_{xxx}] + F_0, & J_0 \cdot \ddot{w}_0 + G_0 \cdot w_0 = J \cdot E \cdot [u_{xx}], \end{cases} \quad (70)$$

де $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u_{xxx} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$, $u(x, t)$ – прогин балки, \tilde{m}_1 , J_0 , \bar{k} , G_0 – параметри пружності та інерційності “екіпажу” (вантажного візка), $F_0 = \text{const}$. Вважаємо, що на нескінченності ($x \rightarrow \pm\infty$) прогини обмежені й виконуються умови випромінювання Мандельштамма [10]. Квадратні дужки – різниця величин, які стоять у них з правого та лівого боку від рухомої границі.

Як впливає з аналізу задачі кінематики хвиль (59)–(62), при докритичних швидкостях, коли $V < \bar{V}_{кр} = \sqrt{2 \cdot \bar{\alpha} \cdot \omega_*}$ ($\bar{\alpha} = \sqrt{\frac{E \cdot J}{\rho \cdot F}}$, $\omega_* = \sqrt{\frac{h_0}{\rho \cdot F}}$, h_0 – коефіцієнт постілі у моделі основи Вінклера), прогин під навантаженням локалізований та симетричний, тобто випромінювання хвиль відсутнє. При закритичних швидкостях, коли $V > \bar{V}_{кр}$, випромінюються дві хвилі. Одна з них біжить перед навантаженням ($x > V \cdot t$):

$$k_1 = \frac{\sqrt{V^2 + \sqrt{V^4 - V_{кр}^4}}}{\sqrt{2 \cdot \bar{\alpha}}}, \quad (71)$$

а інша рухається вздовж її сліду ($x < V \cdot t$) з:

$$k_2 = \frac{\sqrt{V^2 - \sqrt{V^4 - V_{кр}^4}}}{\sqrt{2 \cdot \bar{\alpha}}}. \quad (72)$$

Амплітуди цих хвиль, згідно з (70), відповідно дорівнюють:

$$A_1 = \left(\frac{F_0}{k_1} \right) \cdot \frac{\sqrt{(G_0 \cdot k_1)^2 + (J \cdot E)^2 \cdot (k_2^2 - k_1^2)^2}}{\bar{k} \cdot G_0 - (J \cdot E)^2 \cdot (k_2^2 - k_1^2)^2}, \quad (73)$$

$$A_2 = \left(\frac{F_0}{k_2} \right) \cdot \frac{\sqrt{(G_0 \cdot k_2)^2 + (J \cdot E)^2 \cdot (k_2^2 - k_1^2)^2}}{\bar{k} \cdot G_0 - (J \cdot E)^2 \cdot (k_2^2 - k_1^2)^2}. \quad (74)$$

Стосовно сили опору рухові вантажного візка, тобто сили тиску хвиль, то вона визначається за формулою [13]:

$$T_{on} = \left[\frac{1}{2} \cdot (\rho \cdot F \cdot u_t^2 + J \cdot E \cdot u_{xx}^2) - J \cdot E \cdot u_x \cdot u_{xx} + V \cdot \rho \cdot F \cdot u_x \cdot u_t \right], \quad (75)$$

або з урахуванням (70):

$$\begin{aligned} T_{on} &= (\bar{k} \cdot u_0 - F_0) \cdot w_0 + \frac{1}{2} \cdot J \cdot E \cdot [u_{xx}^2] = \\ &= \frac{F_0^2 \cdot J \cdot E \cdot (k_1^2 - k_2^2)}{\left(\bar{k} \cdot G_0 + (J \cdot E)^2 \cdot (k_2^2 - k_1^2)^2 \right)^2} \cdot \left((J \cdot E)^2 \cdot (k_2^2 - k_1^2)^2 + \frac{G_0^2}{2} \cdot (k_1^2 + k_2^2) \right). \end{aligned} \quad (76)$$

Чисельні розрахунки на ПЕОМ сил хвильового тиску (навіть за нерухомою границі) дають змогу стверджувати таке. Для балки мостового крана, що здійснює згинальні коливання, у місцях її закріплення виникають напруження:

$$\sigma \approx 10^2 \cdot \left(\frac{4 \cdot F}{\pi \cdot \tilde{\lambda}^4} \right) \cdot E \cdot u_0^2, \quad (77)$$

де F – площа поперечного перерізу балки, $\tilde{\lambda}$ – довжина хвилі, E – модуль пружності матеріалу балки, u_0 – амплітуда поперечних відхилень. При $u_0 = 2 \cdot \sqrt{\frac{F}{\pi}}$ та $\tilde{\lambda} = 10 \cdot u_0$ напруження $\sigma \approx 10^{-2} \cdot E$, тобто виявляється одного порядку з гранично допустимими для металів.

Крім того, у багатьох роботах, присвячених дослідженню динаміки одновимірних систем з рухомими навантаженнями [8, 11, 12, 14] ці сили не враховувались, хоча нехтування ними не завжди обгрунтоване. Так, наприклад, для канатів шахтних підйомників, де швидкість поперечних хвиль становить 20–70 м/с, а швидкість піднімання – 8–12 м/с, відносний внесок конвективних сил може досягати 36%.

Висновки

1. Для спрощення й одночасного підвищення точності інженерних розрахунків необхідно під час конструювання розв'язків закладати у їх структуру інформацію про зсув частот, отриману з попереднього розв'язку задачі кінематики хвиль.

2. Доцільно розраховувати величину сил опору хвиль, що діють на об'єкт, який є носієм рухомого джерела (вантажного візка мостового крана). Таким об'єктом виступає балка, вздовж котрої рухається вантажний візок крана.

3. При лівому крайньому положенні візка згинальний момент має максимальне значення у лівому крайньому перерізі балки, а при розміщенні візка у середині прольоту максимальний момент виникає у середньому перерізі головних балок, однак він приблизно такий самий, як і згинальний момент у крайніх/кінцевих перерізах головних балок.

4. Аналіз впливу параметрів на максимальний згинальний момент дозволяє стверджувати так:

а) у обох випадках розміщення візка максимальний момент зменшується при збільшенні найнижчої власної частоти коливальності мосту; це означає, що зменшення згинальної жорсткості як головних, так і кінцевих балок призводить до збільшення максимальних згинальних моментів у небезпечних перерізах мосту;

б) у обох випадках розміщення візка максимальний момент зменшується при зменшенні початкового (при нерухомому роторі) моменту двигуна. Звідси випливає, що у мостових кранах з системою напівавтоматичного розгону двигунів динамічна завантаженість мосту за інших однакових умов буде меншою, ніж у кранах з системою ручного розгону. У загальному випадку рівень динамічної завантаженості мосту можна знижувати за рахунок оптимізації системи (мехатронного) управління краном, враховуючи з критерій мінімуму динамічних максимальних навантажень мосту за заданого часу пуску крана;

в) при лівому крайньому положенні візка максимальний момент зростає, якщо рушійне чи гальмівне зусилля приводу правого боку більше від тих самих зусиль приводу лівого боку. Нерівність рушійних чи гальмівних зусиль двигунів завжди має місце у реальних кранах. За даними В.П. Балашова [1], відхилення зусиль двигунів від їх проектних значень досягають $\pm 16\%$. Нерівність гальмівних зусиль механічних гальм двох боків крана визначається конструктивною недосконалістю гальм, які застосовуються, і не піддаються навіть орієнтовній кількісній оцінці. Відомо лише, що ця нерівність доволі значна за величиною. У зв'язку з цим для зменшення динамічних навантажень мосту і нейтралізації інших негативних факторів, пов'язаних із застосуванням нормально зачинених гальм у механізмах пересування мостових кранів, слід відмовитись від застосування механічних гальм для робочого гальмування й використовувати їх тільки для аварійного гальмування крана. Робоче гальмування крана слід здійснювати тільки за допомогою двигуна. За наявності у мехатронній системі управління (МСУ) саме контролерного управління таке гальмування слід здійснювати переведенням двигунів у режим противмикання за повністю введених роторних резисторах, що забезпечує доволі ефективно і у той самий час "м'яке" сповільнення крана. Для аварійної зупинки крана вмикання гальмівних електромагнітів чи електрогідроштовхачів до джерела напруги легко здійснюється за допомогою контактора захисної кранової панелі.

5. Викладену методику можна повністю використати для розрахунку динамічних навантажень мостових кранів (з урахуванням виникаючих хвилеутворень), які мають центральний привод механізму пересування, приймаючи $P_1 = P_2$. Єдине, що треба зробити перед розрахунком, це впевнитись у тому, що похибка розрахунку у припущенні жорсткої трансмісії знаходиться у припустимих межах, особливо при механізмах з тихохідним трансмісійним валом, власні частоти коливань котрих можуть бути не набагато вищими від першої власної частоти мосту.

6. Отримані у цій роботі результати можуть у подальшому слугувати для уточнення та вдосконалення існуючих інженерних методів розрахунку навантажень металоконструкцій мостових кранів (із врахуванням можливих хвилеутворень) як на стадіях їх проектування/конструювання, так і у режимах реальної експлуатації.

1. Лобов Н. А. Динамика грузоподъёмных кранов / Н. А. Лобов. – М.: Машиностроение, 1987. – 160 с. 2. Грузоподъёмные машины / М. П. Александров, Л. Н. Колобов, Н. А. Лобов и др. – М.: Машиностроение, 1986. – 400 с. 3. Гуляев В. И. Упругое деформирование, устойчивость и колебания гибких криволинейных стержней / В. И. Гуляев, В. В. Гайдайчук, В. Л. Кошкин. – К.: Наукова думка, 1992. – 344 с. 4. Пановко Я. Г. Устойчивость и колебания упругих систем / Я. Г. Пановко, И. И. Губанова. – М.: Наука, 1987. – 352 с. 5. Весницкий А. И. Вывод естественных граничных условий для одномерных задач динамики систем с движущимися закреплениями и нагрузками / А. И. Весницкий, Л. Э. Каплан, Г. А. Уткин // Дифференциальные и интегральные уравнения. – Горький: ГГУ, 1982. – С. 75–80. 6. Болдин В. П. Краевые задачи динамики двумерных упругих систем с движущимися нагрузками и закреплениями / В. П. Болдин, А. И. Весницкий // Машиноведение. – 1989. – № 1. – С. 70–75. 7. Болдин В. П. О коэффициенте полезного действия волнового транспортёра / В. П. Болдин, Е. Е. Лисенкова // Вибродиагностика и виброзащита машин и прибор. – Иваново: ИЭИ, 1989. – С. 107–114. 8. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний / В. Л. Бидерман. – М.: Высшая школа, 1980. – 408 с. 9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 1. Механика. – М.: Наука, 1965. – 204 с. 10. Мандельштам Л. И. Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике: Сб. трудов / Л. И. Мандельштам. – М.: Изд-во АН СССР. – 1947. – Т. 2. – 372 с. 11. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем / А. П. Филиппов. – М.: Машиностроение, 1970. – 734 с. 12. Кохманюк С. С. Колебания деформируемых систем при импульсных и подвижных нагрузках / С. С. Кохманюк, Е. Г. Янютин, Л. Г. Романенко. – К.: Наукова думка, 1980. – 232 с. 13. Уткин Г. А. О краевых задачах динамики одномерных упругих систем с движущимися по ним сосредоточенными объектами / Г. А. Уткин // Прикладная механика: Межвузовский сборник. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1988. – Вып. 7. – С. 23–27. 14. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле / С. П. Тимошенко. – М.: Наука, 1967. – 444 с.